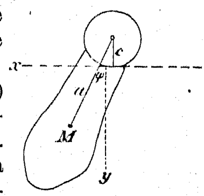
O PEWNEM ZAGADNIENIU EULERA O WAHADLE.

NAPISAŁ

A. DENIZOT.

1. W rocznikach „Nova Acta Academiae Petropolianae“ [tomus VI, 1788, p. 145) zajmuje się L. Euler rozwiązaniem zagadnienia: „De motu oscillatorio penduli circa axem cylindricum plano horizontali incumbentem“, które ma stanowić niejako uogólnienie zagadnienia o zwykłem wahadle. Różnica pomiędzy obydwoma zagadnieniami polega na tem, że, gdy przy zwykłem wahadle ciało ciężkie jest zawieszone na osi poziomej, którą sobie jako matematyczną prostą wyobrażamy, to w powyższem zagadnieniu ciało jest złączone z walcem, którego końce, przez dwie części płaszczyzny poziomej podtrzymywane, wzdłuż tejże (bez tarcia) posuwać się mogą. Równanie różniczkowe, określające to zagadnienie, prowadzi do całki, którą Euler, przypuszczając tylko małe amplitudy, w sposób przybliżony rozwiązuje. Zagadnienie powyższe znajduje się także w znakomitym zbiorze zadań Julliena (Problèmes de mécanique rationnelle, 1855 II p. 63), ale i tam tamy: „cette intégrale ne peut s'obtenir sous forme finie“.

Praca niniejsza wykaże, że całkę tę można rozwiązać w formie skończonej, t.j. wyrazić ją przez funkcye znane; wprawdzie przez to rzędne jako funkcye czasu explicite jeszcze nie są wyrażone.



2. Bierzemy pod uwagę (zob. Jullien, l. c.) przekrój w pionowym kierunku przez środek bezwładności całego układu poprowadzony i niechaj będzie (zob. figurę) c promień walca, a odległość osi jego od środka bezwładności (M), m masa ciała, k ramię bezwładności względem osi, położonej przez M równolegle do osi walca; φ kąt, który a z osią y tworzy; x, y spółrzędne środka bezwładności (M).

Z zasady zachowania energii otrzymujemy bezpośrednio równanie różniczkowe naszego zadania:

$$\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}+\frac{m}{2}k^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=mgy+\text{const},$$

gdzie $\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}$ wyobraża energię kinetyczną ruchu postępowego, $\frac{m}{2}k^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ energię kinetyczną ruchu wahadłowego, $mgy+\text{const}$ [1]—energię potencyalną układu.

Ponieważ przy ruchu walec odwija się wzdłuż wspomnianych płaszczyzn, wprowadzamy przeto do powyższego równania:

$$x=a\sin\varphi-c\varphi,\quad y=a\cos\varphi-c$$

i otrzymujemy:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left\{a^2-2ac\cos\varphi+c^2+k^2\right\}=2g\,(a\cos\varphi-c)+b,$$

gdzie b jest stałą, której wartość znajdujemy, stosując równanie ostatnie do chwili początkowej. W chwili, w której prędkość kątowa $\frac{d\varphi}{dt}=0$, wartością początkową kąta φ ma być α, a stąd wynika:

$$b=2g\,(c-a\cos\alpha)$$

i jako równanie różniczkowe zagadnienia otrzymujemy:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\left\{k^2+a^2+c^2-2ac\cos\varphi\right\}=2ga\,(\cos\varphi-\cos\alpha),$$

które rozwiązując, znajdujemy:

$$t=\int\frac{(k^2+a^2+c^2-2ac\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2ga}\,(\cos\varphi-\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}\,d\varphi.$$

W celu rozwiązania tej całki piszemy:

---

[1]) Euler rozumie przez g, co tu przyspieszenie ziemi oznacza, wartość $2g$ (... ubi g est altitudo lapsus gravium uno minuto secundo), l. c. pag. 147.

$$\cos\varphi=1-2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right);\quad\cos\alpha=1-2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

i otrzymujemy:

$$t=\frac{1}{\sqrt{ga}}\int\frac{\left\{k^2+(a-c)^2+4ac\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}\,\frac{d\varphi}{2}.$$

Wprowadzając $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).\sin\psi$, i dla krótkości pisząc: $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\varkappa$, $\frac{k^2+(a-c)^2}{4ac}=p^2$, możemy powyższą całkę wyrazić w postaci:

(1)
$$t=2\sqrt{\frac{c}{g}}\int\frac{(p^2+\varkappa^2\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}}{(1-\varkappa^2\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}}\,d\psi,$$

lub

$$t=2p\sqrt{\frac{c}{g}}\int\frac{\left(1+\frac{\varkappa^2}{p^2}\sin^2\psi\right)d\psi}{\sqrt{\left(1-\varkappa^2\sin^2\psi\right)\left(1+\frac{\varkappa^2}{p^2}\sin^2\psi\right)}}.$$

Jeżeli w tem wyrażeniu założymy $c=0$, otrzymamy:

$$t=\sqrt{\frac{k^2+a^2}{ag}}\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}},$$

t. j. wyrażenie dla zwykłego złożonego wahadła, gdzie $\frac{k^2+a^2}{a}$ oznacza odległość środka wahań od osi zawieszenia.

3. Jeżelibyśmy, w celu rozwiązania całki (1), chcieli postąpić tak, jak to czynimy przy zagadnieniu o zwykłem wahadle, a więc wyrazili ψ przez $\operatorname{am} u$, a zatem $\sin\psi$ przez $\sin\operatorname{am} u=\operatorname{sn} u$, otrzymalibyśmy pod znakiem całki:

$$\sqrt{1+\frac{\varkappa^2}{p^2}\operatorname{sn}^2 u}=f(u);$$

dla wartości u, dla których $\operatorname{sn} u=\pm\frac{p}{\varkappa}i$, a zatem $f(u)=0$, funkcya $f(u)$

przestaje być jednowartościową i przekonywamy się, że na tej drodze zagadnienia rozwiązać nie możemy.

Natomiast dochodzimy do rozwiązania całki powyższej, jeżeli wprowadzimy zamiast ψ nową zmienną z, określoną założeniem:

$$\sin^2\psi = z;$$

skąd przez różniczkowanie wynika:

$$2\sin\psi\cos\psi\, d\psi = dz,$$

$$d\psi = \frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)}}:$$

a zatem całka (1) przekształca się na wyrażenie:

(2) $$t = p\sqrt{\frac{c}{g}}\int\frac{\left(1+\frac{\varkappa^2}{p^2}z\right)dz}{\sqrt{R(z)}},$$

gdzie

$$R(z) = (1-\varkappa^2 z)(1-z)\,z\left(1+\frac{\varkappa^2}{p^2}z\right).$$

4. $R(z)=0$ jest względem z równaniem, mającem cztery następujące pierwiastki:

$$\frac{1}{\varkappa^2} > 1 > 0 > -\frac{p^2}{\varkappa^2}.$$

Aby sprowadzić powyższą całkę do znanych postaci typowych, przekształcamy ją, podstawiając:

(3) $$z = \frac{r+su}{1+u},$$

gdzie u jest nową zmienną, a r i s są stałe, które poniżej w sposób nam dogodny bliżej określimy. Najprzód otrzymujemy:

$$R(z) = \frac{1}{(1+u)^2}\sqrt{R(u)}.$$

$R(u)$ składa się z czterech ilorazów, z których obydwa środkowe i obydwa zewnętrzne oddzielnie obliczymy i określimy stałe r i s tak, aby spółczynniki przy u znikły; otrzymujemy w ten sposób na r i s następujące dwa równania:

$$r+s+2\frac{\varkappa^2}{p^2}ps = 0,$$

$$2-(1+\varkappa^2((r+s)+2\varkappa^2 rs = 0,$$

z których wynika:

$$r+s = \frac{2}{1+\varkappa^2+p^2},$$

$$rs = \frac{-p^2}{\varkappa^2(1+\varkappa^2+p^2)};$$

i dalej:

$$s-r = \frac{2\sqrt{(1+p^2)(\varkappa^2+p^2)}}{\varkappa(1+\varkappa^2+p^2)},$$

przyczem uważamy pierwiastnik jako dodatni. Z równań tych otrzymujemy:

(4) $$s = \frac{\varkappa+\sqrt{(1+p^2)(\varkappa^2+p^2)}}{\varkappa(1+\varkappa^2+p^2)},$$

$$r = \frac{\varkappa-\sqrt{(1+p^2)(\varkappa^2+p^2)}}{\varkappa(1+\varkappa^2+p^2)};$$

równocześnie przekonywamy się, że r i s są wielkościami rzeczywistemi, czego też sam sposób przekształcenia wymaga.

