stąd, na zasadzie wzoru (4), § 18, otrzymujemy:

$$t = -p_1 - \frac{1}{2}\left[\frac{d \log \pi_1 \frac{u}{2}}{d \frac{u}{2}} + \frac{d \log \pi_2 \frac{u}{2}}{d \frac{u}{2}} + \frac{d \log \pi_3 \frac{u}{2}}{d \frac{u}{2}}\right], \quad (u=u_0),$$

lub:

$$t = -p_1 - \frac{1}{2} \frac{d \log \pi_1 \frac{u}{2}\, \pi_2 \frac{u}{2}\, \pi_3 \frac{u}{2}}{d \frac{u}{2}}, \quad (u = u_0).$$

Lecz z drugiej strony, mamy tożsamość:

$$\wp' u = -2 \pi_1 u\, \pi_2 u\, \pi_3 u,$$

a zatem:

$$t = -p_1 - \frac{1}{2} \frac{d \log \wp' \frac{u}{2}}{d \frac{u}{2}}, \quad (u = u_0),$$

albo ostatecznie:

$$t = -p_1 - \frac{1}{2} \frac{\wp'' \frac{u_0}{2}}{\wp' \frac{u_0}{2}}. \tag{4}$$

W takiej postaci Halphen podał rozwiązanie równania stopnia czwartego [1]); jednak forma taka nie daje się do bliższego roztrząsania szczegółów.

[1]) Porównaj: Halphen. Traité des fonctions elliptiques. T. I, p. 121.

J. RAJEWSKI,

O SZEREGACH I ILOCZYNACH WARUNKOWO ZBIEŻNYCH.

W pracy niniejszej pragnę wyjaśnić następującą własność szeregów i iloczynów warunkowo zbieżnych:

Wartości, jakie przyjmuje szereg warunkowo zbieżny przy stosowaniu wszystkich porządków sumowania wyrazów szeregu, albo też iloczyn warunkowo zbieżny przy stosowaniu wszystkich porządków mnożenia czynników iloczynu, nie mogą tworzyć obszaru ciągłego (continuum), lecz tylko mnogość nieskończoną wartości wszędzie gęstą (pantachię).

Pracę podzieliłem na trzy części. W części pierwszej zajmuję się szeregami warunkowo zbieżnemi; w drugiej iloczynami warunkowo zbieżnemi; w części trzeciej podaję kilka przykładów takich szeregów i iloczynów warunkowo zbieżnych, w których wszystkie wartości, zależne od porządku sumowania w szeregu i odpowiednio mnożenia w iloczynie, mogą być przedstawione jedną formą. W ten sposób dostajemy przegląd tych wartości, które szereg albo iloczyn warunkowo zbieżny przyjąć może, i tych wartości, których przyjąć nie może.

I.

1. Szeregi warunkowo zbieżne o wyrazach rzeczywistych. Niech w szeregu:

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{1}$$

o wyrazach rzeczywistych, wyrazy te spełniają warunek:

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0$$

i niechaj będą naprzemian dodatnie i ujemne, przyczem wyrazy dodatnie

$$(2) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

i wyrazy ujemne:

$$(3) \qquad b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

tworzą szeregi rozbieżne; wtedy szereg (1) nazywa się warunkowo zbieżnym.

Suma szeregu warunkowo zbieżnego zależy od porządku sumowania wyrazów. Można wybrać taki porządek sumowania wyrazów, że szereg będzie miał wartość nieskończenie wielką; można także wybrać taki porządek sumowania wyrazów szeregu, że szereg dowolnie mało różnić się będzie od dowolnie wybranej skończonej liczby rzeczywistej c.

Chodzi teraz o to, czy można wybrać taki porządek sumowania wyrazów szeregu, żeby suma szeregu była równa wybranej liczbie c.

Aby tę rzecz rozstrzygnąć, przyjmujemy, że wybrana liczba c jest liczbą dodatnią, i stawiamy sobie zadanie: zsumować wyrazy szeregu (1) w takim porządku, aby dostać

$$s = c\,.$$

W tym celu utwórzmy [1]) najprzód z wyrazów początkowych szeregu (2) sumę $A_{1\,m_1}$ taką, aby było:

$$A_{1\,m_1} > c\,,$$

a z wyrazów początkowych szeregu (3) sumę $B_{1\,n_1}$ taką, aby było:

$$B_{1\,n_1} < c\,,$$

wtedy dostaniemy:

$$A_{1\,m_1} - B_{1\,n_1} < c\,,$$

a więc także:

[1]) J. Puzyna. Teorya funkcyj analitycznych. Lwów 1898. T. I, str. 28.

$$s_1 = A_{1\,m_1} - B_{1\,n_1} = c - c' = c_1$$

przyczem $c > c'$.

Utwórzmy następnie z dalszych wyrazów szeregu (2) sumę

$$A_{m_1+1,\,m_2} > c'\,,$$

a z dalszych wyrazów szeregu (3) sumę

$$B_{n_1+1,\,n_2} < c'\,,$$

to dostaniemy:

$$A_{m_1+1,\,m_2} - B_{n_1+1,\,n_2} < c'$$

i

$$A_{m_1+1,\,m_2} - B_{n_1+1,\,n_2} = c' - c''$$

przyczem: $c' > c''$.

A skutkiem tego dostaniemy także:

$$s_2 = (A_{1\,m_1} - B_{1\,n_1}) + (A_{m_1+1,\,m_2} - B_{n_1+1,\,n_2}) = c - c' + c' - c'' = c - c'' = c_2\,.$$

Postępując tak samo dalej, dojdziemy do następujących związków:

$$A_{m_{\lambda-1}+1,\,m_\lambda} - B_{n_{\lambda-1}+1,\,n_\lambda} = c^{(\lambda-1)} - c^{(\lambda)}\,,$$

przyczem:

$$A_{m_{\lambda-1}+1,\,m_\lambda} > c^{(\lambda-1)} > c^{(\lambda)}\,, \quad B_{n_{\lambda-1}+1,\,n_\lambda} < c^{(\lambda-1)}$$

i

$$s_\lambda = (A_{1\,m_1} - B_{1\,n_1}) + (A_{m_1+1,\,m_2} - B_{n_1+1,\,n_2}) + \ldots + (A_{m_{\lambda-1}+1,\,m_\lambda} - B_{n_{\lambda-1}+1,\,n_\lambda})$$
$$= c - c^{(\lambda)} = c_\lambda\,.$$

Liczby $c, c', c'' \ldots c^{(\lambda)}$ spełniają nierówność:

$$c > c' > c'' > \ldots > c^{(\lambda)}\,,$$

a ponieważ wyrazy a_λ i b_λ z wzrostem skaźnika λ maleją, spełniając warunki:

$$\lim_{\lambda=\infty} a_\lambda = 0\,, \quad \lim_{\lambda=\infty} b_\lambda = 0\,,$$

przeto także i $c^{(\lambda)}$ możemy uczynić dowolnie małem.

Przyjmując, że c jest ujemne, musielibyśmy zacząć sumowanie od wyrazów ujemnych.

