

ZASTOSOWANIE METODY PICARDA DO RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH O TRZECH ZMIENNYCH.

PODAŁ

S. ZAREMBA.

I. WSTĘP.

1. Rozważmy równanie o pochodnych cząstkowych postaci

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f \left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

o dwóch zmiennych, niezależnych x i y i wyobraźmy sobie krzywą zamkniętą (C) , nakreśloną na płaszczyźnie.

Picard (Journal de Liouville, 4-e série, t. VI) obmyślił metodę, zwaną metodą przybliżeń kolejnych, która przy pomocy pewnych hipotez bardzo ogólnych, odnoszących się do funkcji po drugiej stronie równania (1), oraz do krzywej (C) pozwala wyznaczyć całą równania (1), czyniąc zadość temu równaniu wewnątrz pola, ograniczonego krzywą (C) i przyjmującą na samej krzywej wartości z góry określone, o ile tylko rozciągłość krzywej (C) jest dostatecznie mała.

Zadaniem pracy niniejszej jest stwierdzenie, że, jeżeli danem jest równanie o pochodnych cząstkowych postaci

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f \left(x, y, z, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

o trzech zmiennych niezależnych x, y, z i daną jest powierzchnia zamknięta jednopłojna (S) o dostatecznie małej rozciągłości, to można metodą

analogiczną do metody Picarda wyznaczyć całkę równania (2), czyniąc zadość temu równaniu wewnątrz powierzchni (S) i przyjmującą na samej powierzchni wartości z góry określone.

2. Rozwiązanie tego zagadnienia polega na własnościach funkcji Greena, które można wypowiedzieć w ten sposób:

Oznaczmy przez $M(x, y, z)$ i $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ dwa punkty, do których odnosi się funkcja Greena

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta),$$

należąca do pewnej powierzchni (S) ; położmy:

$$\varrho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2,$$

oraz

$$(3) \quad G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\varrho} - v;$$

oznaczymy nadto przez Dv pochodną pierwszą funkcji v , wziętą względem jednej ze zmiennych x, y, z , przez D_2v — pochodną drugą tejże funkcji, wziętą względem dwu z tych trzech zmiennych.

Po pierwsze: można znaleźć stałą dodatnią A , zależną jedynie od powierzchni (S) , nie rosnącą nieograniczenie, gdy rozciągłość powierzchni zmniejsza się nieograniczenie według pewnego prawa, i taką, aby było:

$$(4) \quad |Dv| < \frac{A}{\varrho^2}.$$

Po drugie: można znaleźć drugą stałą B , mającą własności analogiczne z własnościami stałej A , i taką, aby było:

$$(5) \quad |D_2v| < \frac{B}{\varrho^3}.$$

Po trzecie: można znaleźć stałą dodatnią C , niezależną od powierzchni (S) z taką, że:

$$(6) \quad \left| \iint \int D_2v \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \right| < C,$$

gdzie całkowanie po stronie lewej rozciąga się na cały obszar, ograniczony powierzchnią (S) .

Mieliśmy już sposobność udowodnienia pierwszej z powyższych trzech własności w artykule, ogłoszonym w tem czasopiśmie ¹⁾, lecz ograniczyliśmy

¹⁾ Prace mat.-fiz., t. VII, str. 137—143.

się wtedy na przypadku, w którym powierzchnia (S) jest wypukłą; obecnie w trzech następujących rozdziałach zamierzamy udowodnić każde z powyższych trzech twierdzeń, pomijając hipotezę o wypukłości powierzchni (S) . Rozdział ostatni, V-y, poświęcamy całkowaniu równania (2).

II. Pierwsza własność funkcji Greena.

3. O powierzchni (S) uczynimy hipotezę następującą: Założmy, że powierzchnia ta w każdym ze swych punktów posiada określoną płaszczyznę styczną i że nadto posiada jeszcze własność, którą wypowiadamy w ten sposób: Umieśmy początek współrzędnych w jakimkolwiek punkcie O powierzchni (S) , osi z nadajmy kierunek normalnej wewnętrznej do powierzchni, a na płaszczyźnie (x, y) nakreślmy koło (C) o środku w punkcie O i o promieniu δ , dostatecznie małym, lecz niezależnym od położenia punktu O na powierzchni S . Niechaj $P(x, y, 0)$ będzie jakimkolwiek punktem, położonym na płaszczyźnie (x, y) wewnątrz lub na obwodzie koła (C) , zaś $Q(x, y, z)$ tym z punktów przecięcia, prostopadłej, wystawionej w punkcie P do płaszczyzny (x, y) z powierzchnią (S) , którego odległość od punktu P ma mniejszą wartość bezwzględną. Przyjmijmy, że tak określona funkcja z zmiennych x i y , posiada na całej rozciągłości pola, ograniczonego okręgiem (C) i na samym okręgu, pochodne cząstkowe skończone i oznaczone aż do pochodnych rzędu trzeciego włącznie.

Jeżeli oznaczmy przez a, b i c połowy wartości pochodnych, cząstkowych rzędu 2-go, w punkcie O dopiero co określonej funkcji z zmiennych x, y i jeżeli przez m oznaczmy granicę wyższą bezwzględnych wartości pochodnych rzędu 3-go tej funkcji, to na zasadzie poprzedzającego przy warunku:

$$(7) \quad x^2 + y^2 \leq \delta^2,$$

będzie:

$$(8) \quad |z - ax^2 - 2bxy - cy^2| < m(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Kiedy punkt P opisuje powierzchnię koła (C) , punkt Q opisuje widocznie część powierzchni (S) ; tę część powierzchni (S) oznaczać będziemy poniżej przez (S') , przez (S'') zaś rozumiemy będną część powierzchni.

Zauważmy jeszcze, iż z założeń, uczynionych o powierzchni (S) , wynika, że będzie można znaleźć długość skończoną R taką, aby kula o promieniu R , styczna do powierzchni naszej w jakimkolwiek punkcie, znajdo-

wała się niezależnie od położenia punktu styczności albo całkiem zewnątrz, albo też całkiem wewnątrz powierzchni (S).

4. Podamy teraz kilka prostych uwag geometrycznych, na których wciąż opierać się nam przyjdzie. Ustawmy osi współrzędnych jak wyżej, oznaczmy przez ν liczbę dodatnią, spełniającą warunek $\nu \leq R$ i wyobraźmy sobie na osi z dwa punkty M_1 i M_2 takie, aby było $OM_1 = \nu$, $OM_2 = -\nu$. Niechaj będzie kula Σ_1 o promieniu R , styczna wewnątrznie w początku współrzędnych, oraz równa poprzedniej kula Σ_2 , styczna zewnątrznie w tymże samym punkcie do powierzchni (S). Niechaj będzie punkt jakikolwiek A przestrzeni, nie leżący wewnątrz kuli Σ_2 ; położmy:

$$l_1 = M_1 A; l_0 = OA; l_2 = M_2 A.$$

Łatwo przekonać się, że sprawdzają się następujące nierówności:

$$(9) \quad \frac{l_0}{l_2} < 2,$$

$$(10) \quad \frac{1}{4} < \frac{l_2}{\nu + l_0} < 1,$$

$$(11) \quad \frac{l_1}{l_2} < 3.$$

Jeżeli punkt A nie jest punktem wewnętrznym ani kuli Σ_2 , ani kuli Σ_1 — to oznaczmy przez t odległość tego punktu od płaszczyzny (x, y), będziemy mieli nadto nierówności:

$$(12) \quad \frac{l_2}{l_1} < 3,$$

$$(13) \quad \frac{t}{l_0^2} < \frac{1}{2R},$$

$$(14) \quad \left| \frac{1}{l_1^3} - \frac{1}{l_2^3} \right| < \frac{9(3^3 - 1)}{R} \cdot \frac{\nu}{l_2^3},$$

$$(15) \quad \left| \frac{1}{l_1^5} - \frac{1}{l_2^5} \right| < \frac{9(3^5 - 1)}{R} \cdot \frac{\nu}{l_2^5}.$$