5. Wprowadzając za pomocą wzoru (3) zmienną u do całki (1), otrzymujemy ją w postaci:

(5) $$t = M\int\frac{(Au+B)\,du}{(1+u)\sqrt{(1-\lambda^2u^2)(1-\mu^2u^2)}},$$

gdzie dla krótkości wprowadziliśmy oznaczenia:

$$A = 1+\frac{\varkappa^2}{p^2}s,$$

$$B = 1+\frac{\varkappa^2}{p^2}r,$$

(6) $$M = p\sqrt{\frac{c}{g}}\frac{(s-r)}{\sqrt{(1-\varkappa^2 r)(1-r)\,r\left(1+\frac{\varkappa^2}{p^2}r\right)}}.$$

6. Równanie $R(z)=0$ ma tylko pierwiastki rzeczywiste, a w takim razie, jak wiadomo z teoryi przekształcenia całek eliptycznych, λ^2 i μ^2 są wielkości rzeczywiste i dodatnie, co też z wyrażeń dla tychże bezpośrednio wynika. Pisząc dla krótkości:

$$\sqrt{(1+p^2)(\varkappa^2+p^2)} = P$$

i wprowadzając r i s, określone przez wzór (3), mamy:

$$\lambda^2 = \frac{(1-s)\left(\frac{1}{\varkappa^2}-s\right)}{(r-1)\left(\frac{1}{\varkappa^2}-r\right)} = \frac{\left[P+\varkappa(\varkappa^2+p^2)\right]\left[1+p^2+\varkappa P\right]}{\left[P-\varkappa(\varkappa^2+p^2)\right]\left[1+p^2-\varkappa P\right]} \quad (>1),$$

$$\mu^2 = \frac{s\left(\frac{p^2}{\varkappa^2}+s\right)}{r\left(\frac{p^2}{\varkappa^2}+r\right)} = \frac{(P-\varkappa)^2}{(P+\varkappa)^2} \quad (<1).$$

Jeżeli przypuścimy, że w równaniu $R(z)=0$, pierwiastki $z=\frac{1}{\varkappa^2}$ i $-\frac{p^2}{\varkappa^2}$ są urojone, upadnie zarazem założenie, że $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\varkappa$ jest wielkością rzeczywistą; wtenczas nie mamy już więcej czystego ruchu wahadłowego. Przypadek ten z niniejszego rozważania wykluczamy i ograniczamy się tylko do ruchu wahadłowego.

7. Powracamy do rozwiązania całki (5). W tym celu wprowadzamy funkcye eliptyczne i zakładamy;

$$u = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{sn}\, v \text{ z modułem } \frac{\mu}{\lambda} = \nu,$$

który, jak z powyższego rozumowania wynika, jest wielkością rzeczywistą, mniejszą od 1. Natenczas mamy:

$$du = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{cn}\, v\,.\,\mathrm{dn}\, v\,.\,dv\,,\quad R(u) = \mathrm{cn}\, v\,.\,\mathrm{dn}\, v\,,$$

a przyjmując, że dla $v=0$ jest $t=t_0$, znajdujemy dla całki (5):

$$t-t_0 = M\lambda\int_0^v \frac{\frac{A}{\lambda}\,\mathrm{sn}\, v + B}{(\lambda+\mathrm{sn}\, v)}\,dv\,,$$

czyli

$$t-t_0 = M\lambda\int_0^v \frac{\frac{A}{\lambda}(\lambda+\mathrm{sn}\, v)+(B-A)}{(\lambda+\mathrm{sn}\, v)}\,dv\,.$$

$$= M\lambda\int_0^v\left\{\frac{A}{\lambda}+(B-A)\frac{1}{\lambda+\mathrm{sn}\, v}\right\}dv\,.$$

8. Mamy przeto następujące typy całek:

$$\int_0^v dv = v\,;$$ t. j. całkę eliptyczną pierwszego gatunku.

9. Potem mamy do obliczenia całkę:

$$\int_0^v \frac{dv}{\lambda+\mathrm{sn}\, v}\,.$$

Jestto całka eliptyczna trzeciego gatunku; aby ją sprowadzić do gatunku typowej

$$\int_0^v \frac{dv}{\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2} = I_3(v)\,,$$

kładziemy $\lambda = \mathrm{sn}\,\alpha$ i mnożąc licznik i mianownik przez $\mathrm{sn}\,\alpha - \mathrm{sn}\, v$, otrzymujemy:

$$\int_0^v \frac{dv}{\lambda+\mathrm{sn}\, v} = -\lambda\int_0^v \frac{dv}{\mathrm{sn}^2 v-\mathrm{sn}^2\alpha} - \int_0^v \frac{\mathrm{sn}\, v\, dv}{\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2 v} = -\lambda I_3(v) - S,$$

gdzie:

$$S = \int_0^v \frac{\mathrm{sn}\, v\, dv}{\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2 v}$$