Mamy zatem:

$$s_\lambda = c - c^{(\lambda)}, \quad \lim_{\lambda=\infty} c^{(\lambda)} = 0 .$$

Uwzględniając to możemy napisać:

(4) $$| s - c | = | \lim_{\lambda=\infty} s_\lambda - c | < \delta ,$$

przyczem δ oznacza liczbę dodatnią dowolnie małą.

Zapytajmy teraz, czy można osiągnąć

(5) $$s = c .$$

Aby na to odpowiedzieć, zauważmy, że wartości

(6) $$c_1, c_2, \ldots, c_\lambda$$

sum częściowych $s_1, s_2 \ldots s_\lambda$ tworzą mnogość nieskończoną miejsc określonych z miejscem skupienia c. Miejsce skupienia mnogości miejsc może do tej mnogości należeć, ale może także do niej nie należeć. A jeżeli miejsce skupienia c mnogości (6) nie należy do tej mnogości, to chociaż spełni się nierówność (4), równanie (5) żadną miarą spełnić się nie może. A ponieważ nierówność (4) spełnić się może dla każdej dowolnie wybranej stałej c, przeto w dowolnie małem otoczeniu każdego miejsca c, jako miejsca skupienia mnogości (6), znajdują się także miejsca, należące do tej mnogości, dla których się spełnia także równanie (5).

A więc mamy następujące twierdzenie: Wszystkie wartości, jakie szereg warunkowo zbieżny o wyrazach rzeczywistych przez zastosowanie wszystkich porządków sumowania wyrazów osiąga, tworzą mnogość nieskończoną wszędzie gęstą (pantachię). A więc nie tworzą obszaru ciągłego (continuum).

Nie można więc mówić, że szereg warunkowo zbieżny w uporządkowaniach, dających zbieżność, może przedstawiać każdą dowolną wartość skończoną, albowiem obok tych wartości, które szereg rzeczywiście przedstawiać może, pozostaje jeszcze nierównie więcej takich wartości, których szereg żadną miarą przedstawiać nie może.

2. Szeregi warunkowo zbieżne o wyrazach zespolonych. W szeregu warunkowo zbieżnym:

(7) $$s = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i) + \ldots$$

o wyrazach zespolonych, nie może ani szereg części rzeczywistych

(8) $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

ani szereg części urojonych

(9) $$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

być szeregiem rozbieżnym, gdyż wtedy i szereg (7) byłby szeregiem rozbieżnym. Także oba te szeregi nie mogą być równocześnie bezwarunkowo zbieżne, albowiem w tym przypadku szereg (7) byłby także bezwarunkowo zbieżny. A więc jeden z szeregów (8) i (9) musi być szeregiem warunkowo zbieżnym, a drugi może być warunkowo lub też bezwarunkowo zbieżnym.

Przyjmijmy naprzód, że oba szeregi (8) i (9) są warunkowo zbieżne. Wtedy szereg (8) części rzeczywistych wyrazów szeregu (7), przy zastosowaniu wszystkich porządków sumowania, daje mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, rozmieszczoną na linii rzeczywistej, zaś szereg (9) części urojonych wyrazów szeregu (7), przy zastosowaniu wszystkich porządków sumowania, daje mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, rozmieszczoną na linii urojonej.

Rozdzielmy wyrazy szeregu (7) na części rzeczywiste i części urojone i do nowego w ten sposób powstałego szeregu zastosujmy wszystkie porządki sumowania. Wtedy na wartości tego szeregu dostaniemy dwukrotnie nieskończoną mnogość miejsc wszędzie gęstą, rozmieszczoną na całej płaszczyźnie liczbowej. Nie zajęta przez te miejsca część płaszczyzny utworzy obszar zwarty, ograniczony temi miejscami.

Przyjmijmy teraz, że wyrazy szeregu (7) pozostają zespolone, a więc, że części rzeczywistych wyrazów tego szeregu nie możemy oddzielać od części urojonych. Wtedy, przy zastosowaniu wszystkich porządków sumowania, dostaniemy na wartości szeregu jednokrotnie nieskończoną mnogość miejsc, rozmieszczoną na płaszczyźnie liczbowej, o tej własności, że rzuty tych miejsc, na linię rzeczywistą i na linię urojoną utworzą mnogości wszędzie gęste. Sama ta mnogość jest również wszędzie gęstą.

Łatwo ocenimy, że jeżeli w szeregu (7) szereg części rzeczywistych wyrazów (albo szereg części urojonych) jest bezwarunkowo zbieżny o wartości c (albo ci), a drugi szereg jest warunkowo zbieżny, wtedy wartości szeregu (7) przy zastosowaniu wszystkich porządków sumowania, utworzą mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, rozmieszczoną na linii równoległej do linii urojonej (albo rzeczywistej) w odległości c od tej linii.

Jako wynik ostateczny możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie: Wartości, jakie szereg warunkowo zbieżny o wyrazach rzeczywistych lub zespolonych przy zastosowaniu wszystkich porządków sumowania przyjmuje, tworzą jednokrotnie nieskończoną mnogość wszędzie gęstą, i tylko w przypadku, gdy szereg pojmujemy jak sumę wyrazów rzeczywistych i urojonych, a szeregi wyrazów rzeczywistych i wyrazów urojonych są oba warunkowo zbieżne, wartości szeregu, przy zastosowaniu wszystkich porządków sumowania, tworzą dwukrotnie nieskończoną mnogość wszędzie gęstą.

2.

1. Iloczyny warunkowo zbieżne o czynnikach rzeczywistych. W iloczynie nieskończonym

(1) $$P = \prod_{\lambda=1}^{\infty}(1 + u_\lambda)$$

o czynnikach rzeczywistych, niech wyrazy u_λ spełniają warunek:

(2) $$\lim_{\lambda=\infty} u_\lambda = 0 .$$

Niech dalej wyrazy te będą naprzemian dodatnie i ujemne, przyczem iloczyn

(3) $$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)\ldots$$

czynników o dodatnich $u_\lambda = a_\lambda$ niech będzie rozbieżny do nieskończoności, a iloczyn

(4) $$(1 - b_1)(1 - b_2)(1 - b_3)\ldots$$

czynników o ujemnych $u_\lambda = -b_\lambda$ niech będzie rozbieżny do zera; wtedy iloczyn (1) nazywa się warunkowo zbieżnym.

Czynniki początkowe w iloczynie (4) mogą być ujemne, liczba takich czynników jest skończona, albowiem, wobec warunku (2), czynniki te, począwszy od pewnego skończonego λ, muszą być już dodatnie. Możemy więc, nie zmniejszając ogólności, przyjąć, że w iloczynie (1) wszystkie czynniki są dodatnie.

Wartość iloczynu warunkowo zbieżnego jest zależna od porządku mnożenia czynników, i udowadnia się w podobny sposób jak dla szeregów warunkowo zbieżnych, że w iloczynie warunkowo zbieżnym o dodatnich czynnikach można wybrać taki porządek mnożenia czynników, że wartość tego

iloczynu dowolnie mało będzie się różniła od dowolnie wybranej liczby dodatniej c, tak że dla każdej wartości tej liczby można doprowadzić do związku:

(5) $$| P - c | = | \lim_{\lambda=\infty} P_\lambda - c | < \delta ,$$

przyczem δ oznacza liczbę dowolnie małą dodatnią.

