rach (między N. Targiem a Zakopanem). Z porównania tego wypada, że w okresie 1848—1878 ubytek roczny wynosił 6′, 33.

Nachylenie magnetyczne, zmierzone w Zakopanem przed 20 laty, było 64° 3′, 30 (sierpień 1878). Z porównania z liczbą znalezioną przezemnie okazuje się ubytek roczny = 0′, 9. W okresie trzydziestoletnim, poprzedzającym rok 1878, ubytek ten wynosił 0′, 83, jak oblicza dr. Wierzbicki według swoich i Kreila obserwacyi.

Co do natężenia porównanie jest trudne, nie znam bowiem żadnych pomiarów tego elementu, odnoszących się do obszaru, o który tu chodzi. Przytoczę tylko, na zakończenie, wartości wszystkich trzech elementów, obliczone dla epoki 1898,5 i dla pozycyi Zakopanego, według tablic Neumeyera [6]. Nie należy jednak zapominać, że wpływy i właściwości lokalne nie są uwzględnione w tablicach tego rodzaju. Liczby te są: $\delta = 6°32'$ z ubytkiem rocznym 5′,5; $i = 63° 55'$ z ubytkiem 1′ na rok; $H = 0{,}2046$ z przyrostem rocznym 0,00015.

Kraków, Zakład fizyczny Uniwersytetu Jagiellońskiego
w grudniu 1898.

[6]) Landolt und Börnstein. Physikalisch-chemische Tabellen: wydanie 1894 str. 526—528.

O PEWNYCH CECHACH CHARAKTERYSTYCZNYCH GRUPY RUCHÓW EUKLIDESOWYCH.

NAPISALI

W. ARVAY i H. KOMPERDA [1]).

W pracy tej podajemy dowody analityczne pewnych twierdzeń, które geometrycznie są oczywiste. Jeżeli mianowicie zapytamy o najogólniejszą ciągłą grupę przekształceń płaszczyzny, wytworzoną przez przekształcenia nieskończenie małe, przy której elementy liniowe danej krzywej i kąty pomiędzy jej sąsiedniemi stycznemi pozostają bez zmiany, to odpowiedzią będą oczywiście tylko wszystkie przesunięcia i obroty, t. j. przekształcenia grupy ruchów euklidesowych. Podobnie najogólniejszą ciągłą grupą przekształceń przestrzeni (wytworzoną przez przekształcenia nieskończenie małe), nie zmieniającą długości elementów liniowych, kątów pomiędzy sąsiedniemi liniami stycznemi i sąsiedniemi płaszczyznami ściśle stycznemi danej krzywej skośnej, są przekształcenia grupy ruchów euklidesowych w przestrzeni. Nareszcie te same przekształcenia stanowią najogólniejszą grupę rzeczonej kategoryi, która nie zmienia długości elementów liniowych na powierzchni i odległości punktów powierzchni od płaszczyzn stycznych w punktach sąsiednich.

W ten sposób, w zastosowaniu do wszystkich tych utworów geometrycznych można grupę ruchów euklidesowych określać za pomocą niezmienności pewnych form różniczkowych, które przyjąć można za punkt wyjścia przy uważaniu odpowiednich niezmienników różniczkowych. Zobaczymy, że istotnie najprostsze z tych niezmienników są bezpośrednim wynikiem niezmienności rzeczonych form różniczkowych. Aby tedy z tego stanowiska traktować teoryę wszystkich niezmienników różniczkowych grupy ruchów euklidesowych, t. j. teoryę przystawania krzywych płaskich, krzywych prze-

[1]) Z seminaryum matematycznego prof. K. Żorawskiego w Krakowie.

strzennych i powierzchni, potrzebne są, dla pełności i jednostajności rozumowania, dowody analityczne twierdzeń powyższych, które zresztą i z tego względu mogą być interesującemi, że mogą służyć za wskazówkę do podobnych rozumowań w przypadkach, które geometrycznie nie są tak oczywiste.

I. Krzywe płaskie.

Uważajmy linię krzywą:

$$x = x(u), \quad y = y(u).$$

Kwadrat elementu liniowego wyraża się wzorem:

$$ds^2 = (x'^2 + y'^2)\, du^2,$$

a kąt pomiędzy sąsiedniemi stycznemi:

$$d\omega = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2}\, du.$$

Niechaj ogólne przekształcenie nieskończenie małe niewiadomej grupy będzie:

$$Wf = \varphi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \psi(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Krzywa nie zmieni się, jeżeli jakkolwiek zmienimy jej parametr, zatem:

$$\delta u = \xi(u)\, \delta t,$$

gdzie $\xi(u)$ jest funkcyą dowolną. Łatwo wyprowadzić, że:

$$\frac{\delta x'}{\delta t} = \varphi' - x'\xi', \quad \frac{\delta x''}{\delta t} = \varphi' - 2x''\xi' - x'\xi'', \quad ^{1})$$

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \psi' - y'\xi', \quad \frac{\delta y''}{\delta t} = \psi'' - 2y''\xi' - y'\xi''.$$

[1]) Zob. tom XXIII Rozpraw Wydz. mat.-fiz. Akad. Umiej. w Krakowie str. 11—14.