5. Wiadomo, że funkcję v , występującą w równaniu (3), uważaną za funkcję zmiennych x, y, z , możemy wyobrazić sobie jako potencjał warstwy pojedynczej, rozpiętej na powierzchni (S). Tak uważana funkcja ta

istnieć będzie w całej przestrzeni i będzie równa $\frac{1}{Q}$ na powierzchni (S) oraz na zewnątrz tej powierzchni. Jeżeli przez u oznaczmy gęstość warstwy, dającej początek potencjałowi v , przez $d\sigma$ element powierzchni, przez r zaś odległość tego elementu od punktu M , będziemy mieli:

$$(16) \quad v = \int_S \frac{u d\sigma}{r},$$

oraz

$$(17) \quad u = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{Q} \right) - \frac{dv}{dn} \right\}$$

gdzie symbol $\frac{d}{dn}$ oznacza, jak zwykle, pochodną, wziętą względem normalnej wewnętrznej. Ponieważ funkcja Greena jest dodatnią wewnątrz powierzchni, do której się odnosi, przeto z równania (17) wynika, że funkcja u będzie stale dodatnią.

Ustawmy osi współrzędnych, jak w poprzedzających dwu numerach, wyobraźmy sobie punkty M_1 i M_2 , określone w n-rze 4-ym i zachowajmy poprzednie znaczenie ilości ν . Jeżeli przez x', y', z' oznaczmy współrzędne elementu $d\sigma$, przez r_1 i r_2 zaś odległości tego elementu od punktów M_1 i M_2 , będziemy mieli:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{M_1} &= \int_S \frac{(z' - \nu) u d\sigma}{r_1^3}, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{M_2} &= \int_S \frac{(z' + \nu) u d\sigma}{r_2^3}. \end{aligned} \right.$$

Wiadomo, że $\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{M_1}$ dąży do granicy oznaczonej, gdy ν dąży do zera, nie zachodzą przeto trudności w uzasadnieniu istnienia ilości $\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{M_1}$, gdy punkt M_1 jest nieskończenie bliskim powierzchni i wystarczy wyznaczenie granicy wyższej dla wartości bezwzględnej tego wyrażenia. Mamy:

$$(19) \quad \left| \int_S \frac{z' u d\sigma}{r_2^3} \right| < \int_S \frac{u |z'| d\sigma}{r_2^3},$$

na podstawie zaś nierówności (13) i (9) znajdujemy:

$$\int_S \frac{|z'| u d\sigma}{r_2^3} < \frac{2}{R} \int_S \frac{u d\sigma}{r_2^2},$$

stąd, jeżeli ϱ_2 oznacza odległość punktu M_2 od punktu μ (ξ, η, ζ), określonego w n-rze 2-im i z uwagi, że punkt M_1 leży zewnątrz powierzchni (S), znajdziemy:

$$(20) \quad \int_S \frac{|z'| u d\sigma}{r_2^3} < \frac{2}{R} \frac{1}{\varrho_2}.$$

Zauważmy, że:

$$\left| \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{M_1} \right| < \frac{1}{\varrho_2^2},$$

skąd na podstawie drugiego z równań (18), oraz nierówności (19) i (20) będzie:

$$(21) \quad 8 \int_S \frac{u d\sigma}{r_2^3} < \frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{2}{R} \frac{1}{\varrho_2}.$$

Z drugiej strony z własności, wyrażonej nierównością (12), wypływają z łatwością nierówności:

$$\left| \int_S \frac{z' u d\sigma}{r_1^3} \right| < 3^3 \int_S \frac{|z'| u d\sigma}{r_2^3},$$

$$\nu \int_S \frac{u d\sigma}{r_1^3} < 3^3 \nu \int_S \frac{u d\sigma}{r_2^3};$$

a więc pierwsze z równań (18), po uwzględnieniu nierówności (20) i (21), daje:

$$\left| \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{M_1} \right| < 3^3 \left\{ \frac{4}{R} \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_2^2} \right\}.$$

Jeżeli przez ϱ_1 oznaczymy odległość punktu M_1 od punktu μ , przez d maximum odległości dwóch punktów bieżących na powierzchni (S), to opierając się na nierówności (11), znajdziemy:

$$(22) \quad \left| \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{M_1} \right| < 3^3 \left(12 \frac{d}{R} + 9 \right) \frac{1}{\varrho_1^2}.$$

6. Rozpatrzmy teraz pochodne względem x . Mamy:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} = \int_S \frac{u x' d\sigma}{r_1^3},$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} = \int_S \frac{u x' d\sigma}{r_2^3}.$$

Stąd po uwzględnieniu nierówności (14) wynika:

$$(23) \quad \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} \right| < \frac{9(3^3 - 1)}{R} \nu \int_S \frac{|x'| u d\sigma}{r_2^3}.$$

Byłoby oczywiście łatwo obliczyć bezpośrednio granicę wyższą strony drugiej tej nierówności, zdążającą do zera; stąd zaś wynikłoby, że gdy ν dąży do zera, to $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1}$ dąży do granicy oznaczonej, do której dąży też $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2}$ w tych samych warunkach. Możemy wszakże zadowolić się granicą wyższą, mniej przybliżoną do wartości istotnej. Otrzymujemy ją sposobem następującym: Mamy

$$|x'| < r_2 \quad \text{i} \quad \nu < r_2,$$

a więc:

$$\nu \int_S \frac{|x'| u d\sigma}{r_2^3} < \int_S \frac{u d\sigma}{r_2} = \frac{1}{\varrho_2};$$

skąd, przy uwzględnieniu nierówności (23), (11), oraz nierówności

$$\left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_2} \right| < \frac{1}{\varrho_2^2}$$

wypływa:

$$(24) \quad \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{M_1} \right| < \left\{ 9 + \frac{27(3^3 - 1)}{R} d \right\} \frac{1}{\varrho_1^2},$$

gdzie d , jak wyżej, oznacza maximum odległości dwu punktów bieżących na powierzchni (S).