Na podstawie zaś podobnego rozumowania, jak dla szeregów warunkowo zbieżnych, możemy się przekonać, że związek:

(6) $$P = c$$

nie dla wszystkich wartości stałej c osiągnąć się daje.

A więc mamy twierdzenie:

Wartości, jakie iloczyn warunkowo zbieżny o czynnikach rzeczywistych i dodatnich, przy zastosowaniu wszystkich porządków mnożenia, przyjmuje, tworzą mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, rozmieszczoną na dodatniej części linii rzeczywistej.

2. Iloczyny warunkowo zbieżne o czynnikach zespolonych. Niech iloczyn zespolony:

(7) $$P = \prod_{\lambda=0}^{\infty}(1 + u_\lambda) = \prod_{\lambda=0}^{\infty}(1 + a_\lambda + ib_\lambda)$$

posiada własność:

(8) $$\lim_{\lambda=\infty} u_\lambda = \lim_{\lambda=\infty}(a_\lambda + ib_\lambda) = 0 .$$

Wartość bezwzględna tego iloczynu jest:

(9) $$| P | = \prod_{\lambda=0}^{\infty} | 1 + a_\lambda + ib_\lambda | = \prod_{\lambda=0}^{\infty} \varrho_\lambda$$

przyczem:

$$\varrho_\lambda = \sqrt{(1 + a_\lambda)^2 + b_\lambda^2} .$$

Przedstawmy czynnik ogólny iloczynu (7) w następującej postaci:

(10) $$1 + a_\lambda + ib_\lambda = \varrho_\lambda(\cos\varphi_\lambda + i\sin\varphi_\lambda) = \varrho_\lambda e^{i\varphi_\lambda}$$

przyczem;

$$\varrho_\lambda = \sqrt{(1+a_\lambda)^2 + b_\lambda^2},$$

(11)
$$\cos\varphi_\lambda = \frac{1+a_\lambda}{\varrho_\lambda}, \quad \sin\varphi_\lambda = \frac{b_\lambda}{\varrho_\lambda}.$$

Wtedy iloczyn (7) przyjmie następującą postać;

(12)
$$P = \prod_{\lambda=0}^{\infty} \varrho_\lambda \, e^{i\varphi_\lambda}.$$

Pomnóżmy przez siebie osobno czynniki ϱ_λ i osobno czynniki $e^{i\varphi_\lambda}$, to dostaniemy:

(13)
$$P = \prod_{\lambda=0}^{\infty} \varrho_\lambda \,.\, e^{i\sum_{\lambda=0}^{\infty}\varphi_\lambda} = |P| \,.\, e^{i\Sigma\varphi_\lambda}.$$

Wartość bezwzględna czynnika $e^{i\Sigma\varphi_\lambda}$ równa się 1, bez względu na to, czy suma $\Sigma\,\varphi_\lambda$ jest zbieżna, czy rozbieżna. Jeżeli więc iloczyn $|P|$ jest rozbieżny, to tem samem i iloczyn P musi być rozbieżny. Z tego wynika, że jeżeli iloczyn (7) jest warunkowo zbieżny, to iloczyn (9) jest albo bezwarunkowo albo też warunkowo zbieżny.

Co do kątów φ_λ, określonych równaniami (11), to wobec warunku (8), kąty te dla dostatecznie dużego λ spełniają nierówność:

$$\frac{-\pi}{2} < \varphi_\lambda < \frac{\pi}{2},$$

znaki ich są takie same, jak w wyrazach b_λ, a wartości bezwzględne spełniają nierówność:

$$|\sin\varphi_\lambda| < |\varphi_\lambda| < |\operatorname{tg}\varphi_\lambda|$$

czyli:

(14)
$$\frac{|b_\lambda|}{\sqrt{(1+a_\lambda)^2 + b_\lambda^2}} < |\varphi_\lambda| < \frac{|b_\lambda|}{1+a_\lambda}.$$

Z nierówności (14) i równania (8) jest widoczne, że zbieżność szeregu $\Sigma\,\varphi_\lambda$ jest taka sama jak w szeregu $\Sigma\,b_\lambda$, a więc gdy szereg $\Sigma\,b_\lambda$ jest zbieżny, warunkowo zbieżny lub rozbieżny, to szereg $\Sigma\,\varphi_\lambda$ jest również zbieżny, warunkowo zbieżny lub rozbieżny.

Zbadajmy teraz zbieżność iloczynu:

(15)
$$P = |P|\, e^{i\Sigma\varphi_\lambda}.$$

Zbieżność iloczynu $|P|$ jest taka sama, jak iloczynu $|P|^2$, a o zbieżności iloczynu $|P|^2$ rozstrzyga następujące kryteryum [1]):

Iloczyn $|P|^2$ jest zbieżny, gdy szereg

(16)
$$\Sigma\,(\varrho_\lambda^2 - 1) = \Sigma\,(1 + 2a_\lambda + a_\lambda^2 + b_\lambda^2 - 1) = \Sigma\,(2a_\lambda + a_\lambda^2 + b_\lambda^2)$$

jest zbieżny. Rozumie się, że w razie warunkowej zbieżności tego szeregu, także iloczyn $|P|^2$, a tak samo i iloczyn $|P|$, jest warunkowo zbieżny. Wyrazy b_λ są rzeczywiste, a więc wyrazy b_λ^2 są dodatnie. Szereg $\Sigma\,b_\lambda^2$ może być albo bezwarunkowo zbieżny albo rozbieżny.

Niech szereg $\Sigma\,b_\lambda^2$ będzie szeregiem zbieżnym. Wtedy według (16) o zbieżności iloczynu $|P|$ rozstrzyga szereg $\Sigma\,a_\lambda$, niezależnie od tego, czy szereg $\Sigma\,b_\lambda$ jest zbieżny czy rozbieżny. Iloczyn $|P|$ jest zbieżny, warunkowo zbieżny lub rozbieżny, stosownie do tego czy szereg $\Sigma\,a_\lambda$ jest zbieżny, warunkowo zbieżny lub rozbieżny.

Niech teraz szereg $\Sigma\,b_\lambda^2$ będzie rozbieżny.

Wtedy z kryteryum (16) dostaniemy:

a) zbieżność iloczynu $|P|$ w przypadku, gdy

$$a_\lambda = -\frac{1}{2}\,b_\lambda^2, \quad \lambda = 0, 1, 2 \ldots$$

a szereg:

$$\Sigma\,a_\lambda^2 = \frac{1}{4}\,\Sigma\,b_\lambda^4.$$

jest zbieżny;

b) warunkową zbieżność w przypadku, gdy szereg $\Sigma\,a_\lambda$ jest warunkowo zbieżny, albo gdy jest rozbieżny, lecz wyrazy a_λ są ujemne; wreszcie

c) rozbieżność w przypadku, gdy szereg $\Sigma\,a_\lambda$ jest rozbieżny, a wyrazy a_λ są dodatnie.

Jak widzimy zbieżność, warunkowa zbieżność i rozbieżność iloczynu $|P|$, i szeregu $\Sigma\,b_\lambda$, względnie szeregu $\Sigma\,\varphi_\lambda$ mogą w iloczynie P w (12) występować we wszystkich połączeniach. Nas obchodzą tylko te przypadki, w których iloczyn $|P|$ jest bezwarunkowo lub warunkowo zbieżny, a więc w których możemy otrzymać warunkową zbieżność iloczynu P.