Na mocy tych wzorów otrzymujemy:

$$\frac{\delta ds^2}{\delta t} = 2(x'\varphi' + y'\psi')\, du^2,$$

$$\frac{\delta d\omega}{\delta t} = \{(x'\psi'' - y'\varphi'' + y''\varphi' - x''\psi')(x'^2 + y'^2) - 2(x'y'' - y'x'')(x'\varphi' + y'\psi')\} \frac{du}{x'^2 + y'^2}.$$

Ażeby zatem te waryacye były równe zeru, musi być:

$$x'\varphi' + y'\psi' = 0,$$

$$x'\psi'' - x''\psi' + y''\varphi' - y'\varphi'' = 0.$$

Z pierwszego warunku wynika:

$$\varphi' = -\lambda y',$$

$$\psi' = \lambda x',$$

gdzie λ jest funkcyą dowolną parametru u. Różniczkując te wyrażenia, mamy:

$$\varphi'' = -\lambda' y' - \lambda y'', \quad \psi'' = \lambda' x' + \lambda x'',$$

a podstawiając to w warunek drugi, otrzymujemy:

$$\lambda'(x'^2 + y'^2) = 0;$$

ponieważ zaś $x'^2 + y'^2$, pomijając pewne przypadki wyjątkowe, nie może się równać zeru, mamy zatem:

$$\lambda' = 0,$$

t. j. otrzymujemy:

$$\varphi = m - \lambda y, \quad \psi = n + \lambda x,$$

gdzie m, n, λ są stałe dowolne. Wf tedy jest istotnie przekształceniem nieskończenie małem grupy ruchów euklidesowych.

Łatwo pokazać, że mając dwie formy niezmienne Adu i Bdu mamy niezmiennik $\frac{B}{A}$. Istotnie:

$$du\,\delta A + A\, d\delta u = 0, \quad du\,\delta B + B\, d\delta u = 0,$$

a stąd wynika:

$$A\,\delta B - B\,\delta A = 0,$$

t. j. otrzymujemy:

$$\delta\,\frac{B}{A} = 0.$$

Mamy zatem niezmiennik $\frac{B}{A}$, który w danym przypadku ma postać:

$$\frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

t. j. jest krzywizną uważanej linii krzywej.

II. Krzywe przestrzenne.

O wiele bardziej skomplikowanym dowód ten będzie w przypadku krzywych przestrzennych. Równania krzywej przestrzennej możemy napisać w postaci:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Kwadrat tedy elementu liniowego jest:

$$ds^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,du^2,$$

kwadrat kąta pomiędzy sąsiedniemi liniami stycznemi:

$$d\omega^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\,du^6}{ds^4},$$

kąt zaś pomiędzy dwiema płaszczyznami ściśle stycznemi:

$$d\theta = \frac{(x'\alpha + y'\beta + z'\gamma)\,ds}{a^2 + b^2 + c^2},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a &= y'z'' - z'y'', & \alpha &= y''z''' - z''y''', \\ b &= z'x'' - x'z'', & \beta &= z''x''' - x''z''', \\ c &= x'y'' - y'x'', & \gamma &= x''y''' - y''x'''. \end{aligned}$$

Niechaj ogólne przekształcenie nieskończenie małe niewiadomej grupy będzie

$$Wf = \varphi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + \psi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \sigma(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Wiemy, że jakkolwiek zmieniamy parametr krzywej, to ona się nie zmieni, mamy zatem:

$$\delta u = \xi(u)\,\delta t,$$

gdzie $\xi(u)$ jest funkcyą dowolną. Zatem zupełnie tak samo, jak poprzednio, możemy wyprowadzić wzory następujące:

$$\begin{aligned} \delta x' &= (\varphi' - x'\xi')\,\delta t, & \delta x'' &= (\varphi'' - 2x''\xi' - x'\xi'')\,\delta t, \\ \delta y' &= (\psi' - y'\xi')\,\delta t, & \delta y'' &= (\psi'' - 2y''\xi' - y'\xi'')\,\delta t, \\ \delta z' &= (\sigma' - z'\xi')\,\delta t, & \delta z'' &= (\sigma'' - 2z''\xi' - z'\xi'')\,\delta t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta x''' &= (\varphi''' - 3x'''\xi' - 3x''\xi'' - x'\xi''')\,\delta t, \\ \delta y''' &= (\psi''' - 3y'''\xi' - 3y''\xi'' - y'\xi''')\,\delta t, \\ \delta z''' &= (\sigma''' - 3z'''\xi' - 3z''\xi'' - z'\xi''')\,\delta t. \end{aligned}$$