Wprowadzając do tejże całki $\mathrm{sn}^2 v = y$, przyczem pozostawiamy moduł ν, znajdujemy:

$$\int\frac{\mathrm{sn}\, v\, dv}{\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2 v} = m\int\frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{m}{\sqrt{a^2-k^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-k+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{a^2-k^2}}\,,$$

gdzie

$$x=\frac{2\mu^2 y-(\lambda^2+\mu^2)}{2\mu^2},\quad m=-\frac{\lambda}{2\mu},\quad k=\frac{2\mu^2\lambda^2-(\lambda^2+\mu^2)}{2\mu^2},\quad a=\frac{\lambda^2-\mu^2}{2\mu^2},$$

i (ponieważ $a^2-k^2=(a+k)(a-k)$) warunek $|k|<|a|$ winien być zachowany, o czem się istotnie przekonywamy: porównywając wyrażenia na k i a ze sobą, znajdujemy, że ów warunek przybiera postać: $\mu^2<1$, co już wyżej wykazaliśmy.

Wprowadzając wyrażenia na x, m, k do wzoru (3), otrzymujemy:

$$S=\int_0^v\frac{\operatorname{sn} v\,dv}{\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2 v}=-\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu}\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{\mu(y-\lambda^2)+\sqrt{(\mu^2 y-\lambda^2)(y-1)}}{\lambda\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}}\right|_0^y.$$

10. Dla całki eliptycznej $I_3(v)$ posługujemy się wyrażeniem [1]) zawierającem funkcye Jacobi'ego:

$$I_3(v)=-\left(\nu^2\operatorname{sn}^2\beta+\frac{\nu^2\operatorname{sn}^2\beta}{\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta}\right)v-\frac{1}{2}\frac{\nu^2\operatorname{sn}^2\beta}{\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta}\log\frac{\theta(v-\beta)}{\theta(v+\beta)},$$

przyczem $\beta=\alpha-K'i$, gdzie α jest określone równaniem $\operatorname{sn}\alpha=\lambda$.

11. Teraz całka równania rozpatrywanego zagadnienia jest zupełnie zbadana. Jako wynik naszego rozumowania otrzymujemy:

$$t-t_0=M\lambda\left\{\frac{A}{\lambda}v+(B-A)\left(-\lambda I_3(v)-S\right)\right\},$$

lub wprowadzając wyrażenia powyżej przytoczone na S, $I_3(v)$, A, B:

$$\begin{aligned}t-t_0=M\Bigg\{&\left[1+\frac{\varkappa^2}{p^2}s-\frac{\lambda^2\varkappa^2}{p^2}(s-r)\left(\nu^2\operatorname{sn}^2\beta+\frac{\nu^2\operatorname{sn}^2\beta}{\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta}\right)\right]v\\&-\frac{\lambda^2}{2}\frac{\varkappa^2}{p^2}(s-r)\frac{\nu^2\operatorname{sn}^2\beta}{\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta}\log\frac{\theta(v-\beta)}{\theta(v+\beta)}\\&-\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\mu}\frac{\aleph^2}{p^2}(s-r)\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{\mu(y-\lambda^2)+\sqrt{(\mu^2y-\lambda^2)(y-1)}}{\lambda\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}}\right|_0^y\Bigg\};\end{aligned}$$

przyczem r, s, M są określone przez wzór (4) i (6).

12. Wykazaliśmy niniejszem, że całkę, która w zagadnieniu przez Euler'a postawionem przedstawia czas, możemy wyrazić w skończonej formie; rozumując, posługiwaliśmy się funkcyami eliptycznemi, których teorya— winniśmy tu dodać: za czasów Eulera była dopiero w zaraniu rozwinięcia.

[1]) Z wykładów prof. L. Fuchsa (Berlin 1894/5).

13. Powyższe rozwiązanie zawiera zarazem wpływ postaci walcowej osi zawieszenia na czas wachnięcia, którem to zagadnieniem się pierwszy Bessel (Untersuchungen über die Länge des einfachen Secundenpendels, 1826), a później Helmert (Beiträge zur Theorie des Reversionspendels, 1898), zajmował, obydwaj zaniedbując w odnośnem badaniu wpływu pewnych małych wielkości i posługując się metodą rozwinięcia na szeregi. O ile w niniejszej rozprawie dane rozwiązanie w praktycznych przypadkach zastosowanem być może, tego na razie nie rozpatrujemy.

Charlottenburg, w październiku 1901 r.