Przyjmijmy najprzód, że iloczyn $|P|$ w (12) jest bezwarunkowo zbieżny. Wtedy dostaniemy:

[1]) J. Puzyna l. c., str. 77.

a) Gdy szereg $\Sigma\varphi_\lambda$ jest rozbieżny, wtedy mamy:

$$\Sigma\varphi_\lambda = \infty = \varphi + 2n\pi,$$

przyczem φ spełnia nierówność:

$$0 < \varphi < 2\pi$$

zresztą jest dowolne, a $n = \infty$ całkowite.

Skutkiem tego będzie

$$e^{i\Sigma\varphi_\lambda} = e^{i\varphi + 2n\pi i} = e^{i\varphi},$$

przyczem:

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad \text{zresztą dowolne;}$$

a więc czynnik $e^{i\Sigma\varphi_\lambda} = e^{i\varphi}$ może oznaczać każdą liczbę o wartości bezwzględnej równej 1.

W tym przypadku iloczyn (12) jest nieoznaczony w ten sposób, że jego wartość bezwzględna jest oznaczona i równa $|P|$, zaś charakterystyka $e^{i\varphi}$ jest nieoznaczona. Ten przypadek zachodzi, gdy w iloczynie (7) szereg Σb_λ jest rozbieżny, zaś szereg Σa_λ albo jest zbieżny, albo przynajmniej szereg Σa_λ^2 jest zbieżny, a w rozbieżnym szeregu Σa_λ wyrazy $a_\lambda = -\frac{1}{2} b_\lambda^2$, $\lambda = 0, 1, 2 \ldots$

b) Gdy szereg $\Sigma\varphi_\lambda$ jest warunkowo zbieżny, wtedy wszystkie wartości, jakie ten szereg przy zastosowaniu wszystkich porządków sumowania przyjmuje, tworzą mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, rozmieszczoną na linii rzeczywistej. Wyrażenie $e^{i\Sigma\varphi_\lambda}$ przedstawia dla tych porządków sumowania, dla których wartości szeregu $\Sigma\varphi_\lambda$ są skończone, mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, rozmieszczoną na kole o promieniu równym 1, dla tych zaś porządków sumowania, dla których wartości szeregu $\Sigma\varphi_\lambda$ są nieskończenie wielkie, jest nieoznaczone, i może przedstawiać każdą liczbę o wartości bezwzględnej równej 1.

A więc mamy twierdzenie:

Gdy iloczyn $|P|$ jest zbieżny, a szereg $\Sigma\varphi_\lambda$ jest warunkowo zbieżny, wtedy wartości, jakie iloczyn P przy zastosowaniu wszystkich porządków sumowania przyjmuje, przedstawiają dla porządków, dających skończone wartości szeregu $\Sigma\varphi_\lambda$, mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, rozmieszczoną na kole o promieniu $|P|$ a o środku zero, zaś dla porządków, dających nieskończenie wielkie wartości szeregu $\Sigma\varphi_\lambda$ są nieoznaczone w ten sposób, że wartość bezwzględna iloczynu P jest oznaczona i równa $|P|$, zaś charakterystyka jest nieoznaczona.

Ten przypadek zachodzi, gdy w iloczynie (7) szereg Σa_λ jest bezwarunkowo zbieżny, zaś szereg Σb_λ jest warunkowo zbieżny.

c) Gdy wreszcie szereg $\Sigma\varphi_\lambda$ jest bezwarunkowo zbieżny, to i iloczyn P jest bezwarunkowo zbieżny. W tym przypadku w iloczynie (7) oba szeregi Σa_λ i Σb_λ są bezwarunkowo zbieżne.

Przyjmijmy teraz, że iloczyn $|P|$ w (12) jest warunkowo zbieżny.

Wtedy dostaniemy:

a) Gdy szereg $\Sigma\varphi_\lambda$ jest rozbieżny, to iloczyn P jest nieoznaczony w ten sposób, że wartości bezwzględne $|P|$ tego iloczynu, przy zastosowaniu wszystkich porządków mnożenia, tworzą mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, a charakterystyka dla każdej z tych wartości pozostaje nieoznaczoną.

Ten przypadek zachodzi, gdy w iloczynie (7) szereg Σa_λ jest warunkowo zbieżny, a szereg Σb_λ jest rozbieżny, albo, gdy szereg Σa_λ jest rozbieżny, a wszystkie wyrazy a_λ tego szeregu są ujemne, zaś szeregi Σb_λ i Σb_λ^2 są rozbieżne.

b) Gdy szereg $\Sigma\varphi_\lambda$ jest warunkowo zbieżny, to gdy w (12) do czynników iloczynu $|P|$, i niezależnie od tego do czynników $e^{i\varphi_\lambda}$ zastosujemy wszystkie porządki mnożenia, to wartości iloczynu P dla porządków dających skończone wartości szeregu $\Sigma\varphi_\lambda$ utworzą dwukrotnie nieskończoną mnogość miejsc wszędzie gęstą o tej własności, że na każdej prostej, przechodzącej przez punkt zero i jedno z tych miejsc, i na każdem kole, którego środek znajduje się w punkcie zero, a którego obwód przechodzi przez jedno z tych miejsc, znajduje się jednokrotnie nieskończona mnogość tych miejsc wszędzie gęsta; dla porządków zaś, dających wartości nieskończenie wielkie szeregu $\Sigma\varphi_\lambda$, iloczyn P jest nieoznaczony w ten sposób, że wartości bezwzględne tego iloczynu tworzą mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, a charakterystyka jest nieoznaczona.

Jeżeli zaś w iloczynie P czynników ϱ_λ i $e^{i\varphi_\lambda}$ nie oddzielamy, to wartości iloczynu P dla porządków, dających zbieżność szeregu $\Sigma\varphi_\lambda$, tworzą jednokrotnie nieskończoną mnogość miejsc, rozmieszczoną na płaszczyźnie, o tej własności, że wszystkie linie proste, łączące punkt zero z temi miejscami, przecinają dowolne koło, którego środek jest w punkcie zero, w punktach, tworzących mnogość nieskończoną wszędzie gęstą, wszystkie zaś koła, których środki znajdują się w punkcie zero, a których obwody przechodzą przez te miejsca, przecinają dowolną prostą, poprowadzoną przez punkt zero w punktach, tworzących mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą.

A więc mamy twierdzenie:

Gdy iloczyn $|P|$ jest warunkowo zbieżny, a szereg $\Sigma \varphi_\lambda$ również warunkowo zbieżny, to wartości iloczynu P, przy zastosowaniu wszystkich porządków mnożenia, tworzą dla porządków, dających skończone wartości szeregu $\Sigma \varphi_\lambda$, jednokrotnie nieskończoną mnogość miejsc, rozmieszczoną na płaszczyźnie o tej własności, że wszystkie linie proste, łączące punkt zero z temi miejscami, przecinają dowolne koło, mające środek w punkcie zero, w punktach, tworzących mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, wszystkie zaś koła, których środki znajdują się w punkcie zero, a których obwody przechodzą każdy przez jedno z tych miejsc, przecinają dowolną prostą, poprowadzoną przez punkt zero w punktach, tworzących mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą; a dla porządków, dających rozbieżność szeregu $\Sigma \varphi_\lambda$, iloczyn P jest w ten sposób nieoznaczony, że wartości bezwzględne $|P|$ tego iloczynu tworzą mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, a charakterystyka jest nieoznaczona.