Opierając się na tych wzorach, otrzymujemy:

$$\delta ds^2 = 2\,(x'\varphi' + y'\psi' + z'\sigma')\,du^2\,\delta t.$$

Skoro zaś waryacya ta ma być równą zeru, mamy równanie, którego lewą stronę nazwiemy dla skrócenia przez L:

$$L = x'\varphi' + y'\psi' + z'\sigma' = 0. \tag{1}$$

Ażeby obliczyć waryacye uważanych kątów, tworzymy najprzód na podstawie przytoczonych wzorów przyrosty:

$$\begin{aligned} \delta a &= (y'\sigma'' - y''\sigma' + z''\psi' - z'\psi'' - 3\xi' a)\,\delta t, \\ \delta b &= (z'\varphi'' - z''\varphi' + x''\sigma' - x'\sigma'' - 3\xi' b)\,\delta t, \\ \delta c &= (x'\psi'' - x''\psi' + y''\varphi' - y'\varphi'' - 3\xi' c)\,\delta t, \end{aligned}$$

$$\delta\alpha = (z'''\psi'' - z''\psi''' + y''\sigma''' - y'''\sigma'' - 5\alpha\xi' - \mathfrak{a}\xi'' + a\xi''')\,\delta t,$$
$$\delta\beta = (x'''\sigma'' - x''\sigma''' + z''\varphi''' - z'''\varphi'' - 5\beta\xi' - \mathfrak{b}\xi'' + b\xi''')\,\delta t,$$
$$\delta\gamma = (y'''\varphi'' - y''\psi''' + x''\psi''' - x'''\psi'' - 5\gamma\xi' - \mathfrak{c}\xi'' + c\xi''')\,\delta t.$$

gdzie:

$$\mathfrak{a} = y'z''' - z'y''', \quad \mathfrak{b} = z'x''' - x'z''', \quad \mathfrak{c} = x'y''' - y'x'''.$$

Zamiast obliczać wprost $\delta(d\omega)$, łatwiej wziąć $\delta(ds^4 d\omega^2)$, zamiast czego można napisać na mocy wyprowadzonego warunku $ds^4\delta(d\omega^2)$ i mamy:

$$ds^4\delta(d\omega^2) = 2du^6\delta t\,\{a(y'\sigma'' - y''\sigma' + z''\psi' - z'\psi'') + b(z'\varphi'' - z''\varphi' + x''\sigma' - x'\sigma'') + c(x'\psi'' - x''\psi' + y''\varphi' - y'\varphi'')\}.$$

stąd wynika jako drugi warunek dla określenia φ, ψ, σ równanie następujące:

$$a(y'\sigma'' - y''\sigma' + z''\psi' - z'\psi'') + b(z'\varphi'' - z''\varphi' + x''\sigma' - x'\sigma'') + c(x'\psi'' - x''\psi' + y''\varphi' - y'\varphi'') = 0.$$

Podstawiając w tem równaniu wartości na a, b, c i jeszcze wprowadzając oznaczenie:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = H,$$

skąd:

$$2(x'x'' + y'y'' + z'z'') = H',$$

możemy równanie poprzednie doprowadzić do postaci:

$$2H(x''\varphi'' + y''\psi'' + z''\sigma'') + 2L(x''^2 + y''^2 + z''^2) - H'L' = 0.$$

Ponieważ na mocy pierwszego warunku $L=0$ i $L'=0$, otrzymujemy warunek:

(2) $$x''\varphi'' + y''\psi'' + z''\sigma'' = 0,$$

którego lewą stronę nazwiemy krótko M.

Zwrócimy się teraz do waryacyi kąta θ. Zamiast równania $\delta(d\theta)=0$, możemy wziąć równanie:

$$d\omega^2 ds^3\delta(d\theta) = (\alpha\varphi' + \beta\psi' + \gamma\sigma' - \mathfrak{a}\varphi'' - \mathfrak{b}\psi'' - \mathfrak{c}\sigma'' + a\varphi''' + b\psi''' + c\sigma''')\,du^6\delta t = 0.$$

Stąd otrzymujemy warunek:

$$\alpha\varphi' + \beta\psi' + \gamma\sigma' - \mathfrak{a}\varphi'' - \mathfrak{b}\psi'' - \mathfrak{c}\sigma'' + a\varphi''' + b\psi''' + c\sigma''' = 0.$$

Pokażemy, że warunek ten można zastąpić prostszym:

(3) $$N = x'''\varphi''' + y'''\psi''' + z'''\sigma''' = 0.$$

W tym celu postaramy się tak określić spółczynniki $A, B, C \ldots$, niezależne od φ, ψ i σ, ażeby było:

$$AN + BM' + CM + DL'' + EL' + FL = \alpha\varphi' + \beta\psi' + \gamma\sigma' - \mathfrak{a}\varphi'' - \mathfrak{b}\psi'' - \mathfrak{c}\sigma'' + a\varphi''' + b\psi''' + c\sigma'''.$$

Podstawiwszy w to równanie wartości na $N, M', M \ldots$, porządkujemy stronę lewą według pochodnych $\varphi', \psi', \sigma', \varphi'' \ldots\ldots$; stąd otrzymujemy równania, określające spółczynniki $A, B, C \ldots$:

$$\alpha = Dx''' + Ex'' + Fx', \qquad a = Ax''' + Bx'' + Dx',$$
$$\beta = Dy''' + Ey'' + Fy', \qquad b = Ay''' + By'' + Dy',$$
$$\gamma = Dz''' + Ez'' + Fz', \qquad c = Az''' + Bz'' + Dz',$$
$$-\mathfrak{a} = Bx''' + (C+2D)x'' + Ex',$$
$$-\mathfrak{b} = By''' + (C+2D)y'' + Ey',$$
$$-\mathfrak{c} = Bz''' + (C+2D)z'' + Ez',$$