Znajdziemy podobnym sposobem:

$$(25) \quad \left| \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{M_1} \right| < \left\{ 9 + 27(3^3 - 1) \frac{d}{R} \right\} \frac{1}{\varrho_1^2}.$$

7. Oznaczmy teraz przez Dv pochodną pierwszą funkcji v względem jednej z zmiennych x, y, z , obliczoną dla takiego punktu M wewnątrz powierzchni (S) , którego odległość od powierzchni nie jest mniejszą od R . Będzie:

$$|Dv| < \int_S \frac{u \, d\sigma}{r^2} < \frac{1}{R^2} \int_S u \, d\sigma = \frac{1}{R^2}.$$

a więc a fortiori:

$$|Dv| < \frac{d^2}{R^2} \frac{1}{\varrho^2}.$$

Z nierówności tej, oraz z nierówności (22), (24), (25) wynika, że kładąc:

$$(26) \quad A = 9.27 + 27.26 \frac{d}{R} + \frac{d^2}{R^2},$$

oznaczając przez Dv pochodną pierwszą funkcji v względem jednej ze zmiennych x, y lub z , obliczoną dla jakiegokolwiek punktu wewnątrz powierzchni (S) i przez ϱ odległość tego punktu $\mu(\xi, \eta, \zeta)$, będziemy mieli:

$$|Dv| < \frac{A}{\varrho^2}.$$

Ilość A zostaje skończoną, jeżeli rozciągłość powierzchni (S) zmniejsza się według pewnego prawa, tak np. pozostaje stałą, gdy powierzchnia (S) pozostaje podobną do powierzchni skończonej. Tym sposobem pierwsza z własności funkcji Greena, którą uzasadnić chcieliśmy, została stwierdzoną.

III. Druga własność funkcji Greena.

8. Zachowajmy oznaczenia numerów poprzedzających, rozumiemy, jak poprzednio, przez x', y', z' współrzędne elementu $d\sigma$ powierzchni (S) , przez r_2 odległość tego elementu od punktu M_2 . Otrzymamy łatwo, jak to niżej zobaczymy, wszystkie potrzebne nam rezultaty, skoro tylko udowodnimy, że całka:

$$(27) \quad J = \int_S \frac{x' z' u \, d\sigma}{r_2^5}$$

dąży do granicy oznaczonej, gdy r dąży do zera i skoro obliczymy granicę wyższą bezwzględnej wartości tej całki.

W tym celu oznaczamy podobnie, jak w n-rze 3, przez (S') część powierzchni (S) , do której odnosi się nierówność (8), przez (S'') zaś resztę powierzchni. Położmy:

$$J' = \int_{S'} \frac{x' z' u \, d\sigma}{r_2^5}, \quad J'' = \int_{S''} \frac{x' z' u \, d\sigma}{r_2^5},$$

będzie wtedy:

$$(28) \quad J = J' + J''.$$

Tylko badanie całki J' może przedstawiać trudności, dlatego naprzód niem się zajmujemy.

Nierówność (8) wskazuje, że można napisać:

$$(29) \quad z' = a x'^2 + 2b x' y' + c y'^2 + \Theta m (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}},$$

gdzie Θ jest funkcją ilości x', y' , której wartość bezwzględna pozostaje mniejszą od jedności dla wszystkich wartości x', y' , czyniących zadość warunkowi $x'^2 + y'^2 \leq \delta^2$. Funkcja Θ będzie widocznie funkcją ciągłą ilości x' i y' dla wszystkich wartości, spełniających ten warunek, z wyjątkiem dla $x' = y' = 0$.

Podstawmy wartość (29) na z' w całce J' ; będzie:

$$(30) \quad J' = a \int_S \frac{x^3 u \, d\sigma}{r_2^5} + 2b \int_S \frac{x'^2 y' u \, d\sigma}{r_2^5} + c \int_S \frac{x' y'^2 u \, d\sigma}{r_2^5} + m \int_S \frac{u x' \Theta (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} d\sigma}{r_2^5}.$$

Z ciągłości funkcji u i Θ wynika bezpośrednio, że ostatnia całka po stronie drugiej poprzedniego równania dąży do granicy oznaczonej, gdy r dąży do zera; potrzeba więc tylko oznaczyć granicę wyższą bezwzględnej wartości tej całki.

Jest:

$$|x'| < r_2, \quad (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} < r_2,$$

a stąd:

$$(31) \quad \left| \int_S \frac{u x' \Theta (x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} d\sigma}{r_2^5} \right| < \int_S \frac{u \, d\sigma}{r_2} < \int_S \frac{u \, d\sigma}{r_2} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

Dla wyprowadzenia własności innych całek, znajdujących się po drugiej stronie równania (30), skorzystamy ze znanych wartości pochodnych rzędu 3-go funkcji v na zewnątrz powierzchni (S) :

9. Niechaj M będzie punktem, położonym na osi z na zewnątrz powierzchni (S) w odległości od niej nie większej co do wartości bezwzględnej, niż R . Położmy $z = OM$, oznaczmy przez r odległość punktu M od elementu $d\sigma$ powierzchni (S) i rozważmy wyrażenie:

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_M = -9 \int_S \frac{x' u d\sigma}{r^5} + 15 \int_S \frac{x'^3 u d\sigma}{r^7}.$$

Mnożąc to równanie przez z i wykonywając łatwe przekształcenie, znajdujemy:

$$\begin{aligned} z \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_M &= -9 \int_S \frac{x' (z - z') u d\sigma}{r^5} + 15 \int_S \frac{x' (z - z') u d\sigma}{r^7} \\ &\quad - 9 \int_S \frac{x' z' u d\sigma}{r^5} + 15 \int_S \frac{x'^3 z' u d\sigma}{r^7}. \end{aligned}$$

Pomnożmy obie strony przez dz , całkujemy w granicach od $-R$ do $-v$, oznaczmy przez C punkt o współrzędnych $x=0$, $y=0$, $z=-R$, przez r_0 odległość elementu $d\sigma$ od punktu C ; będzie:

$$\begin{aligned} (32) \quad \int_{-R}^{-v} z \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_M dz &= 3 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2} - 3 \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_C - 3 \int_S \frac{u x'^3 d\sigma}{r_2^5} + 3 \int_S \frac{u x'^3 d\sigma}{r_r^5} \\ &\quad - 9 \int_{-R}^{-v} dz \int_S \frac{x' z' u d\sigma}{r^5} + 15 \int_{-R}^{-v} dz \int_S \frac{x'^3 z' u d\sigma}{r^7}. \end{aligned}$$

Rozpatrując to równanie i pamiętając, że:

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_M = -9 \frac{z}{\sigma^5} + 15 \frac{z^3}{\sigma^7},$$

sposprzeżemy, że całka

$$(33) \quad \int_S \frac{u x'^3 d\sigma}{r_2^5}$$

dąży do granicy skończonej i oznaczonej, gdy v dąży do zera. Poszukajmy wyższej granicy wartości bezwzględnej tej całki; w tym celu zauważmy, że:

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \int_{-R}^{-v} dz \int_S \frac{u x' z' d\sigma}{r^5} \right| &< \int_{-R}^{-v} dz \int_S \frac{u |z'| d\sigma}{r^4}, \\ \left| \int_{-R}^{-v} dz \int_S \frac{u x'^3 z' d\sigma}{r^7} \right| &\leq \int_{-R}^{-v} dz \int_S \frac{u |z'| d\sigma}{r^4}. \end{aligned} \right.$$

Jeżeli oznaczmy przez r_0 odległość punktu O od elementu $d\sigma$, będziemy mieli na podstawie nierówności (13):

$$|z'| < \frac{r_0^2}{2R},$$

skąd, ze względu na nierówność (9):

$$|z'| < \frac{2r^2}{R},$$

znajdziemy:

$$(35) \quad \int_{-R}^{-v} dz \int_S \frac{u |z'| d\sigma}{r^4} < \frac{2}{R} \int_{-R}^{-v} dz \int_S \frac{u d\sigma}{r^2}.$$