Ten przypadek zachodzi, gdy w iloczynie (7) oba szeregi Σa_λ i Σb_λ są warunkowo zbieżne.

c) Gdy wreszcie szereg $\Sigma \varphi_\lambda$ jest bezwarunkowo zbieżny, a wartość jego jest φ, to dostajemy:

$$P = |P| \, e^{i\varphi} .$$

A więc mamy twierdzenie:

Jeżeli iloczyn $|P|$ jest warunkowo zbieżny, a szereg $\Sigma \varphi_\lambda$ jest bezwarunkowo zbieżny o wartości φ, natenczas wartości iloczynu P, przy zastosowaniu wszystkich porządków mnożenia, tworzą mnogość nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, rozmieszczoną na dodatniej części linii prostej, poprowadzonej przez punkt zero a nachylonej pod kątem φ do linii rzeczywistej.

Ten przypadek zachodzi, gdy w iloczynie (7) szereg Σa_λ jest warunkowo zbieżny, a szereg Σb_λ jest bezwarunkowo zbieżny.

Jak widzimy, warunkowa zbieżność iloczynu (7) zachodzi wtedy, gdy albo oba szeregi Σa_λ i Σb_λ są warunkowo zbieżne, albo jeden z tych szeregów jest bezwarunkowo zbieżny, a drugi warunkowo zbieżny.

We wszystkich tych przypadkach wartości iloczynu warunkowo zbieżnego tworzą, przy zastosowaniu wszystkich porządków mnożenia, jednokrotnie nieskończoną mnogość wszędzie gęstą, i tylko w przypadku, gdy w iloczynie (7) szeregi Σa_λ i Σb_λ są oba warunkowo zbieżne, i gdy do wartości bezwzględnych ϱ_λ czynników iloczynu, a niezależnie od tego do czynników $e^{i\varphi_\lambda}$ zastosujemy wszystkie porządki mnożenia, dostaniemy na wartości iloczynu (7) dwukrotnie nieskończoną mnogość wszędzie gęstą.

Zarazem jest widoczne, że nieoznaczość charakterystyki iloczynu jest następstwem rozbieżności szeregu Σb_λ, niezależnie od zachowania się szeregu Σa_λ. Gdy szereg Σb_λ jest zbieżny, to i charakterystyka iloczynu jest oznaczona, choćby nawet szereg Σa_λ był rozbieżny, i nigdy nie może się zdarzyć, żeby szereg Σb_λ był zbieżny, a równocześnie charakterystyka iloczynu nie była oznaczona.

3.

Jeżeli szeregi rozbieżne, wchodzące w skład szeregu warunkowo zbieżnego, mają tę własność, że suma n wyrazów w tych szeregach może być przedstawiona formą skończoną, natenczas możemy także wszystkie wartości, jakie szereg warunkowo zbieżny przy zastosowaniu wszystkich porządków sumowania przyjmuje, przedstawić jedną formą.

Podobnie, jeżeli iloczyny rozbieżne, wchodzące w skład iloczynu warunkowo zbieżnego mają tę własność, że iloczyn n czynników w tych iloczynach daje się przedstawić formą skończoną, natenczas możemy także wszystkie wartości, jakie iloczyn warunkowo zbieżny przy zastosowaniu wszystkich porządków mnożenia przyjmuje, przedstawić jedną formą.

Wtedy dostajemy obraz wszystkich wartości, jakie szereg lub iloczyn warunkowo zbieżny przyjmuje, a zarazem wskazówkę, jakich wartości przyjąć nie może.

Podamy kilka przykładów takich szeregów i iloczynów warunkowo zbieżnych.

1. Stałą Eulera (Mascheroni'ego) możemy przedstawić następującym szeregiem:

$$c = \left(1 - \log\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \log\frac{4}{3}\right) + \ldots$$

co można i tak napisać:

$$c = \left(1 - \log\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \log\frac{3}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= (1 + \log 1 - \log 2) + \left(\frac{1}{1} + \log 2 - \log 3\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} + \log n - \log(n+1)\right),$$

$$n = \infty .$$

a znosząc równe wyrazy, zaopatrzone przeciwnemi znakami, dostaniemy:

$$c = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n+1); \quad (n = \infty)$$

a stąd mamy:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \log(n+1) + c; \quad n = \infty$$

Szereg harmoniczny H_n jest rozbieżny, lecz suma n wyrazów tego szeregu dla $n = \infty$ daje się przedstawić skończoną formą: $\log(n+1) + c$.

Weźmy w szeregu harmonicznym sumę $2n$ wyrazów, to dostaniemy:

(1) $$H_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} = \log(2n+1) + c; \quad n = \infty$$

Biorąc zaś sumę tych wyrazów szeregu harmonicznego, które mają parzyste mianowniki, dostaniemy:

(2) $$\begin{aligned} H'_{2n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} H_n = \frac{1}{2}\log(n+1) + \frac{1}{2}c \\ &= \log\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}c, \end{aligned}$$

a gdy sumę (2) odejmiemy od (1), to będzie:

(3) $$\begin{aligned} H''_{2n-1} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = H_{2n} - H'_{2n} \\ &= \log(2n+1) + c - \log\sqrt{n+1} - \frac{1}{2}c = \log\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2}c, \end{aligned}$$

Weźmy teraz pod uwagę szereg:

(4) $$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Szereg ten jest warunkowo zbieżny, i przy tym porządku sumowania, w jakim wyrazy są wypisane, daje $\log 2$.

Wybierzmy taki porządek sumowania, żeby na a wyrazów dodatnich przypadało b wyrazów ujemnych. Wtedy na an wyrazów dodatnich przypadnie bn wyrazów ujemnych, przyczem $n = \infty$. Dawszy sobie w ten

sposób liczbę wyrazów dodatnich i ujemnych, możemy wyrazy dodatnie i ujemne zsumować z osobna i dostaniemy:

$$\begin{aligned} s_{ab} &= H''_{2an-1} - H'_{2bn} = \log\frac{2an+1}{\sqrt{an+1}} + \frac{1}{2}c - \log\sqrt{bn+1} - \frac{1}{2}c \\ &= \log\frac{2an+1}{\sqrt{(an+1)(bn+1)}} = \frac{1}{2}\log\frac{(2an+1)^2}{(an+1)(bn+1)}. \end{aligned}$$

Uwzględniając zaś, że $n = \infty$, dostaniemy:

(5) $$s_{ab} = \frac{1}{2}\log\frac{4a}{b} = \log 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$ [1]

Wzór (5) podaje **wszystkie** wartości, jakie szereg (4), przy zastosowaniu wszystkich porządków sumowania, przyjąć może. Albowiem, gdybyśmy nie dali sobie zgóry prawa, według którego wyrazy szeregu (4) mają być sumowane, to zawsze przyjąć możemy, że na pewną ilość a **wszystkich** wyrazów dodatnich przypadnie pewna ilość b **wszystkich** wyrazów ujemnych. Liczby a i b są z pewnością liczbami całkowitemi, a iloraz ich liczbą wymierną.