Równań tych jest 9, niewiadomych zaś 6, lecz równania te nie są od siebie niezależne i nie są ze sobą sprzeczne; wynikają z nich następujące wartości na niewiadome:

$$A = \frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta}, \quad B = -\frac{a\mathfrak{a}+b\mathfrak{b}+c\mathfrak{c}}{\Delta}, \quad D = \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\Delta},$$

$$C = \frac{\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2-2(\mathfrak{a}\alpha+\mathfrak{b}\beta+\mathfrak{c}\gamma)}{\Delta}, \quad E = -\frac{\mathfrak{a}\alpha+\mathfrak{b}\beta+\mathfrak{c}\gamma}{\Delta}, \quad F = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\Delta},$$

gdzie

$$\Delta = \begin{vmatrix} x', & x'', & x''' \\ y', & y'', & y''' \\ z', & z'', & z''' \end{vmatrix}.$$

Ponieważ tedy, pomijając przypadki wyjątkowe [1]), spółczynnik A jest różny od zera i od nieskończoności, więc istotnie nasz poprzedni warunek można zastąpić warunkiem (3).

Dla określenia zatem funkcyj φ, ψ, σ mamy trzy równania różniczkowe:

$$x'\varphi' + y'\psi' + z'\sigma' = 0,$$
$$x''\varphi'' + y''\psi'' + z''\sigma'' = 0,$$
$$x'''\varphi''' + y'''\psi''' + z'''\sigma''' = 0.$$

Z pierwszego z tych równań otrzymujemy na σ wartość:

$$\sigma' = -\frac{x'}{z'}\varphi' - \frac{y'}{z'}\psi'.$$

Stąd przez różniczkowanie wynika:

$$\sigma'' = -\frac{x'}{z'}\varphi'' - \frac{y'}{z'}\psi'' - \frac{b}{z'^2}\cdot\varphi' + \frac{a}{z'^2}\cdot\psi',$$

$$\sigma''' = -\frac{x'}{z'}\varphi''' - \frac{y'}{z'}\psi''' - \frac{2b}{z'^2}\varphi'' + \frac{2a}{z'^2}\psi'' - \frac{\mathfrak{b}z' - 2bz''}{z'^3}\varphi' + \frac{\mathfrak{a}z' - 2az''}{z'^3}\psi'.$$

Jeżeli wartości te podstawimy w równanie drugie i trzecie z naszych równań, to będziemy mieli:

$$z'(b\varphi'' - a\psi'') - z''(b\varphi' - a\psi') = 0,$$
$$(4)\qquad z'^2(\mathfrak{b}\varphi''' - \mathfrak{a}\psi''') - 2z'z'''(b\varphi'' - a\psi'') - z'''(\mathfrak{b}z' - 2bz'')\varphi'$$
$$+ z'''(\mathfrak{a}z' - 2az'')\psi' = 0.$$

Postaramy się określić warunek, któremu czyni zadość funkcya $r = \frac{\psi'}{\varphi'}$; mamy:

$$(5)\qquad \psi' = r\varphi', \quad \psi'' = r'\varphi' + r'\varphi'', \quad \psi''' = r''\varphi' + 2r'\varphi'' + r\varphi''',$$

Podstawiając te wartości w równania (2), otrzymujemy:

$$z'(b - ar)\varphi'' - \{az'r' - z''(b - ar)\}\varphi' = 0,$$
$$(6)\qquad z'^2(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}r)\varphi''' - 2z'\{\mathfrak{a}z'r' + z'''(b - ar)\}\varphi'' - \{z'(z'\mathfrak{a}r'' - 2az'''r')$$
$$+ z'z'''(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}r) - 2z''z'''(b - ar)\}\omega' = 0.$$

[1]) Spółczynnik A równa się zeru lub nieskończoności wtedy, gdy kąt $d\omega$ równa się zeru, lub kąt $d\Theta$ równa się zeru.

Ponieważ:

$$\frac{\varphi'''}{\varphi'} = \frac{d}{du}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right) + \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2,$$

więc z pomiędzy tych dwóch równań możemy wyrugować niewiadomą φ. Gdy to wykonamy, otrzymamy równanie różniczkowe drugiego rzędu względem r:

$$z'(b - ar)r'' + 2az'r'^2 - \{z'(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}r) - 2z''(b - ar)\}r' = 0.$$

Można sprawdzić, że równaniu temu czyni zadość rozwiązanie:

$$r = \frac{\nu x' - \lambda z'}{\mu z' - \nu y'},$$

gdzie λ, μ, ν są stałe dowolne. Stąd wynika, że mamy następujące wartości:

$$(7)\qquad \varphi' = \varrho(\mu z' - \nu y'), \quad \psi' = \varrho(\nu x' - \lambda z'), \quad \sigma' = \varrho(\lambda y' - \mu x'),$$

gdzie ϱ jest funkcyą parametru u. Ale mamy:

$$x''\varphi'' + y''\psi'' + z''\sigma'' = 0.$$

Jeżeli otrzymane wartości wstawimy w to równanie, to będzie:

$$\varrho'(a\lambda + b\mu + c\nu) = 0.$$

Pomijając tedy przypadki wyjątkowe, usunięte z rozważania, otrzymujemy:

$$\varrho' = 0,$$

t. j. że ϱ jest wielkością stałą i widoczna, że bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć:

$$\varrho = 1.$$

Całkując zatem równanie (7), otrzymujemy:

$$\varphi = l + \mu z - \nu y, \quad \psi = m + \nu x - \lambda z, \quad \sigma = n + \lambda y - \mu x,$$

t. j. grupę ruchów euklidesowych.