Lecz nierówność (10) wskazuje, iż $r > (r_0 - z)$, a więc będzie:

$$(36) \quad \int_{-R}^{-v} dz \int_S \frac{u d\sigma}{r^2} < 16 \int_{-R}^{-v} dz \int_S \frac{u d\sigma}{(r_0 - z)^2} < 16 \int_S \frac{u d\sigma}{r_0 + v} < 16 \int_S \frac{u d\sigma}{r_2} = \frac{16}{\varrho_2}.$$

Z drugiej strony bez żadnej trudności przy pomocy nierówności (10) znajdujemy:

$$(37) \quad \left| \int_{-R}^{-v} z \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_M dz \right| < \frac{5 \cdot 2^{10}}{\varrho_2^2};$$

dalej mamy:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_C \right| &< \frac{1}{R^2}, \\ \left| \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{M_2} \right| &< \frac{1}{\varrho_2^2}, \end{aligned} \right.$$

i

$$(39) \quad \left| \int_S \frac{u x'^3 d\sigma}{r_2^5} \right| < \frac{1}{R^2}.$$

Na tej zasadzie z równania (32) i z nierówności (34), (35), (36), (37), (38) i (39) wyprowadzamy związek następujący:

$$(40) \quad \left| \int_S \frac{x'^3 u d\sigma}{r_2^5} \right| < \frac{5 \cdot 2'^0 + 3}{3 Q_2^2} + \frac{2^8}{R Q_2} + \frac{2}{R^2}.$$

Rozłożmy całkę (33) na dwie części w taki sam sposób, w jaki rozłożyliśmy całkę J (patrz n-r 8); będzie:

$$\int_{S'} \frac{x'^3 u d\sigma}{r_2^5} = \int_{S'} \frac{x'^3 u d\sigma}{r_2^5} + \int_{S''} \frac{x'^3 u d\sigma}{r_2^5},$$

gdzie druga całka po stronie drugiej jest co do wartości bezwzględnej mniejsza od $\frac{1}{\delta Q_2}$, stąd zaś na podstawie nierówności (40) wypływa:

$$(41) \quad \left| \int_{S'} \frac{x'^3 u d\sigma}{r_2^5} \right| < \frac{H}{Q_2^2},$$

gdzie:

$$(42) \quad H = \frac{5 \cdot 2'^0}{3} + 1 + 2^8 \frac{d}{R} + 2 \frac{d^2}{R^2} + \frac{d}{\delta},$$

d zaś oznacza, jak wyżej, maximum odległości dwu punktów bieżących na powierzchni (S).

Znajdziemy łatwo, stosując tą samą metodę postępowania:

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{S'} \frac{x'^2 y' u d\sigma}{r_2^5} \right| < \frac{H}{Q_2^2}; \\ \left| \int_{S'} \frac{x' y'^2 u d\sigma}{r_2^5} \right| < \frac{H}{Q_2^2}. \end{array} \right.$$

Oznaczywszy przez N granicę wyższą wartości bezwzględnych liczb a, b, c , zachodzących w równaniu (18), otrzymujemy z równania (30), przy uwzględnieniu nierówności (31), (41) i (43):

$$|J''| < \frac{4 NH}{Q_2^2} + \frac{m}{Q_2};$$

a ponieważ jest widocznie:

$$|J''| < \frac{1}{\delta^2 Q_2},$$

przeto z równania (28) wynika, że:

$$(44) \quad |J| < \frac{F}{Q_2^2},$$

gdzie:

$$(45) \quad F = 4 NH + md + \frac{d}{\delta^2}.$$

Z całego poprzedzającego rozważania wypływa, że całka J nie tylko sprawdza nierówność (44), lecz nadto dąży do granicy oznaczonej, gdy ν dąży do zera.

10. Możemy już teraz zbadać pochodne drugie funkcji v wewnątrz powierzchni (S).

Mamy:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right)_{M_1} = 3 \int_S \frac{x' z' u d\sigma}{r_1^5} - 3\nu \int_S \frac{x' u d\sigma}{r_1^5} \\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right)_{M_2} = 3 \int_S \frac{x' z' u d\sigma}{r_2^5} + 3\nu \int_S \frac{x' u d\sigma}{r_2^5}; \end{array} \right.$$

korzystając z nierówności (15), znajdujemy:

$$(47) \quad \left| \int_S \frac{x' z' u d\sigma}{r_1^5} - \int_S \frac{x' z' u d\sigma}{r_2^5} \right| < \frac{9(3^5 - 1)}{R} \nu \int_S \frac{|x'| |z'| u d\sigma}{r_2^5},$$

a ponieważ z nierówności (9) i (13) wypływa

$$|z'| < \frac{2 r_2^2}{R},$$

przeto:

$$\int_S \frac{|x'| |z'| u d\sigma}{r_2^5} < \frac{2}{R} \int_S \frac{u d\sigma}{r_2^2},$$

co wskazuje, że różnica (47) równocześnie z ilością ν dąży do zera.

Z drugiej strony:

$$\nu \int_S \frac{u \, d\sigma}{r_2^2} < \int_S \frac{u \, d\sigma}{r_2} = \frac{1}{Q_2},$$

skąd:

$$(48) \quad \left| \int_S \frac{x' u \, d\sigma}{r_1^5} - \int_S \frac{x' u \, d\sigma}{r_2^5} \right| < \frac{2 \cdot 9 \cdot (3^5 - 1)}{R^2} \cdot \frac{1}{Q_2}.$$

Podobną drugą otrzymujemy:

$$r_2^4 \nu \int_S \frac{x' u \, d\sigma}{r_1^5} - \nu \int_S \frac{x' u \, d\sigma}{r_2^5} \left| < \nu^2 \frac{9(3^5 - 1)}{R} \int_S \frac{u \, d\sigma}{R} < \frac{9(3^5 - 1)}{R} \nu \int_S \frac{u \, d\sigma}{r_2^3} \right|.$$

skąd przy uwzględnieniu nierówności (21) wynika:

$$(49) \quad \left| \nu \int_S \frac{x' u \, d\sigma}{r_1^5} - \nu \int_S \frac{x' u \, d\sigma}{r_2^5} \right| < \frac{9(3^5 - 1)}{R} \left(\frac{1}{Q_2^2} + \frac{2}{R} \frac{1}{Q_2} \right).$$

Rezultat ten zupełnie zadawalającym nie jest, ponieważ nie pozwala nam stwierdzić z pewnością, że iloczyn

$$\nu \int_S \frac{x' u \, d\sigma}{r_1^5}$$

dąży do granicy oznaczonej, gdy ν dąży do zera. Aby ten punkt wyjaśnić rozważmy wyrażenie

$$\nu \int_S \frac{u \, d\sigma}{r_2^3},$$

które, jak wiadomo, dąży do $2\pi u$, gdy ν dąży do zera.