A więc możemy powiedzieć:

Wszystkie wartości szeregu warunkowo-zbieżnego (4) są połówkami logarytmów liczb wymiernych.

Wartości te tworzą mnogość miejsc wszędzie gęstą, lecz nie tworzą obszaru ciągłego (continuum).

A więc, jeżeli wybierzemy pewną liczbę c, która nie jest połówką logarytmu liczby wymiernej, to możemy wprawdzie w szeregu (4) wybrać takie porządki sumowania, że dostaniemy:

$$|s - c| < \delta$$

przyczem δ jest dowolnie małą liczbą, lecz nigdy nie dostaniemy $s = c$.

2. Liczbę $\frac{\pi}{4}$ możemy przedstawić następującym szeregiem:

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \ldots$$

[1] **Pascal—Dickstein.** Repertoryum matematyki wyższej. T. I. Warszawa 1900, str. 75.

Napiszmy to w następującej postaci:

$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right), \quad n=\infty.$$

Dodajmy i odejmijmy to równanie od równania:

$$H''_{4n-1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}, \quad n=\infty \tag{3'}$$

to dostaniemy:

$$H''_{4n-1}+\frac{\pi}{4}=2\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{4n-3}\right), \quad n=\infty$$

i

$$H''_{4n-1}-\frac{\pi}{4}=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{4n-1}\right), \quad n=\infty$$

a stąd otrzymamy:

$$H'''_{4n-3}=1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{4n-3}=\frac{1}{2}\left(H''_{4n-1}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{4n+1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{4}c+\frac{\pi}{8}, \tag{6}$$

$$n=\infty,$$

i

$$H^{(IV)}_{4n-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{4n-1}=\frac{1}{2}\left(H''_{4n-1}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{4n+1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{4}c-\frac{\pi}{8}, \tag{7}$$

$$n=\infty.$$

Weźmy teraz pod uwagę szereg warunkowo-zbieżny:

$$s=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots \tag{8}$$

i wybierzmy taki porządek sumowania, że na a wyrazów dodatnich przypadnie b wyrazów ujemnych, a więc na an wyrazów dodatnich przypadnie bn wyrazów ujemnych. Wtedy dostaniemy:

$$s_{ab}=H'''_{4an-3}-H^{(IV)}_{4bn-1}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{4an+1}{\sqrt{2an+1}}+\frac{1}{4}c+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\log\frac{4bn+1}{\sqrt{2bn+1}}-\frac{1}{4}c+\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{(4an+1)\sqrt{2bn+1}}{(4bn+1)\sqrt{2an+1}}+\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}\log\frac{(4an+1)^2(2bn+1)}{(4bn+1)^2(2an+1)}+\frac{\pi}{4}, \quad n=\infty,$$

czyli:

$$s_{ab}=\frac{1}{4}\log\frac{a}{b}+\frac{\pi}{4}. \tag{9}$$

Przyjmując tu $a=b$, dostaniemy:

$$s_{11}=\frac{\pi}{4}.$$

3. W szeregu:

$$s=1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}i+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}i-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}i+\ldots, \tag{10}$$

złożonym z wyrazów rzeczywistych i urojonych, szereg wyrazów rzeczywistych i szereg wyrazów urojonych są warunkowo zbieżne.

Wyrazy te, brane co czwarty, tworzą następujące sumy:

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{4n-3}=\quad H'''_{4n-3}=\frac{1}{2}\log\frac{4n+1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{4}c+\frac{\pi}{8},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{4n-2}=\frac{1}{2}H''_{2n-1}=\frac{1}{2}\log\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{4}c,$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{4n-1}=\quad H^{(IV)}_{4n-1}=\frac{1}{2}\log\frac{4n+1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{4}c-\frac{\pi}{8},$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}H_n\quad=\frac{1}{4}\log(n+1)+\frac{1}{4}c.$$

W szeregu (10) wybierzmy taki porządek sumowania, żeby na a wyrazów rzeczywistych dodatnich przypadało b wyrazów rzeczywistych ujemnych, a_1 wyrazów urojonych dodatnich i b_1 wyrazów urojonych ujemnych, to dostaniemy:

$$s_{ab\,a_1 b_2}(H'''_{4an-3} - H^{(IV)}_{4bn-1}) + i\left(\frac{1}{2}H''_{2a_1n-1} - \frac{1}{4}H_{b_1 n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\log\frac{4an+1}{\sqrt{2an+1}} + \frac{1}{4}c + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{4bn+1}{\sqrt{2bn+1}} - \frac{1}{4}c + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$+ i\left(\frac{1}{2}\log\frac{2a_1n+1}{\sqrt{a_1n+1}} + \frac{1}{4}c - \frac{1}{4}\log(b_1n+1) - \frac{1}{4}c\right)$$

$$= \left[\frac{1}{4}\log\frac{(4an+1)^2(2bn+1)}{(4bn+1)^2(2an+1)} + \frac{\pi}{4}\right] + i\,\frac{1}{4}\log\frac{(2a_1n+1)^2}{(a_1n+1)(b_1n+1)}$$

czyli:

$$s_{ab\,a_1b_1} = \left(\frac{1}{4}\log\frac{a}{b} + \frac{\pi}{4}\right) + i\,\frac{1}{4}\log\frac{4a_1}{b_1}. \tag{11}$$

Dając liczbom a, b, a_1, b_1, wszystkie możliwe całkowite dodatnie wartości, dostaniemy na wartości szeregu (10) mnogość dwukrotnie nieskończoną miejsc wszędzie gęstą, rozmieszczoną na całej płaszczyźnie.

Przedstawmy szereg (10) jako szereg wyrazów zespolonych, a więc w postaci:

$$s = \left(1 + \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}i\right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}i\right) + \ldots \tag{10'}$$

to wartości tego szeregu dostaniemy, przyjmując w (11) $a_1 = a$, $b_1 = b$.

Wartości te będą:

$$s_{ab} = \left(\frac{1}{4}\log\frac{a}{b} + \frac{\pi}{4}\right) + i\,\frac{1}{4}\log\frac{4a}{b}. \tag{11'}$$

Wartości te tworzą jednokrotnie nieskończoną mnogość miejsc wszędzie gęstą.

4. Szeregi rozbieżne o tej własności, że suma n wyrazów szeregu wyraża się formą skończoną, możemy utworzyć w następujący sposób:

Połóżmy:

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = F(n). \tag{12}$$

Funkcyę $F(n)$ wybieramy tak, żeby spełniała dwa warunki:

$$\lim_{n=\infty} F(n) = \infty$$

i

$$\lim_{n=\infty}(F(n) - F(n-1)) = 0, \quad F(0) \neq \infty.$$

Wtedy dostaniemy:

$$a_0 = F(0), \quad a_\lambda = F(\lambda) - F(\lambda-1), \quad \lim_{n=\infty} a_n = 0,$$

a szereg (12) będzie rozbieżny.

Tak np. niech:

$$F(n) = \log f(n)$$

przyczem

$$f(n) = \frac{g_0 n^p + g_1 n^{p-1} + \ldots + g_p}{h_0 n^q + h_1 n^{q-1} + \ldots + h_q}, \quad \begin{matrix} g_p \neq 0 \\ h_q \neq 0 \end{matrix} \tag{13}$$

jest funkcyą wymierną, w której stopień licznika nie jest równy stopniowi mianownika.