Rozumując tak samo, jak w końcu poprzedniego ustępu, odrazu dojdziemy do znanego wniosku, że wielkości $\frac{d\omega}{ds}$ i $\frac{d\theta}{ds}$, t. j. pierwsza i druga krzywizna krzywych przestrzennych są niezmiennikami różniczkowemi grupy ruchów euklidesowych.

III. Powierzchnie.

Równania powierzchni napiszemy w kształcie:

$$x = x(u, v) \quad y = (u, v), \quad z = z(u, v).$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia:

$$E = x^2_{10} + y^2_{10} + z^2_{10}, \qquad S = \frac{Ax_{20} + By_{20} + Cz_{20}}{2\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$F = x_{10}x_{01} + y_{10}y_{01} + z_{10}z_{01}, \qquad T = \frac{Ax_{11} + By_{11} + Cz_{11}}{2\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$G = x^2_{01} + y^2_{01} + z^2_{01}, \qquad U = \frac{Ax_{02} + By_{02} + Cz_{02}}{2\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

gdzie A, B, C mają wartości:

$$A = y_{10}z_{01} - y_{01}z_{10}, \quad B = z_{10}x_{01} - z_{01}x_{10}, \quad C = x_{10}y_{01} - x_{01}y_{10},$$

a dla oznaczenia pochodnych użyliśmy skrócenia:

$$\frac{\partial^{i+k}\,\Phi(u, v)}{\partial u^i\,\partial v^k} = \Phi_{ik},$$

to formy kwadratowe:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$
$$d^2\varepsilon = Sdu^2 + 2\,Tdudv + Udv^2,$$

oznaczać będą kwadrat odległości punktów u, v i $u + du$, $v + dv$ na powierzchni i odległość punktu $u + du$, $v + dv$ od płaszczyzny stycznej w punkcie u, v. Załóżmy, że powierzchnię poddajemy takiemu przekształceniu:

$$Wf = \varphi(x, y, z)\,\frac{\partial f}{\partial x} + \psi(x, y, z)\,\frac{\partial f}{\partial y} + \sigma(x, y, z)\,\frac{\partial f}{\partial z},$$

przy którem owe odległości pozostają bez zmiany. Chodzić będzie o to, ażeby wyznaczyć najogólniejsze przekształcenie Wf, czyniące zadość tym warunkom.

Jeżeli w jakikolwiek sposób zmieniamy parametry u, v, to powierzchnia nie zmienia ani swego kształtu, ani położenia w przestrzeni, przyjmiemy zatem:

$$\delta u = \xi(u, v)\,\delta t, \quad dv = \eta(u, v)\,\delta t,$$

gdzie ξ i η są funkcye dowolne. Z warunków:

$$\delta(ds^2) = 0, \quad \delta(d^2\varepsilon) = 0,$$

przyrównywając do zera spółczynniki przy jednych i tych samych potęgach różniczek du, dv otrzymujemy:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \delta E &= -2(E\xi_{10} + F\eta_{10})\,\delta t, \\ \delta F &= -\{E\xi_{01} + F(\xi_{10} + \eta_{01}) + G\eta_{10}\}\,\delta t, \\ \delta G &= -2(F\xi_{01} + G\eta_{01})\,\delta t; \end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \delta S &= -2(S\xi_{10} + T\eta_{10})\,\delta t, \\ \delta T &= -\{S\xi_{01} + T(\xi_{10} + \eta_{01}) + U\eta_{10}\}\,\delta t, \\ \delta U &= -(2\,T\xi_{01} + U\eta_{01})\,\delta t. \end{aligned}\right.$$

Zupełnie tak samo, jak poprzednio, zastosujemy wzory na waryacye pochodnych spółrzędnych x, y, z. Łatwo wyprowadzić wzory następujące:

$$\delta x_{10} = (\varphi_{10} - x_{10}\xi_{10} - x_{01}\eta_{10})\,\delta t, \quad \delta x_{01} = (\varphi_{01} - x_{10}\xi_{01} - x_{01}\eta_{01})\,\delta t,$$
$$\delta y_{10} = (\psi_{10} - y_{10}\xi_{10} - y_{01}\eta_{10})\,\delta t, \quad \delta y_{01} = (\psi_{01} - y_{10}\xi_{01} - y_{01}\eta_{01})\,\delta t,$$
$$\delta z_{10} = (\sigma_{10} - z_{10}\xi_{10} - z_{01}\eta_{10})\,\delta t, \quad \delta z_{01} = (\sigma_{01} - z_{10}\xi_{01} - z_{01}\eta_{01})\,\delta t,$$
$$\delta x_{20} = \{\varphi_{20} - 2(x_{20}\xi_{10} + x_{11}\eta_{10}) - (x_{10}\xi_{20} + x_{01}\eta_{20})\}\,\delta t,$$
$$\delta y_{20} = \{\psi_{20} - 2(y_{20}\xi_{10} + y_{11}\eta_{10}) - (y_{10}\xi_{20} + x_{01}\eta_{20})\}\,\delta t,$$
$$\delta z_{20} = \{\sigma_{20} - 2(z_{20}\xi_{10} + z_{11}\eta_{10}) - (z_{10}z_{20} + z_{01}\eta_{20})\}\,\delta t,$$
$$\delta x_{11} = \{\varphi_{11} - (x_{20}\xi_{01} + x_{02}\eta_{10}) - (x_{11}\xi_{10} + x_{11}\eta_{01}) - (x_{10}\xi_{11} + x_{01}\eta_{11})\}\,\delta t,$$
$$\delta y_{11} = \{\psi_{11} - (y_{20}\xi_{01} + y_{02}\eta_{10}) - (y_{11}\xi_{10} + y_{11}\eta_{01}) - (y_{10}\xi_{11} + y_{01}\eta_{11})\}\,\delta t,$$
$$\delta z_{11} = \{\sigma_{11} - (z_{20}\xi_{01} + z_{02}\eta_{10}) - (z_{11}\xi_{10} + z_{11}\eta_{01}) - (z_{10}\xi_{11} + z_{01}\eta_{11})\}\,\delta t,$$
$$\delta x_{02} = \{\varphi_{02} - 2(x_{11}\xi_{01} + x_{02}\eta_{01}) - (x_{10}\xi_{02} + x_{01}\eta_{02})\}\,\delta t,$$
$$\delta y_{02} = \{\psi_{02} - 2(y_{11}\xi_{01} + y_{02}\eta_{01}) - (y_{10}\xi_{02} + y_{01}\eta_{02})\}\,\delta t,$$
$$\delta z_{02} = \{\sigma_{02} - 2(z_{11}\xi_{01} + z_{02}\eta_{01}) - (z_{10}\xi_{02} + z_{01}\eta_{02})\}\,\delta t,$$

Jeżeli zważymy, jakie wartości mają E, F, G i wyrażenia te podstawimy w warunki (8), to otrzymamy równania następujące:

$$\begin{gathered} x_{10}\varphi_{10}+y_{10}\psi_{10}+z_{10}\sigma_{10} = 0, \qquad x_{01}\varphi_{01}+y_{01}\psi_{01}+z_{01}\sigma_{01} = 0, \\ x_{10}\varphi_{01}+y_{10}\psi_{01}+z_{10}\sigma_{01}+x_{01}\varphi_{10}+y_{01}\psi_{10}+z_{01}\sigma_{10} = 0; \end{gathered} \tag{10}$$

są to te same warunki, które służą za podstawę teoryi nieskończenie małego gięcia powierzchni [1]).

O wiele bardziej skomplikowanym jest wywód warunków, wynikających ze wzorów (9). Jeżeli mianowicie zważymy naprzód, że:

$$\begin{aligned} \delta A &= \{y_{10}\sigma_{01}-y_{01}\sigma_{10}+z_{01}\psi_{10}-z_{10}\psi_{01}-A(\xi_{10}+\eta_{01})\}\ \delta t, \\ \delta B &= \{z_{10}\varphi_{01}-z_{01}\varphi_{10}+x_{01}\sigma_{10}-x_{10}\sigma_{01}-B(\xi_{10}+\eta_{01})\}\ \delta t, \\ \delta C &= \{x_{10}\psi_{01}-x_{01}\psi_{10}+y_{01}\varphi_{10}-y_{10}\varphi_{01}-C(\xi_{10}+\eta_{01})\}\ \delta t, \end{aligned}$$

oraz że mamy tożsamościowo:

$$Ax_{10}+By_{10}+Cz_{10}=0, \quad Ax_{01}+By_{01}+Cz_{01}=0,$$

to otrzymamy równania:

$$\begin{gathered} (A^2+B^2+C^2)(A\varphi_{20}+B\psi_{20}+C\sigma_{20}) \\ +(A\varphi_{01}+B\psi_{01}+C\sigma_{01})\{x_{20}(Cy_{10}-Bz_{10})+y_{20}(Az_{10}-Cx_{10})+z_{20}(Bx_{10}-Ay_{10})\} \\ -(A\varphi_{10}+B\psi_{10}+C\sigma_{10})\{x_{20}(Cy_{01}-Bz_{01})+y_{20}(Az_{01}-Cx_{01})+z_{20}(Bx_{01}-Ay_{01})\}=0; \\ (A^2+B^2+C^2)(A\varphi_{11}+E\psi_{11}+C\sigma_{11})+ \\ +(A\varphi_{01}+B\psi_{01}+C\sigma_{01})\{x_{11}(Cy_{10}-Bz_{10})+y_{11}(Az_{10}-Cx_{10})+z_{11}(Bx_{10}-Ay_{10})\} \\ -(A\varphi_{10}+B\psi_{10}+C\sigma_{10})\{x_{11}(Cy_{01}-Bz_{01})+y_{11}(Az_{01}-Cx_{01})+z_{11}(Bx_{01}-Ay_{01})\}=0. \\ (A^2+B^2+C^2)(A\varphi_{20}+B\psi_{20}+C\sigma_{20}) \\ +(A\varphi_{01}+B\psi_{01}+C\sigma_{01})\{x_{02}(Cy_{10}-Bz_{10})+z_{02}(Az_{10}-Cx_{10})+z_{02}(Bx_{10}-Ay_{10})\} \\ -(A\varphi_{10}+B\psi_{10}+C\sigma_{10})\{x_{02}(Cy_{01}-Bz_{01})+y_{02}(Az_{01}-Cx_{01})+z_{02}(Bx_{01}-Ay_{01})\}=0. \end{gathered} \tag{11}$$

Łatwo okazać, że równaniom (10) uczynić można zadość w sposób najogólniejszy, biorąc:

[1]) Zob. G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces. 4-me partie, Chapitre I.