Za pomocą łatwego rachunku wniesiemy stąd, że w przypadku, w którym wyrażenie

$$(50) \quad \frac{3\nu}{2\pi} \int_S \frac{x' u \, d\sigma}{r_2^5}$$

dąży do granicy, gdy ν dąży do zera, funkcja u posiada pochodną pierwszą w punkcie O względem łuku, narysowanego na powierzchni (S) , stycznego w punkcie O do osi odciętych; pochodna ta równa się granicy wyrażenia (50).

Otóż widzieliśmy w paragrafie poprzedzającym, że pierwszy wyraz strony drugiej, drugiego z równań (46) dąży do granicy oznaczonej, gdy ν dąży do zera; a ponieważ strona pierwsza tego równania dąży widocznie do granicy określonej, gdy ν dąży do zera, jest więc jasne, że to samo stosuje się do wyrazu drugiego strony drugiej. Stąd wypływa, że wyrażenie (50) dąży istotnie do granicy oznaczonej, gdy ν dąży do zera. Dowodzi to, że funkcja u posiada pochodne pierwsze na powierzchni (S) i wskazuje, że pierwsza strona nierówności (49) dąży też wraz z ν do zera. Z tego wszystkiego wnosimy, że wyrażenie $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right)_{M_1}$ dąży do granicy oznaczonej, gdy ν dąży do zera.

Równania (46) i nierówności (44), (48) i (49) dają:

$$\left| \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right)_{M_1} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right)_{M_2} \right| < 6 \frac{F}{Q_2^2} + \frac{27(3^5 - 1)}{R} \left(\frac{1}{Q_2^2} + \frac{4}{R Q_2} \right),$$

skąd:

$$\left| \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right)_{M_1} \right| < \left\{ 3 + 6 Fd + 27(3^5 - 1) \frac{d}{R} \left(1 + 4 \frac{d}{R} \right) \right\} \frac{1}{Q_2^3}.$$

Z uwagi, że według nierówności (11) jest $Q_2 < \frac{1}{3} Q_1$ i przy oznaczeniu:

$$(51) \quad G = 27(3 + 6 Fd + 27(3^5 - 1) \frac{d}{R} (1 + 4 \frac{d}{R})),$$

będzie zatem:

$$\left| \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right)_{M_1} \right| < \frac{G}{Q_1^3}.$$

Zauważmy, że na podstawie znanych wyrażeń pochodnych funkcji v zewnątrz powierzchni (S) , oraz faktu wyżej udowodnionego, że funkcja u posiada pochodne pierwszego rzędu na powierzchni (S) , można z łatwością wyprowadzić wniosek, że każde z wyrażeń

$$(52) \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_{M_1}, \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)_{M_2}, \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)_{M_1}$$

dąży do granicy zupełnie oznaczonej, gdy ν dąży do zera. Z drugiej strony obliczając z przybliżeniem przez nadmiar wartości bezwzględne różnice między wyrażeniami poprzedzającymi a wyrażeniami analogicznie utworzonymi dla punktu M_2 i posługując się metodą wyżej użytą, znajdziemy:

$$(54) \quad \left| \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_{M_1} \right| < \frac{G_1}{\varrho_1^3}; \quad \left| \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)_{M_1} \right| < \frac{G_1}{\varrho_1^3}; \quad \left| \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)_{M_1} \right| < \frac{G_1}{\varrho_1^3},$$

gdzie

$$G_1 = 27 \left\{ 3 + [9(3^3 - 1) + 27(3^5 - 1)] \left(1 + 2 \frac{d}{R} \right) \cdot \frac{d}{R} \right\}.$$

Wyrażenia (53) dążą do granic oznaczonych, gdy v dąży do zera; toż samo więc stosuje się do i wyrażenia $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)_{M_1}$, z drugiej zaś strony z wyrażen (54) wynika:

$$(55) \quad \left| \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)_{M_1} \right| < 2 \frac{G_1}{\varrho_1^3}.$$

Oznaczmy przez $D_2 v$ pochodną drugą funkcji v dla jakiegokolwiek punktu na powierzchni (S) , takiego wszakże, aby jego odległość najkrótsza od powierzchni nie była niższą od R . Będzie:

$$|D_2 v| < \frac{3}{R^3},$$

a więc a fortiori:

$$(56) \quad |D_2 v| < 3 \left(\frac{d}{R} \right)^3 \frac{1}{\varrho^3},$$

gdzie ϱ oznacza odległość punktu uważanego od punktu $\mu (\xi, \eta, \zeta)$. Oznaczmy przez B największą z pomiędzy liczb:

$$(57) \quad G, 2G_1, 3 \left(\frac{d}{R} \right)^3;$$

na podstawie nierówności (52), (54), (55), jeżeli $D_2 v$ oznacza jedną z pochodnych drugich funkcji v względem zmiennych x, y, z dla jakiegokolwiek punktu wewnętrznego względem powierzchni (S) możemy napisać:

$$|Dv| < \frac{B}{\varrho^3},$$

gdzie ϱ oznacza odległość uważanego punktu od punktu μ .

Uwzględniając wartości, znalezione na liczby (57), widzimy, że jeżeli rozciągłość powierzchni (S) zmniejsza się według pewnego prawa, to liczba B nie

przekroczy nigdy pewnej wartości skończonej. Tak np., gdy powierzchnia (S) pozostaje podobną do powierzchni skończonej, liczba B pozostaje stałą. Tym sposobem uzasadniliśmy drugą własność funkcji Greena.

IV. Trzecia własność funkcji Greena.

11. Położmy

$$w = \iiint v \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

gdzie całkowanie rozciąga się na cały obszar, ograniczony powierzchnią (S) .

Całka, występująca na pierwszej stronie nierówności (6), jest pochodną drugą funkcji w . Wiemy, że funkcja w może być uważana za potencjał pojedynczej warstwy, rozpostartej na powierzchni (S) i mającej gęstość taką, że na zewnątrz powierzchni funkcja w jest identyczna z potencjałem v bryły jednorodnej o gęstości równej 1 i ograniczonej powierzchnią (S) . Gęstość ω warstwy, dającej początek potencjałowi w , jest oczywiście dodatnią w każdym punkcie powierzchni (S) ; wynika to stąd, że gęstość warstwy, dającej początek potencjałowi v , jest dodatnią. Zresztą, opierając się na poprzednio osiągniętych wynikach, możnaby łatwo obliczyć granicę wyższą dla funkcji ω .

To założywszy, ustawmy osie współrzędnych, podobnie jak w numerach poprzedzających, i weźmy punkty M_1 , A i M_2 , rozpatrzone już poprzednio, a przede wszystkim zwróćmy uwagę na punkt M_2 , znajdujemy się zewnątrz powierzchni (S) . Jeżeli obliczymy dla tego punktu pochodne funkcji w względem x i y , aż do pochodnych rzędu 3-go włącznie, przekonamy się bez trudności, że przy założeniach, które uczyniliśmy o powierzchni (S) , pochodne te dążą do granic skończonych i zupełnie oznaczonych, gdy ilość v dąży do zera. Ponieważ wewnątrz powierzchni (S) funkcja w jest stale równą funkcji v , to i pochodne funkcji w będą miały też powyższą własność. Wynika stąd, że do funkcji w można zastosować rozważania podobne do tych, jakie rozwinęliśmy w n-rach 8 i 9. Stwierdzimy tym sposobem, że funkcja ω posiada pochodne pierwsze na powierzchni (S) . Następnie udowodnimy, że, gdy obliczymy pochodne funkcji w , aż do pochodnych rzędu 2-go włącznie dla jakiegokolwiek punktu M wewnątrz powierzchni (S) , i ten punkt M zbliżać będziemy nieograniczenie do jakiegokolwiek punktu na powierzchni (S) , to pochodne dążyć będą do granic skończonych i oznaczonych i pozosta-

wać będą co do wartości bezwzględnych stale mniejszymi od pewnej stałej skończonej C , którą potrafimy obliczyć. Tym sposobem została udowodniona i trzecia własność funkcji Greena.

