Non-cyclic quotient-groups can exist only when $n_2 > 0$. Hence this is a necessary condition for the existence of any quotient-group of order pq. Such quotient-groups may however exist when $n_1 = 0$. To find the total number of these groups we have to consider separately the H's which correspond to the $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n_2-1}$ quotient-groups of order q. In such ou H the number of invariant subgroups of index p under this H is of the form $1 + p + p^2 + \ldots$ We need only consider those subgroups which have both of the following properties: 1) They are also invariant under G, 2) They do not include the commutator subgroup of G. Each of the invariant subgroups of index p in H, which satisfies these conditions gives rise to just one non-cyclic quotient-group of order pq. If the group generated by the operators of order p in the commutator quotient-group of H is of order p^{n_3}, the number of these subgroups is $1+p+p^2+\ldots+p^{n_3-1} - (1+p+p^2+\ldots+p^{n_1-1}) - kq$.

WŁ. GORCZYŃSKI,

O SPOSOBACH WYPROWADZENIA PRAWA KIRCHHOFFA.

I.

§ **1.** Pamiętna rozprawa Kirchhoffa „Ueber den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme“ była ogłoszona jeszcze w roku 1859. Badane doświadczalnie fakty nad prążkami pochłonięcia i odkrycie widm odwróconych przedstawił Kirchhoff, jako konieczną konsekwencyę prawa ogólnego, formułującego stosunek wzajemny emisyi i zdolności absorbcyjnej danego rodzaju energii promienistej przy pewnych ograniczeniach szczegółowych.

W tem prawie nie był Kirchhoff zupełnie bez poprzedników, już bowiem de la Provostaye i Desains, a także Stokes, Stewart i A. Ångström poświęcili poprzednio wiele prac badaniom w tym kierunku, a zwłaszcza interesującemi są poglądy A. Ångströma, który już w roku 1852 próbował powiązać zaobserwowane zjawiska z zasadą rezonansu.

Dopiero jednak Kirchhoff wskazał dobitnie, że istnieje związek ilościowy między emisyą i zdolnością absorbcyjną dla każdej radiacyi monochromatycznej; ograniczając się do czysto kalorycznego przebiegu zjawisk t. j. do przypadku, gdy źródłem promieniowania jest jedynie energia cieplna i gdy odwrotnie energia promienista przechodzi przy absorbcyi wyłącznie i całkowicie w ciepło, sformułował on prawo swoje w sposób ściśle określony, który można krótko wyrazić tak:

Stosunek emisyi $(e_{\lambda, T})$ jakiegokolwiek ciała (K) do jego odpowiedniej zdolności absorbcyjnej $(a_{\lambda, T})$ jest wartością stałą dla wszystkich ciał w tej samej temperaturze i w odniesieniu do jednej i tej samej długości fali, niezależnie od każdorazowego kierunku promieni oraz rodzaju polaryzacyi.

Oznaczając kolejnemi indeksami wartości $e_{\lambda,T}$ i $a_{\lambda,T}$ dla różnych ciał (K', K'', K''' i t. d.), otrzymamy, jako wyrażenie prawa Kirchhoffa, związek:

$$\frac{e'_{\lambda,T}}{a'_{\lambda,T}} = \frac{e''_{\lambda,T}}{a''_{\lambda,T}} = \frac{e'''_{\lambda,T}}{a'''_{\lambda,T}} = \ldots = E_{\lambda,T}\,. \tag{1}$$

Wielkość $E_{\lambda,T}$, stałą dla wszystkich ciał w powyżej oznaczonych warunkach, można przyjąć za miarę emisyi takiego idealnego ciała, które pochłania wszystkie bez wyjątku promienie, a więc spełnia warunek:

$$a_{\lambda,T} = A_{\lambda,T} = 1\,, \tag{2}$$

dla każdej wartości T i λ. Ciało, którego zdolność absorbcyjna równa się $A_{\lambda,T}$, nosi w teoryi promieniowania nazwę bezwzględnie „czarnego“, przyczem wyraz „czarny“ ma tu przeważnie znaczenie symboliczne i nie znajduje bezpośredniego odpowiednika w spotykanych ciałach przyrody, jakkolwiek samo promieniowanie „czarne“ może być z wielkiem przybliżeniem zrealizowane przy pomocy znanych ciał, wziętych w odpowiednich warunkach.

§ 2. Sformułowane powyżej prawo ilościowe Kirchhoffa odnosi się do promieniowań czysto kalorycznych i wszelkie wypływające z tego prawa wnioski uważano za prawdziwe tylko dla tej grupy zjawisk. Tymczasem przekonano się, że wiele zjawisk, które całkowicie lub częściowo należą do grupy luminescencyi, czyni także zadość wielu z tych wniosków. Z tego powodu, prócz związku ilościowego, zgodzono się rozróżniać i jakościową stronę prawa, którą można formułować w sposób następujący:

Każde ciało, które w danej temperaturze i w danych warunkach wysyła w kierunku określonym (pod danym kątem z normalną padania) promienie o określonej częstości wahań i rodzaju polaryzacyi, absorbuje też wysyłane ku niemu w tejże temperaturze i warunkach promieniowania tejże częstości, kierunku oraz tegoż rodzaju polaryzacyi.