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \mu z_{10}-\nu y_{10}, & \varphi_{01} &= \mu z_{01}-\nu y_{01}, \\ \psi_{10} &= \nu x_{10}-\lambda z_{10}, & \psi_{01} &= \nu x_{01}-\lambda z_{01}, \\ \sigma_{10} &= \lambda y_{10}-\mu x_{10}, & \sigma_{01} &= \lambda y_{01}-\mu x_{01}, \end{aligned} \tag{12}$$

gdzie λ, μ i ν są funkcye dowolne zmiennych u, v. Ażeby jednak wartości (12) dawały istotnie rozwiązanie naszego zadania, muszą one spełniać jeszcze dwa warunki. Najprzód funkcye λ, μ, ν muszą być takie, aby różniczkowanie względem ν pierwszej kolumny wzorów (12) dało ten sam rezultat, co różniczkowanie drugiej kolumny tych wzorów względem μ, t. j. musi być:

$$\begin{aligned} \mu_{01}z_{10}-\mu_{10}z_{01} &= \nu_{01}y_{10}-\nu_{10}y_{01}, \\ \nu_{01}x_{10}-\nu_{10}x_{01} &= \lambda_{01}z_{10}-\lambda_{10}z_{01} \\ \lambda_{01}y_{10}-\lambda_{10}y_{01} &= \mu_{01}x_{10}-\mu_{10}x_{01}, \end{aligned} \tag{13}$$

Następnie muszą być spełnione równania (11). Jeżeli utworzymy pochodne:

$$\begin{aligned} \varphi_{20} &= \mu_{10}z_{10}+\mu z_{20}-\nu_{10}y_{10}-\nu y_{20}, & \varphi_{02} &= \mu_{01}z_{01}+\mu z_{02}-\nu_{01}y_{01}-\nu y_{02}, \\ \psi_{20} &= \nu_{10}x_{10}+\nu x_{20}-\lambda_{10}z_{10}-\lambda z_{20}, & \psi_{02} &= \nu_{01}x_{01}+\nu x_{02}-\lambda_{01}z_{0}-\lambda z_{02}, \\ \sigma_{20} &= \lambda_{10}y_{10}+\lambda y_{20}-\mu_{10}x_{10}-\mu x_{20}, & \sigma_{02} &= \lambda_{01}y_{01}+\lambda y_{02}-\mu_{01}x_{01}-\mu x_{02}, \end{aligned}$$

i wartości te podstawimy w pierwsze i trzecie z równań (11), to po wykonaniu skróceń otrzymamy:

$$\begin{aligned} \lambda_{10}(Cy_{10}-Bz_{10})+\mu_{10}(Az_{10}-Cx_{10})+\nu_{10}(Bx_{10}-Ay_{10}) &= 0, \\ \lambda_{01}(Cy_{01}-Bz_{01})+\mu_{01}(Az_{01}-Cx_{01})+\nu_{01}(Bx_{01}-Ay_{01}) &= 0, \end{aligned}$$

Z drugiego równania możemy tym sposobem otrzymać jedno z dwóch równań

$$\begin{aligned} \lambda_{10}(Cy_{01}-Bz_{01})+\mu_{10}(Az_{01}-Cx_{01})+\nu_{10}(Bx_{01}-Ay_{01}) &= 0, \\ \lambda_{01}(Cy_{10}-Bz_{10})+\mu_{01}(Az_{10}-Cx_{10})+\nu_{01}(Bx_{10}-Ay_{10}) &= 0. \end{aligned}$$

zależnie od tego, czy φ_{11}, ψ_{11}, σ_{11} obliczać będziemy przez różniczkowanie pierwszej, czy też drugiej kolumny ze wzorów (12). Pomnóżmy równania

(12) odpowiednio przez x_{10}, y_{10}, z_{10} i dodajmy do siebie, to po wykonaniu skróceń otrzymamy:

$$A\lambda_{10} + B\mu_{10} + C\nu_{10} = 0.$$

Podobnież mnożąc te równania przez x_{01}, y_{01}, z_{01} i dodając do siebie, otrzymujemy:

$$A\lambda_{01} + B\mu_{01} + C\nu_{01} = 0.$$

Uważajmy teraz układ rowmań:

$$\begin{aligned} A\lambda_{10} + B\mu_{10} + C\nu_{10} &= 0, \\ (Cy_{10} - Bz_{10})\lambda_{10} + (Az_{10} - Cx_{10})\mu_{10} + (Bx_{01} - Ay_{10})\nu_{10} &= 0, \\ (Cy_{01} - Bz_{01})\lambda_{10} + (Az_{01} - Cx_{01})\mu_{10} + (Bx_{01} - Ay_{01})\nu_{10} &= 0; \end{aligned}$$