V. Całkowanie równań postaci (2).

12. Dochodzimy obecnie do głównego przedmiotu tej pracy, którym, jak powiedziano we Wstępie, jest rozwiązanie następującego zagadnienia:

Danem jest równanie o pochodnych cząstkowych postaci

$$(58) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f\left(x, y, z, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right),$$

oraz daną jest powierzchnia zamknięta jednoczępna (S) o dostatecznie małej rozciągłości; wyznaczyć całkę tego równania, czyniącą mu zadość w całym obszarze, ogłoszonym powierzchnią (S) i przyjmującą na samej powierzchni wartości z góry dane.

Przyjmijmy, że powierzchnia (S) spełnia wszystkie warunki, podane w n-rze 3; przyjmijmy nadto, że wartości, które ma przyjmować całka szukana na powierzchni (S), są wartościami pewnej funkcji Ω , mającej pochodne aż do rzędu 3-go włącznie skończone i oznaczone w obszarze, wewnątrz którego znajduje się cała powierzchnia (S). Nie zakładamy poza tem wcale, że funkcja Ω jest funkcją analityczną. Oczywiście jest rzeczą, że musimy poczynić też pewne założenia o funkcji f , występującej po drugiej stronie równania (58). Aby wypowiedzieć te założenia z całą pożądaną jasnością, zastąpmy w funkcji f pochodne $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, symbolami a_1 , a_2 , a_3 i rozważmy funkcję

$$(59) \quad f(x, y, z, \varphi, a_1, a_2, a_3),$$

w której, niechaj ilości $x, y, z, \varphi, a_1, a_2, a_3$ będą na chwilę wszystkie zmiennymi niezależnymi. Założenia nasze o funkcji f mają być następujące:

A) Wyrażenie (59) posiada pochodne pierwszego i drugiego rzędu skończone i oznaczone względem każdej ze siedmiu zmiennych, od których zależy, i to dla każdego układu wartości tych zmiennych, w którym x, y, z są współrzędnymi punktu, znajdującego się wewnątrz uważanego obszaru, pozostałe zaś zmienne φ, a_1, a_2, a_3 są zupełnie dowolne.

B) Oznaczmy przez

$$(60) \quad \varphi', a_1', a_2', a_3'; \quad (61) \quad \varphi'', a_1'', a_2'', a_3''$$

dwa układy wartości zmiennych φ, a_1, a_2, a_3 ; jeżeli tylko x, y, z są współrzędnymi punktu M wewnątrz obszaru (D), to można znaleźć stałą dodatnią λ , niezależną od położenia tego punktu w obszarze, oraz od wartości (60) i (61) i taką, aby było:

$$(62) \quad |f(x, y, z, \varphi', a_1', a_2', a_3') - f(x, y, z, \varphi'', a_1'', a_2'', a_3'')| < \lambda (|\varphi' - \varphi''| + |a_1' - a_1''| + |a_2' - a_2''| + |a_3' - a_3''|),$$

zupełnie niezależnie od wartości (60) i (61).

Nadmieniamy, że nie czynimy wcale założenia, że funkcja (59) jest funkcją analityczną.

13. Położmy

$$\varphi = \Phi + \Omega$$

i wstawmy tę wartość do równania (58). Funkcja Φ sprawdzać będzie równanie tejże samej postaci co równanie (58). Równanie, któremu będzie czyniła zadość funkcja Φ , będzie także spełniało warunki (A) i (B). Na samej powierzchni (S) funkcja Φ będzie miała wartość zero w każdym punkcie. Ta prosta uwaga wystarcza do okazania, że bez szkody dla ogólności można założyć, że $\Omega = 0$, co też przyjmujemy w następujących wywodach.

14. Zanim przejdziemy do przypadku ogólnego, rozpatrzmy przypadek bardzo szczególny, w którym funkcja, znajdująca się po drugiej stronie równania (58), nie zawiera ani funkcji szukanej φ , ani pochodnych tej funkcji. Innymi słowy rozpatrzmy równanie postaci:

$$(63) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Jeżeli przez $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ oznaczmy funkcję Greena dla powierzchni (S), otrzymamy, jak wiadomo, kładąc:

$$(64) \quad \varphi = -\frac{1}{4\pi} \iiint f(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$

gdzie całkowanie rozciąga na całkowity obszar, ograniczony powierzchnią (S) — całkę równania (63) czyniącą mu zadość wewnątrz tego obszaru i równą zero na samej powierzchni (S).

Ze względu na późniejsze zastosowanie, koniecznem jest oznaczyć granice wyższe dla bezwzględnej wartości funkcji φ , określonej wzorem (64), oraz dla pochodnych tej funkcji aż do rzędu 2-go włącznie.

Zauważmy, że jeżeli położymy:

$$\varrho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2,$$

będzie:

$$0 < G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) < \frac{1}{\varrho},$$

oznaczając więc przez F granicę wyższą wartości bezwzględnej funkcji $f(x, y, z)$ wewnątrz obszaru D , będziemy mieli:

$$|\varphi| < \frac{1}{4\pi} F \int \int \int \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\varrho}.$$

Całka, znajdującą się po drugiej stronie tej nierówności, ma wartość oczywiście mniejszą od wartości analogicznej całki rozciągniętej na kulę, której środek znajduje się w punkcie $M(x, y, z)$, promień zaś jest równy maximum d odległości dwu punktów bieżących na powierzchni (S) ; będzie więc:

$$(65) \quad |\varphi| < \frac{1}{2} F d^2.$$

Rozpatrzmy teraz pochodne pierwsze funkcji φ . Mamy:

$$\left| \frac{d\varphi}{dx} \right| < \frac{1}{4\pi} F \int \int \int \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| d\xi d\eta d\zeta,$$

lecz z równania (3) i z nierówności (4) wynika, że

$$\left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| < \frac{1+A}{\varrho^3},$$

a więc postępując, jak wyżej, znajdziemy:

$$(66) \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| < F(1+A)d$$

i także:

$$(67) \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| < F(1+A)d,$$

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| < F(1+A)d.$$

Zbadajmy wreszcie pochodne drugie funkcji φ , określonej równaniem (64). Zauważmy przedewszystkiem, że istnienie tych pochodnych jest niewątpliwem od chwili, gdy funkcja $f(x, y, z)$ posiada pochodne pierwsze. Oznaczmy przez F_1 granicę wyższą bezwzględnych wartości pochodnych pierwszych funkcji $f(x, y, z)$ i zauważmy, że jest:

$$(68) \quad |f(x, y, z) - f(\xi, \eta, \zeta)| < 3F_1 \varrho.$$

Oznaczmy przez $M_0(x_0, y_0, z_0)$ jakikolwiek punkt, znajdujący się wewnątrz powierzchni (S) i połóżmy:

$$\Theta(\xi, \eta, \zeta) = f(\xi, \eta, \zeta) - f(x_0, y_0, z_0);$$

z równania (64) otrzymamy wtedy:

$$(69) \quad \varphi = -\frac{1}{4\pi} f(x_0, y_0, z_0) \int \int \int G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int \int \int \Theta(\xi, \eta, \zeta) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

