UWAGI O RÓWNANIU GAUSSA W TEORYI FUNKCYI GAMMA.

PODAŁ

M. LERCH,

profesor uniwersytetu we Fryburgu, w Szwajcaryi

W pismach Akademii czeskiej, król. czeskiego Towarzystwa nauk, a niedawno w pracy, przedstawionej na czwartym zjeździe katolików we Fryburgu [1]) wykazałem, że teorya funkcyi przestępnej

$$R(w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s}, \tag{1}$$

obejmuje w sobie liczne wzory, znane z teoryi funkcyi gamma. Szereg (1) jest zbieżny tylko dla wartości s, których część rzeczywista jest większa od jedności, lecz funkcya, którą ten szereg określa, istnieje w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej s, w której ma tylko jeden punkt osobliwy, a mianowicie biegun stopnia pierwszego $s=1$, tak, że różnica

$$R(w, s) - \frac{1}{s-1}$$

jest funkcyą całkowitą.

[1]) Sur quelques propriétés d'une transcendante uniforme.

Związek tej funkcyi przestępnej z funkcyą gamma polega na dwóch rozwinięciach według potęg ilości s i $s-1$; są one:

$$(2) \qquad R(w,s) = \left(\frac{1}{2} - w\right) + \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}\, s + a_2 s^2 + \ldots\,,$$

$$(3) \qquad R(w,s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} + A_1(s-1) + A_2(s-1)^2 + \ldots\,.$$

Chcemy dowieść, że te dwa wyniki, które tak łatwo zapamiętać, zastępują znane wzory z teoryi funkcyj gamma, otrzymane wprawdzie dawno na drodze elementarnej, lecz obciążające pamięć.

W tym celu znajdźmy wartość sumy

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} R\left(\frac{w+\alpha}{m},\, s\right).$$

Jeżeli część rzeczywista ilości s jest większa od jedności, to można stosować szereg (1) i będzie:

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} R\left(\frac{w+\alpha}{m},\, s\right) = \sum_{\alpha}\sum_{n} \frac{1}{\left(\frac{w+\alpha}{m} + n\right)^s} = \sum_{\alpha,\, n} \frac{m^s}{(w+\alpha+mn)^s}$$

Liczba $\alpha + mn = k$ $(\alpha = 0, 1 \ldots\ldots m-1;\ n = 0, 1, 2 \ldots\ldots \infty)$ przyjmuje jednoznacznie wszystkie wartości całkowite; a ponieważ szereg, na zasadzie założenia, jest bezwzględnie zbieżny, to wartość strony drugiej będzie:

$$m^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(w+k)^s},$$

tak że mamy równanie:

$$(4) \qquad \sum_{\alpha=0}^{m-1} R\left(\frac{w+\alpha}{m},\, s\right) = m^s R(w,s)\,.$$

Równania tego nie trzeba pamiętać, ponieważ rachunek tylko co podany jest bardzo prosty: należy tylko wiedzieć, że równanie (4) jest ważnem

dla każdej wartości s, dla której funkcya $R(w,s)$ zostaje jednoznaczną, t. j. dla każdego s.

Z szeregu (1) wypływa

$$\underset{s=0}{D}\, R(w,s) = \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}\,; \quad R(w,0) = \frac{1}{2} - w\,.$$

Różniczkując równanie (4) według s i kładąc w wyniku $s = 0$, otrzymujemy na podstawie ostatniego wzoru

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} \log \frac{\Gamma\left(\frac{w+\alpha}{m}\right)}{\sqrt{2\pi}} = \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} + \left(\frac{1}{2} - w\right) \log m,$$

a przechodząc od logarytmów do liczb, znajdziemy znany wzór Gaussa:

$$(5) \qquad \Gamma\left(\frac{w}{m}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{w+1}{m}\right) \ldots\ldots \Gamma\left(\frac{w+m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\, m^{\frac{1}{2}-w}\, \Gamma(w)\,.$$