mamy tu trzy równania liniowe jednorodne z trzema niewiadomemi λ_{10}, μ_{10}, ν_{10}. Wyznacznik tych równań jest:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C, \\ Cy_{10} - Bz_{10}, & Az_{10} - Cx_{10}, & Bx_{10} - Ay_{10} \\ Cy_{01} - Bz_{01}, & Az_{01} - Cx_{01}, & Bx_{01} - Ay_{01} \end{vmatrix}$$

który, jak łatwo sprawdzić, równa się:

$$(A^2 + B^2 + C^2)^2.$$

Pomijając zatem przypadki wyjątkowe, wyznacznik ten jest odmienny od zera, otrzymujemy więc:

$$\lambda_{10} = 0, \quad \mu_{10} = 0, \quad \nu_{10} = 0.$$

Zupełnie taksamo możemy wykazać, że

$$\lambda_{01} = 0, \quad \mu_{01} = 0, \quad \nu_{01} = 0.$$

Dochodzimy tedy do rezultatu, że λ, μ, ν są wielkościami stałemi i otrzymujemy na φ, ψ, σ wyrażenia:

$$\varphi = l + \mu z - \nu y, \quad \psi = m + \nu x - \lambda z, \quad \sigma = n + \lambda y - \mu x,$$

gdzie l, m, n są także wielkości stałe, t. j. otrzymujemy nieskończenie małe przekształcenie grupy ruchów euklidesowych.

Wykazaliśmy tedy, że warunkom naszym, t. j. niezmienności elementów liniowych na powierzchni i niezmienności odległości punktów powierzchni od płaszczyzn stycznych w punktach sąsiednich czyni zadość tylko grupa ruchów euklidesowych. Pokażemy jeszcze, że z niezmienności naszych form różniczkowych wprost wynikają niezmienniki grupy ruchów euklidesowych najniższego rzędu, t. j. promienie krzywizny przecięć normalnych głównych. Na mocy wzorów (8) i (9) możemy napisać warunek, któremu mają czynić zadość te niezmienniki różniczkowe w postaci równania:

$$\begin{aligned} &2(E\xi_{10} + F\eta_{10})\frac{\partial f}{\partial E} + \left\{E\xi_{01} + F(\xi_{10} + \eta_{01}) + G\eta_{10}\right\}\frac{\partial f}{\partial F} \\ &+ 2(F\xi_{10} + G\eta_{01})\frac{\partial f}{\partial G} + 2(S\xi_{10} + T\eta_{10})\frac{\partial f}{\partial S} + \left\{S\xi_{01} + T(\xi_{10} + \eta_{01}) + U\eta_{10}\right\}\frac{\partial f}{\partial T} \\ &+ 2(T\xi_{01} + U\eta_{01})\frac{\partial f}{\partial U} = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ jednak funkcye ξ i η są dowolne, zatem spółczynniki przy ich pochodnych muszą być równe zeru i otrzymujemy układ:

$$\begin{aligned} 2E\frac{\partial f}{\partial E} + F\frac{\partial f}{\partial F} + 2S\frac{\partial f}{\partial S} + T\frac{\partial f}{\partial T} &= 0, \\ E\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial G} + S\frac{\partial f}{\partial T} + 2T\frac{\partial f}{\partial U} &= 0, \\ F\frac{\partial f}{\partial F} + 2G\frac{\partial f}{\partial G} + T\frac{\partial f}{\partial T} + 2U\frac{\partial f}{\partial U} &= 0, \\ 2F\frac{\partial f}{\partial E} + G\frac{\partial f}{\partial F} + 2T\frac{\partial f}{\partial S} + U\frac{\partial f}{\partial T} &= 0. \end{aligned}$$

Układ ten posiada dwa od siebie niezależne rozwiązania, które, jak łatwo sprawdzić przez różniczkowanie, są:

$$\frac{SU - T^2}{EG - F^2}, \quad \frac{UE + SG - 2FT}{EG - F^2}.$$

Wyrażenia te są odpowiednio równe:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

gdzie ϱ_1, ϱ_2 są promienie krzywizn przecięć normalnych głównych.

Odwzorowania, nie zmieniające pól powierzchni,

JAKO PRZYKŁAD

DO TEORYI NIEZMIENNIKÓW RÓŻNICZKOWYCH.[1]

PODAŁ

E. WIERZBICKI.

Grupa odwzorowań, nie zmieniających pól powierzchni, posiada nieskończenie małe przekształcenie, którego symbolem, otrzymanym z warunku

$$\delta\,(H\,du\,dv) = 0,$$

jest:

$$\Omega f = \xi \frac{\partial f}{\partial u} + \eta \frac{\partial f}{\partial v} - H \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v}\right) \frac{\partial f}{\partial H},$$

gdzie u i v są spółrzędne krzywoliniowe na powierzchni, ξ i η dowolne funkcye zmiennych u i v, a H funkcya tychże zmiennych w wyrażeniu elementu pola:

$$d\sigma = H\,du\,dv, \text{ t. j. } H = \sqrt{EG - F^2}.$$

Zamiast H wprowadzimy jako zmienną zależną:

$$\omega\,(u, v) = \log H\,(u, v),$$

---

[1]) Z seminaryum matematycznego prof. K. Żorawskiego w Krakowie.