Niechaj φ' oznacza pierwszy, φ'' drugi wyraz strony drugiej tego równania. Jeżeli przez U oznaczmy na chwilę potencjał ciała o gęstości 1, ograniczonego powierzchnią (S) , to pochodne drugiej ilości U istnieć będą w całej przestrzeni, ograniczonej powierzchnią (S) , i będzie można wyznaczyć łatwo liczbę dodatnią C_1 , która będzie granicą wyższą bezwzględnych wartości tych pochodnych. Jest to wynik bezpośredni założeń, które uczyniliśmy o powierzchni (S) . Uwzględniając przeto nierówność (6) i oznaczając przez $D_2 \varphi'$ pochodną drugą funkcji φ' względem którejkolwiek ze zmiennych x, y, z , będziemy mieli.

$$(70) \quad |(D_2 \varphi')_{M_0}| < \frac{1}{4\pi} (C + C_1) F.$$

Z powyższego i z faktu, że $\Theta(x_0, y_0, z_0) = 0$ oraz, że $\Theta(\xi, \eta, \zeta)$ posiada pochodne pierwsze względem zmiennych ξ, η, ζ , wypada:

$$(D_2 \varphi'')_{M_0} = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int (D_2 G)_{M_0} \Theta(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$

gdzie $D_2 \varphi''$ oznacza pochodną drugą funkcji φ'' względem którejkolwiek ze zmiennych x, y, z ; $D_2 G$ zaś ma znaczenie analogiczne.

Z równania (3), przy oznaczeniu

$$\varrho_0^2 = (x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2$$

i przy uwzględnieniu nierówności (5), otrzymujemy:

$$|(D_2 G)_{M_0}| < \frac{3+B}{\varrho_0^3},$$

a więc na mocy nierówności (68) będzie:

$$|(D_2 \varphi^n)_{M_0}| < \frac{3F_1(3+B)}{4\pi} \int \int \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\varrho_0^3}.$$

Ponieważ nierówność wymaga się, gdy całkowanie po stronie drugiej rozciągające się na przestrzeń, ograniczoną powierzchnią (S) , rozciągniemy na kulę o promieniu d i o środku w punkcie M_0 , znajdziemy przeto z łatwością:

$$|(D_2 \varphi^n)_{M_0}| < 3F_1(3+B)d.$$

Uwzględniając przeto równanie (69) i nierówność (70), stosując symbol D_2 w znaczeniu powyższym i usuwając zbyteczny już składowy M_0 , znajdujemy:

$$(71) \quad |D_2 \varphi| < \frac{C+C_1}{4\pi} F + 3F_1(3+B)d.$$

15. Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego i w tym celu napiszmy dla skrócenia:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Rozwiązując jedynie zagadnienia analogiczne do zbadanego w numerze poprzedzającym, będzie więc można utworzyć szereg nieskończony funkcji

$$(72) \quad \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \dots$$

znikających na powierzchni (S) i czyniących zadość wewnątrz tej powierzchni następującym równaniom:

$$(73) \quad \begin{cases} \Delta \varphi_1 = f(x, y, z, 0, 0, 0, 0) \\ \Delta \varphi_2 = f\left(x, y, z, \varphi_1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right), \\ \dots \\ \Delta \varphi_{p+1} = f\left(x, y, z, \varphi_p, \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_p}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_p}{\partial z}\right). \\ \dots \end{cases}$$

Powiadamy, że jeśli rozciągłość powierzchni (S) jest dostatecznie małą, to szereg (72) będzie zbieżny i będzie miał jako granicę funkcję φ , znikającą na powierzchni (S) i sprawdzającą wewnątrz tej powierzchni równanie (58).

Dla udowodnienia tego twierdzenia położmy z jednej strony:

$$(74) \quad \begin{cases} \psi_1 = \varphi_1, \\ \psi_2 = \varphi_2 - \varphi_1, \\ \psi_3 = \varphi_3 - \varphi_2, \\ \dots \\ \psi_p = \varphi_p - \varphi_{p-1}, \end{cases}$$

z drugiej zaś:

$$\begin{cases} f_1 = f(x, x, z, 0, 0, 0, 0), \\ f_2 = f\left(x, y, z, \varphi_1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right) - f(x, y, z, 0, 0, 0, 0), \\ f_3 = f\left(x, y, z, \varphi_2, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right) - f\left(x, y, z, \varphi_1, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right), \\ \dots \\ f_p = f\left(x, y, z, \varphi_{p-1}, \frac{\partial \varphi_{p-1}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{p-1}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_{p-1}}{\partial z}\right) - f\left(x, y, z, \varphi_{p-2}, \frac{\partial \varphi_{p-2}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{p-2}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_{p-2}}{\partial z}\right), \end{cases}$$

będziemy mieli:

$$(76) \quad \Delta \psi_1 = f_1, \quad \Delta \psi_2 = f_2, \dots, \quad \Delta \psi_p = f_p.$$

Ponieważ funkcje $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p, \dots$ znikają wszystkie na powierzchni (S) , będzie więc:

$$(77) \quad \psi_p = \frac{-1}{4\pi} \int \int \int G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) f_p(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$

gdzie całkowanie powinno być rozciągnięte na cały obszar, ograniczony powierzchnią (S) .

Oznaczmy przez δ_p granicę wyższą bezwzględnej wartości funkcji ψ_p wewnątrz powierzchni (S) , przez δ'_p granicę wyższą bezwzględnych wartości pochodnych pierwszych funkcji ψ_p w tymże obszarze. Uwzględniając założenie, wyrażone nierównościami (62), będziemy mieli:

$$(78) \quad |f_p| < \lambda(\delta_{p-1} + 3\delta'_{p-1});$$

$p = 2, 3, 4, \dots$

na mocy tedy wyrażenia (77) i nierówności (65), (66), (67), będzie:

$$\delta_p < \frac{1}{2} d^2 \lambda (\delta_{p-1} + 3\delta_{p-1}'),$$

$$\delta_p' < (1 + A) d \cdot \lambda (\delta_{p-1} + 3\delta_{p-1}'),$$

skąd, jeżeli położymy:

$$(79) \quad \alpha = \left(\frac{1}{2} d^2 + 3(1 + A) d \right) \lambda,$$

wynika:

$$(80) \quad \delta_p + 3\delta_p' < \alpha (\delta_{p-1} + 3\delta_{p-1}').$$

$p = 2, 3, 4, \dots$

Jeżeli przez δ_0 oznaczymy granicę wyższą bezwzględnej wartości funkcji $f(x, y, z, 0, 0, 0)$, gdy punkt (x, y, z) pozostaje wewnątrz obszaru (D) , będzie:

$$\delta_1 + 3\delta_1' < \alpha \frac{\delta_0}{\lambda},$$

jeżeli więc położymy:

$$\alpha = \frac{\delta_0}{\lambda} \alpha$$

i uwzględnimy nierówność (80), znajdziemy:

$$(81) \quad \delta_p + 3\delta_p' < \alpha \alpha^{p-1}$$

$(p = 1, 2, 3, \dots)$

i a fortiori

$$(82) \quad \begin{aligned} \delta_p &< \alpha \alpha^{p-1}, \\ \delta_p' &< \alpha \alpha^{p-1}, \end{aligned} \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

Lecz wyrażenie (79) wskazuje, że gdy rozciągłość powierzchni (S) jest dostatecznie małą, wtedy

$$(83) \quad \alpha < 1.$$

a więc w tym przypadku szereg:

$$(84) \quad \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \dots$$

jak to wskazuje pierwszy szereg nierówności (82) jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżnym w całym obszarze, ograniczonym powierzchnią (S) . Gdy

zaś szereg (84) jest zbieżnym, to jest zarazem zbieżnym i szereg (72); pierwszy punkt naszego twierdzenia został udowodniony.