Wtedy:

$$\lim_{n=\infty} f(n) = \frac{g_0}{h_0} n^{p-q} = \begin{cases} \infty, & \text{dla } p > q \\ 0, & \text{dla } p < q \end{cases}$$

a

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(n)}{f(n-1)} = 1,$$

skutkiem tego jest:

$$\lim_{n=\infty} \log f(n) = \infty$$

i

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty}[\log f(n) - \log f(n-1)] = \lim_{n=\infty} \log\frac{f(n)}{f(n-1)} = 0.$$

Szereg s (12) jest rozbieżny, a suma n wyrazów tego szeregu wyraża się formą:

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \log f(n). \tag{14}$$

Wyrazy dowolnego szeregu zbieżnego

$$\sigma = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$$

dodajmy do odpowiednich wyrazów szeregu (14), wtedy powstanie nowy szereg rozbieżny S, w którym wyraz ogólny jest:

$$A_\lambda = a_\lambda + \alpha_\lambda\,, \quad \text{dla} \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots$$

a, w którym suma n wyrazów przedstawi się formą:

$$S_n = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sigma_n + \log f(n)\,,$$

a dla $n = \infty$:

$$S_n = \sigma + f(n)\,, \quad n = \infty$$

Przyjmijmy, że mamy dwa takie szeregi rozbieżne, w których sumy n wyrazów wyrażone są formami:

$$S_n' = A_0' + A_1' + A_2' + \ldots + A_n' = \sigma' + \log f'(n)\,, \quad n = \infty$$

i

$$S_n'' = A_0'' + A_1'' + A_2'' + \ldots + A_n' = \sigma'' + \log f''(n)\,, \quad n = \infty$$

przyczem funkcye wymierne $f'(n)$ i $f''(n)$ są określone równaniami postaci (13), a stopnie liczników i mianowników tych funkcyj spełniają jeszcze warunek:

$$p' - q' = p'' - q'' = r\,;$$

wtedy, gdy utworzymy szereg warunkowo zbieżny:

$$s = A_0' - A_0'' + A_1' - A_1'' + A_2' - A_2'' + \ldots, \tag{15}$$

to wartości tego szeregu dają się przedstawić jedną formą.

Wybierzmy taki porządek sumowania, że na a wyrazów A' przypadnie b wyrazów A'', to dostaniemy:

$$s_{ab} = S_{an}' - S_{bn}'' = \sigma' + \log f'(an) - \sigma'' - \log f''(bn)$$

$$= \sigma' - \sigma'' + \log \frac{f'(an)}{f''(bn)}\,, \quad n = \infty\,;$$

lecz:

$$\lim_{n=\infty} f'(an) = \lim_{n=\infty} \frac{g_0'}{h_0'}\, a^{p'-q'}\, n^{p'-q'} = \lim_{n=\infty} \frac{g_0'}{h_0'}\, a^r \,.\, n^r\,,$$

$$\lim_{n=\infty} f''(bn) = \lim_{n=\infty} \frac{g_0''}{h_0''}\, b^{p''-q''}\, n^{p''-q''} = \lim_{n=\infty} \frac{g_0''}{h_0''}\, b^r\, n^r\,,$$

a więc:

$$\lim_{n=\infty} \log \frac{f'(an)}{f''(bn)} = \log \frac{g_0'\, h_0''}{h_0'\, g_0''} \left(\frac{a}{b}\right)^r,$$

a skutkiem tego dostaniemy:

$$S_{ab} = \sigma' - \sigma'' + \log \frac{g_0'\, h_0''}{h_0'\, g_0''} \left(\frac{a}{b}\right)^r. \tag{16}$$

Wzór (16) przedstawia wszystkie wartości szeregu warunkowo zbieżnego (15).

5. Funkcyę $\Gamma(x)$ można określić następującym związkiem:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{cx}\, x \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}} = e^{cx}\, x \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) e^{-\frac{x}{\nu}}\,, \quad n = \infty\,;$$

przyczem c oznacza stałą E u l e r a (M a s c h e r o n i'ego).

Mając daną liczbę n czynników ($n = \infty$), możemy czynniki $1 + \frac{x}{\nu}$ i $e^{-\frac{x}{\nu}}$ wymnożyć z osobna, i dostaniemy:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) .\, e^{-x\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - c\right)} = x \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) .\, e^{-x \log (n+1)}$$

$$= x \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) (n+1)^{-x}\,, \quad n = \infty\,;$$

a wskutek tego będzie:

$$x \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right) = \frac{(n+1)^x}{\Gamma(x)}\,. \tag{17}$$

Iloczyn: $x \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right)$ jest rozbieżny, lecz wartość iloczynu $(n+1)$ początkowych czynników dla $n = \infty$ przedstawia się formą (17).

Podstawmy w (17) $-x$ zamiast x, to dostaniemy:

$$-x \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) = \frac{(n+1)^{-x}}{\Gamma(-x)}\,,$$

a po podzieleniu tego równania przez $-x$, otrzymamy:

$$\prod_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) = \frac{(n+1)^{-x}}{-x\, \Gamma - x} = \frac{(n+1)^{-x}}{\Gamma(1-x)}\,. \tag{18}$$

Utwórzmy teraz iloczyn:

(19) $$P = \pi x \Pi'\left(1+\frac{x}{\nu}\right),$$

kreska przy Π przypomina, że w tym iloczynie ν przybiera wszystkie wartości całkowite dodatnie i ujemne, z wyjątkiem $\nu = 0$.

Iloczyn (19) jest warunkowo zbieżny.

Wybierając taki porządek mnożenia, że na a czynników z dodatniem ν, przypadnie b czynników z ujemnem ν, dostaniemy:

$$P_{ab} = \pi \,.\, x \prod_{\nu=1}^{an}\left(1+\frac{x}{\nu}\right) . \prod_{\nu=1}^{bn}\left(1-\frac{x}{\nu}\right).$$

Uwzględnijmy tu związki (17) i (18) to będziemy mieli:

$$P_{ab} = \pi \frac{(an+1)^x}{\Gamma(x)} \cdot \frac{(bn+1)^{-x}}{\Gamma(1-x)} = \left(\frac{an+1}{bn+1}\right)^x \sin \pi x\,, \quad n = \infty$$

czyli:

(20) $$P_{ab} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \sin \pi x\ ^{1)}.$$

Wszystkie wartości iloczynu (19) różnią się od siebie x-tą potęgą liczb wymiernych.

Biorąc pochodną logarytmową iloczynu (19), dostaniemy szereg warunkowo zbieżny:

(21) $$s = \frac{1}{x} + \Sigma' \frac{1}{x+\nu}.$$

Wartość, jaką ten szereg przyjmuje, gdy na a wyrazów o dodatniem ν przypada b wyrazów o ujemnem ν, dostaniemy, biorąc logarytmową pochodną z P_{ab} (20), a więc będzie:

$$s_{ab} = \frac{d}{dx}\log\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x \sin \pi x\right] = \frac{d}{dx}\left[x \log\frac{a}{b} + \log \sin \pi x\right]$$

czyli:

(22) $$s_{ab} = \log\frac{a}{b} + \pi \operatorname{cotg} \pi x.$$

[1]) Pascal—Dickstein l. c., str. 81.