2. Naodwrót, przy pomocy wzoru Gaussa możemy udowodnić niektóre twierdzenia tu należące, co pokazać chcę na przykładzie następującym. Postaram się utworzyć funkcyę zmiennej rzeczywistej i dodatniej w, za pomocą wzoru:

$$F(w) = \lim_{\varrho=0} \left(-\frac{1}{\varrho} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^{1+\varrho}}\right);$$

kładąc tu $\frac{w+\alpha}{m}$ za w i sumując wartości, otrzymane przy $\alpha = 0, 1, 2 \ldots m-1$, znajdziemy:

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} F\left(\frac{w+\alpha}{m}\right) = \lim_{\varrho=0} \left(-\frac{m}{\varrho} + \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{w+\alpha}{m} + n\right)^{1+\varrho}}\right),$$

lub według (4):

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} F\left(\frac{w+\alpha}{m}\right) = \lim_{\varrho=0} \left(-\frac{m}{\varrho} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{1+\varrho}}{(w+k)^{1+\varrho}}\right),$$

A ponieważ

$$m^{1+\varrho} = m + \varrho \log m + (\varrho^2)\,,$$

gdzie (ϱ^2) oznacza szereg postaci $c_0\,\varrho^2 + c_1\,\varrho^3 + \ldots$, będzie według założenia:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(w+k)} = \frac{1}{\varrho} + F(w) + (\varrho),$$

gdzie $\lim\limits_{\varrho=0} (\varrho) = 0$, tak, że:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^{1+\varrho}}{(w+k)^{1+\varrho}} = \frac{m + \varrho m \log m}{\varrho} + m\,F(w) + (\varrho),$$

gdzie znów (ϱ) oznacza ilość, która staje się nieskończenie małą wraz z ϱ. Tym sposobem mamy rezultat:

$$\sum_{0}^{m-1} F\left(\frac{w+a}{m}\right) = \lim_{\varrho=0}\left(-\frac{m}{\varrho} + \frac{m+\varrho m \log m}{\varrho} + m\,F(w)\right),$$
$$= \log m + m\,F(w),$$

co nam daje własność funkcyi $F(w)$:

(a) $$\sum_{0}^{m-1} F\left(\frac{w+a}{m}\right) = m \log m + m\,F(w).$$

Z tożsamości

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^{1+\varrho}} = \frac{1}{w^{1+\varrho}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n+1)^{1+\varrho}}$$

wynika wzór

$$\lim_{\varrho=0}\left(-\frac{1}{\varrho} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(w+n)^{1+\varrho}}\right) = \frac{1}{w} + \lim_{\varrho=0}\left(-\frac{1}{\varrho} + \sum \frac{1}{(w+n+1)^{1+\varrho}}\right),$$

lub

(b) $$F(w) = \frac{1}{w} + F(w+1)$$

Z tego równania wypływa, że funkcya

$$\varphi(w) = F(w) + \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}$$

czyni zadość równaniu

$$\varphi(w) = \varphi(w+1).$$

Funkcya ta jest skończona w całym przedziale $(1 \ldots 2)$, gdyż są tam skończonemi funkcye $F(w)$ i $\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}$; funkcya przeto $\varphi(w)$ jest wszędzie skończona.

Z wzoru Gaussa (5), biorąc pochodne logarytmowe obu stron, znajdujemy:

$$\sum_{a=0}^{m-1} \frac{\Gamma'\left(\frac{w+a}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{w+a}{m}\right)} = -m \log m + m\,\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)},$$

a dodając do tego (a):

$$\sum_{a=0}^{m-1} \varphi\left(\frac{w+a}{m}\right) = m\,\varphi(w).$$

Równanie to ma spełniać się dla wszystkich wartości całkowitych dodatnich liczby m, przyczem $\varphi(w)$ jest funkcyą przy wszystkich rzeczywistych wartościach ilości w skończoną i ciągłą; kładąc:

$$\varphi(w) = \sum_{0}^{\infty} A_\nu \cos 2\nu w\pi + \sum_{1}^{\infty} B_\nu \sin 2\nu w\pi,$$

będziemy mieli:

$$\sum_{x=0}^{m-1} \varphi\left(\frac{w+a}{m}\right) = m\,A_0 + \sum_{1}^{\infty} m\,A_{m\nu} \cos 2\nu w\pi + \sum_{1}^{\infty} m\,B_{m\nu} \sin 2\nu w\pi,$$

ponieważ sumy

$$\sum_{a=0}^{m-1} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ \frac{2\nu\pi}{m}(w+a),$$

wtedy tylko mogą być od zera różne, jeżeli ν jest wielokrotnością liczby m.

Ostatni szereg tedy równa się szeregowi $m\,\varphi(w)$, skąd wynika:

$$m\,A_0 + \sum_1^\infty m\,A_{m\nu}\cos 2\,\nu\,w\,\pi + \sum_1^\infty m\,B_{m\nu}\sin 2\,\nu\,w\,\pi$$

$$= m\,A_0 + m\sum_1^\infty A_\nu\cos 2\,\nu\,w\,\pi + \sum_1^\infty m\,B_\nu\sin 2\,\nu\,w\,\pi\,,$$

a porównywając spółczynniki znajdujemy:

$$A_{m\nu} = A_\nu\,,\quad B_{m\nu} = B_\nu\,,$$

t. j. dla $\nu = 1$:

$$A_m = A_1\,,\quad B_m = B_1\,.$$

Szereg trygonometryczny z takiemi spółczynnikami byłby wszakże rozbieżny, co nie będzie tylko miało miejsca w przypadku $A_1 = B_1 = 0$, gdy tedy funkcya $\varphi(w)$ redukuje się do jednego wyrazu A_0. Tym sposobem dowiedliśmy wzoru postaci:

$$F(w) = A - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}\,,$$

gdzie A oznacza liczbę stałą. To otrzymawszy, poszukajmy wartości całki

$$\int_1^2 F(w)\,dw = I\,;$$

będzie:

$$I = \lim_{\varrho=0}\left(-\frac{1}{\varrho} + \int_1^2 dw\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(w+n)^{1+\varrho}}\right),$$

a ponieważ

$$\int_1^2 dw\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(w+n)^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho}\sum_{n=0}^\infty\left[\frac{1}{(n+1)^\varrho} - \frac{1}{(n+2)^\varrho}\right],$$

$$= \frac{1}{\varrho}\,,$$

przeto $I = 0$.

Z równań

$$\int_1^2 F(w)\,dw = 0\,,\qquad \int_1^2 \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}\,dw = 0$$

wypływa $A = 0$; dowiedliśmy tedy, że:

$$\lim_{\varrho=0}\left(-\frac{1}{\varrho} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(w+n)^{1+\varrho}}\right) = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}\,.$$

3. Okażemy wreszcie, że równanie (2) prowadzi prostym sposobem do całki Raabego (w założeniu oczywiście, że nie użyliśmy jej poprzednio do dowodzenia tego wzoru). Istotnie z równania

$$\int_a^{a+1} dw\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(w+n)^s} = \frac{1}{s-1}\sum_{n=0}^\infty\left[\frac{1}{(a+n)^{s-1}} - \frac{1}{(a+n+1)^{s-1}}\right]$$

wynika:

$$\int_a^{a+1} R(w,s)\,dw = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{a^{s-1}}\,.$$

Różniczkujmy względem s i połóżmy $s = 0$, to uwzględniając wzór (2) otrzymamy:

$$\int_a^{a+1} \log\frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}\,dw = a\log a - a\,,$$

a stąd:

$$\int_a^{a+1} \log\Gamma(w)\,dw = a\log a - a + \log\sqrt{2\pi}\,.$$