Pozostaje jeszcze wykazać, że funkcja φ , która jest sumą szeregu (84), jest żadaną całką danego równania.

16. Zauważmy najprzód, że funkcja φ znika w każdym punkcie powierzchni (S) , co wynika bezpośrednio stąd, że funkcje, tworzące szereg (72), mają tę własność. Teraz należy zbadać, czy funkcja φ czyni zadość równaniu (58). Przedewszystkiem łatwo widzieć, że funkcja φ ma pochodne pierwszego rzędu. W samej rzeczy, jeżeli przez D oznaczmy pochodną względem jednej ze zmiennych x, y, z , wtedy na podstawie drugiej nierówności

$$|D\psi_p| < \alpha \alpha^{p-1},$$

szereg

$$(85) \quad D\psi_1 + D\psi_2 + D\psi_3 + \dots$$

będzie bezwzględnie i jednostajnie zbieżnym w całym obszarze, ograniczonym powierzchnią (S) ; stąd wynika, że funkcja φ jako suma szeregu (84) ma pochodne pierwsze i każda z tych pochodnych jest sumą jednego takiego szeregu, jakim jest szereg (85). Stąd i na mocy nierówności (81) i (78) wypływa, że szereg:

$$(86) \quad f_1 + f_2 + f_3 + \dots$$

będzie też bezwzględnie i jednostajnie zbieżnym i że nadto, suma tego szeregu będzie równa:

$$f\left(x, y, z, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right).$$

Będzie tedy:

$$(87) \quad \varphi(x, y, z) = \frac{-1}{4\pi} \int \int \int f\left(\xi, \eta, \zeta, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right) G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$

gdzie całka rozciąga się na cały obszar, ograniczony powierzchnią (S) .

Z tego wszystkiego wynika, że funkcja φ czyni istotnie zadość równaniu (58), jeżeli tylko posiada pochodne drugie. To właśnie okażemy w numerze następnym.

17. Oznaczmy przez D pochodną pierwszą, przez D_2 pochodną drugą względem którejkolwiek ze zmiennych x, y, z . Niechaj h_p oznacza granicę wyższą bezwzględnych wartości pochodnych drugich funkcji φ_p ; położmy:

$$\omega_p = f\left(x, y, z, \varphi_p, \frac{\partial \varphi_p}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_p}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_p}{\partial z}\right).$$

Z tej hipotezy przy pomocy nierówności (62) i na podstawie, że wartości bezwzględne ilości φ_p , $\frac{\partial \varphi_p}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_p}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi_p}{\partial z}$ pozostają mniejszymi od liczby ustalić się dającej (łatwo widzieć, że te wartości są mniejsze od $\frac{a}{1-a}$) wnosimy, że będzie można znaleźć liczbę dodatnią i skończoną m taką, aby było:

$$|D\omega_p| < m + 3\lambda h_p.$$

Będzie można też znaleźć liczbę dodatnią skończoną g , aby dla każdego skaznika p było:

$$|\omega_p| < g;$$

opierając się tedy na nierówności (71), będziemy mieli:

$$|D_2 \varphi_{p+1}| < \frac{C_1 + C}{4\pi} g + 3d(3+B)(m + 3\lambda h_p),$$

lub też kładąc:

$$b = \frac{c + c_1}{4\pi} g + 3d(3+B)m,$$

$$(89) \quad \beta = 9d(3+B)\lambda,$$

$$(90) \quad h_{p+1} < b + \beta h_p.$$

Gdy rozciągłość powierzchni (S) jest dostatecznie małą, będzie:

$$(91) \quad \beta < 1,$$

a więc przy pomocy nierówności (90) otrzymujemy łatwo:

$$h_{p+1} < b \frac{\beta}{1-\beta} + \beta^p h_1,$$

skąd, na podstawie nierówności (91),

$$|D_1 \varphi_{p+1}| < \frac{b}{1-\beta} + h_1$$

dla każdego skaznika p .

Jeżeli przypomnimy sobie założenia, uczynione o stronie drugiej równania (58) i że ilości φ_p , $\frac{\partial \varphi_p}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi_p}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi_p}{\partial z}$ pozostają co do wartości bezwzględnej mniejsze od liczby oznaczonej (od $\frac{a}{1-a}$); jeżeli przez e i e' oznaczymy

stałe odpowiednio dobrane, przez δ_p'' — granicę wyższą wartości bezwzględnych pochodnych drugiej funkcji φ_p , będziemy mieli:

$$|Df_{p+1}| < e\delta_p + e'\delta_p' + 3\lambda\delta_p''$$

($p = 1, 2, 3, \dots$)

lub na podstawie nierówności (82):

$$|Df_{p+1}| < a(e + e')a^{p-1} + 3\lambda\delta_p''.$$

Z drugiej strony nierówności (78) i (81) dają:

$$|f_{p+1}| < a\lambda a^{p-1},$$

skąd na podstawie nierówności (71) wnosimy, że:

$$(93) \quad \delta_{p+1}'' < k'a^p + \beta\delta_p'',$$

gdzie:

$$k = \frac{1}{4\pi}(C + C_1)\frac{a\lambda}{a} + 3d(3+B)(e + e')\frac{a}{a},$$

i gdzie β ma znaczenie określone nierównością (89).

Jeżeli ε oznacza większą z dwóch liczb α i β , z których obie są mniejsze od 1, to możemy nierówność (93) napisać tak:

$$\delta_{p+1}'' < k\varepsilon^p + \varepsilon\delta_p''$$

($p = 1, 2, 3, \dots$),

skąd:

$$\delta_{p+1}'' < (pk + \delta_1'')\varepsilon^p,$$

lub

$$|D_2 \varphi_{p+1}| < (pk + \delta_1'')\varepsilon^p,$$

co stwierdza nam, że szereg:

$$(95) \quad D_2 \varphi_1 + D_2 \varphi_2 + D_2 \varphi_3 + \dots$$

jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w całej rozciągłości, ograniczonej powierzchnią (S). Wynika stąd, że funkcja φ posiada pochodne drugie i że te pochodne są sumami szeregów postaci (95). Można tedy, opierając się na równaniu (87), twierdzić z pewnością, że funkcja φ czyni zadość danemu równaniu różniczkowemu w całkowitym obszarze, ograniczonym powierzchnią (S). Z drugiej strony widzieliśmy już, że funkcja φ znika na samej powierzchni (S).