6. Iloczyn Wallisa:

(23) $$P = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}, \quad n=\infty$$

jest warunkowo zbieżny, i przy tym porządku mnożenia, w jakim jest wypisany, daje $\frac{\pi}{2}$.

Iloczyn czynników większych niż 1, jest:

$$P_n' = \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)} = \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2\nu}\right)},$$

uwzględniając zaś równanie (18), dostaniemy:

$$P_n' = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(n+1)^{\frac{1}{2}}, \quad n=\infty.$$

Iloczyn czynników mniejszych niż 1 jest:

$$P_n'' = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$$

ze względu zaś na (17), będziemy mieli:

$$P_n'' = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2(n+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

W iloczynie warunkowo zbieżnym (23) niech na a czynników większych niż 1 przypada b czynników mniejszych niż 1, to wartość tego iloczynu będzie następująca:

$$P_{ab} = P_{an}'\,.\,P_{bn}'' = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(an+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2(bn+1)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{an+1}{bn+1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{2}; \quad n=\infty,$$

czyli:

(24) $$P_{ab} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{b}},$$

a dla $a = b$, mamy:

$$P_{11} = \frac{\pi}{2}.$$

7. Iloczyny rozbieżne o tej własności, że iloczyn n czynników wyraża się formą skończoną, możemy utworzyć w następujący sposób:

Połóżmy:

$$I_n = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n = f(n). \tag{25}$$

Funkcyę $f(n)$ wybieramy tak, żeby spełniała warunki:

$$\lim_{n=\infty} f(n) = \infty \quad \text{lub} \quad 0$$

i

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(n)}{f(n-1)} = 1, \tag{26}$$
$$f(0) \neq 0, \quad f(0) \neq \infty;$$

zresztą może być dowolną.

Wtedy dostaniemy:

$$a_0 = f(0) \quad \text{i} \quad a_\lambda = f(\lambda) - f(\lambda-1), \quad \lambda = 0, 1, 2 \ldots$$

i iloczyn I będzie rozbieżny, podczas gdy iloczyn n czynników wyrazi się formą (25).

Tak np. gdy funkcya $f(n)$ jest funkcyą wymierną, a więc:

$$f(n) = \frac{g_0 n^p + g_1 n^{p-1} + \ldots + g_p}{h_0 n^q + h_1 n^{q-1} + \ldots + h_q}, \tag{27}$$

przyczem:

$$p \neq q, \quad g_p \neq 0, \quad h_q \neq 0,$$

to warunki (26) spełnią się, i wyznaczywszy czynniki a_0 i a_λ, $\lambda = 1, 2, 3 \ldots$ dostaniemy iloczyn rozbieżny I, o wymaganej własności.

Pomnóżmy jeszcze czynniki iloczynu rozbieżnego I przez odpowiednie czynniki dowolnego iloczynu zbieżnego

$$p = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots$$

tak żeby było:

$$A_\lambda = \alpha_\lambda a_\lambda, \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots$$

to dostaniemy nowy iloczyn rozbieżny:

$$P = A_0 A_1 A_2 \ldots$$

w którym iloczyn n czynników wyrazi się formą skończoną:

$$P_n = p_n f(n),$$

a dla $n = \infty$:

$$P_n = p f(n), \quad n = \infty. \tag{28}$$

Przyjmijmy, że mamy dwa iloczyny rozbieżne:

$$P' = A_0' A_1' A_2' \ldots$$

i

$$P'' = A_0'' A_1'' A_2'' \ldots$$

w których iloczyn n czynników wyraża się formą (28), a więc mamy:

$$P_n' = p' f'(n), \quad n = \infty;$$

$$P_n'' = p'' f''(n), \quad n = \infty.$$

Iloczyn P' niech będzie rozbieżny do nieskończoności, a iloczyn P'' niech będzie rozbieżny do zera, wskutek tego stopnie liczników i mianowników funkcyj wymiernych $f'(n)$ i $f''(n)$ spełniają nierówności:

$$p' > q', \quad p'' < q''.$$

Niech te stopnie spełniają jeszcze równanie:

$$p' - q' = q'' - p'' = r,$$

to iloczyn warunkowo zbieżny:

$$P = A_0' A_0'' A_1' A_1'' A_2' A_2'' \ldots \tag{29}$$

posiada własność, że wszystkie jego wartości wyrażają się jedną formą.

Albowiem, gdy wybierzemy taki porządek mnożenia, że na a czynników A' przypadnie b czynników A'', to dostaniemy:

$$P_{ab} = p'p'' f'(an) \,.\, f''(bn)\,, \quad n = \infty$$

lecz:

$$\lim_{n=\infty} f'(an) = \frac{g_0'}{h_0'} a^{p'-q'} n^{p'-q'} = \frac{g_0'}{h_0'} a^r n^r\,, \quad n = \infty$$

$$\lim_{n=\infty} f''(bn) = \frac{g_0''}{h_0''} b^{p''-q''} \,.\, n^{p''-q''} = \frac{g_0''}{h_0''} b^{-r} n^{-r} \quad n = \infty$$

i

$$\lim_{n=\infty} f'(an) \,.\, f''(bn) = \frac{g_0'}{h_0'} \frac{g_0''}{h_0''} \left(\frac{a}{b}\right)^r,$$

a skutkiem tego dostaniemy:

$$P_{ab} = p'p'' \frac{g_0' g_0''}{h_0' h_0''} \left(\frac{a}{b}\right)^r. \tag{30}$$

Wartości iloczynu warunkowo zbieżnego (29) różnią się od siebie czynnikami, które są r-temi potęgami liczb wymiernych.

A. PRZEBORSKI,

NIEKTÓRE ZASTOSOWANIA TEORYI KONGRUENCYJ LINIOWYCH.

(Dokończenie). [1]

ROZDZIAŁ IV.

Twierdzenia Bianchi'ego.

§ 1. W rozdziale poprzedzającym okazaliśmy, że jeżeli przez punkty jakiejkolwiek powierzchni S, nakładalnej na jednę z zasadniczych powierzchni obrotowych, przeprowadzimy w odpowiedni sposób proste, to otrzymamy kongruencyę normalnych do pewnej powierzchni minimalnej albo do pewnej powierzchni ze stałą krzywizną gaussowską.

Promienie tej kongruencyi, niezmiennie związane z powierzchnią S i pozostające przy wszelkich możliwych odkształceniach powierzchni S normalnemi do odpowiednich powierzchni minimalnych albo do powierzchni o stałej krzywiznie gaussowskiej, leżą na płaszczyznach krzywizny określonego układu krzywych geodezyjnych G powierzchni S, przedstawiających wygięcia południków. Lecz z ogólnej teoryi powierzchni ogniskowych wiemy, że te ostatnie płaszczyzny są styczne do powierzchni S_0 dopełniającej dla powierzchni S, t. j. do powierzchni, która wraz z powierzchnią S stanowi dwie powierzchnie ogniskowe kongruencyi stycznych do krzywych geodezyjnych G.

[1]) Patrz Prace mat.-fizycz. 13. 159—235 (1—78).