Własność ciał, wyrażaną przez stronę jakościową prawa Kirchhoffa, opierają teoretycznie na szerokich podstawach ogólnej teoryi rezonansu; jej sprawdzianem doświadczalnym są bardzo liczne grupy faktów, nie wyłączając wielu zjawisk fluorescencyjnych, jak to wykazały zapoczątkowane przez Burke'a doniosłe badania w tym względzie. Nie

możemy się tu zająć ani opisem tych doświadczeń, ani rozbiorem tej kwestyi i wracamy do wyprowadzenia ilościowego prawa Kirchhoffa dla promieniowań czysto kalorycznych, a więc z wyłączeniem wszelkich zjawisk luminescencyi i w ogóle obcych źródeł energii, prócz cieplnej i promienistej.

§ 3. Już w grudniu 1859 r. podał Kirchhoff pierwsze rozważanie teoretyczne w kwestyi swego prawa. Bieg rozumowania jego jest następujący. Przedstawmy sobie ciało C w postaci płytki nieograniczonych rozmiarów, która wysyła i pochłania jedynie tylko promienie o długości fali L; naprzeciw tej płytki umieszczone jest ciało c w postaci podobnej płytki, która jednakowoż wysyła i absorbuje promienie wszystkich możliwych długości fali. Jeżeli w układzie tym ma, według założenia, panować równowaga temperatur, to nastąpi ona wtedy, gdy każde ciało zyskuje tyleż ciepła przy absorbcyi, ile traci przez wypromieniowywanie. Przedstawmy sobie jeszcze, że części zewnętrzne obu naszych płytek pokryte są doskonale odbijającemi zwierciadłami R i r i rozpatrzmy przedewszystkiem te z promieni wysyłanych przez c, które są różne od L. Wszystkie one odbijają się od zwierciadła R, dobiegają do c, część ich stąd się odbija, dobiega znów do R i t. d., tak że ostatecznie wszystkie promienie λ, różne od L, wracają do swego źródła. Z drugiej strony jednak, założenie o niezmienności temperatury ciała c wymaga, aby ono z promieni L absorbowało tyleż, ile wysyła. Oznaczając dla długości fali L emisyę ciała C przez E i c przez e oraz zdolności absorbcyjne tych ciał przez A i a, mieć będziemy, że z energii E, którą C wysyła, ciało c absorbuje aE i odbija z powrotem $(1-a)E$; z tej zaś ilości C absorbuje $(1-a)AE$ i odbija $(1-A)(1-a)E$ w kierunku ku C, które znowu absorbuje z tego $a(1-A)(1-a)E$. Prowadząc w dalszym ciągu te rachunki i oznaczając dla krótkości:

$$(1-A)(1-a) = k\,, \tag{3}$$

otrzymamy na wartość energii, pobieranej przez ciało c z ilości E:

$$aE(1+k+k^2+k^3+\ldots) = \frac{aE}{1-k}\,. \tag{4}$$

Z drugiej zaś strony z ilości promieniowania e, które wysyła c, ono też absorbuje, jak wskazuje łatwy rachunek, ilość

$$\frac{a(1-A)e}{1-k}\,. \tag{5}$$

Warunkiem niezmienności temperatury ciała c będzie równanie:

$$e = \frac{aE}{1-k} + \frac{a(1-A)e}{1-k} \tag{6}$$

skąd:

$$\frac{e}{a} = \frac{E}{A}. \tag{7}$$

Takież równanie otrzymamy, wyprowadzając warunek niezmienności temperatury ciała C. Zastępując ciało c innem w tejże temperaturze, dojdziemy na zasadzie identycznych rozważań do tej samej wartości dla stosunku emisyi do zdolności absorbcyjnej dla długości fali L. Lecz ta ostatnia długość oraz każdorazowe wartości temperatur są wybrane zupełnie dowolnie. Stąd wynika — według Kirchhoffa — prawo, że dla promieni tejże długości fali w tejże temperaturze stosunek emisyi do zdolności absorbcyjnej jest dla wszystkich ciał wielkością stałą.

§ 4. W styczniu 1860 roku zajął się Kirchhoff ponownym dowodem swego prawa, ściślej jednocześnie formułując warunki, w których omawiana zależność ma miejsce. Wskazuje on na początku, że promienie podczerwone („Wärmestrahlen" według ówczesnej terminologii) są zupełnie równorzędne z promieniami widzialnemi i odgrywają w tych rozważaniach bardzo ważną rolę; dalej że promieniowanie, właściwe ciału świecącemu w „próżni", jest niezależne od ciał, na które te promienie padają, oraz w ogóle od liczby i rodzaju ciał, tworzących otoczenie.

Z promieni zaś, które nadsyłane są ciału danemu przez przedmioty otaczające, część ulega absorbcyi, część zaś odbywa dalej swą drogę w kierunkach zmienionych przez odbicie lub załamanie. Promienie odbite i załamane, przejawiają swe istnienie i działalność spółcześnie z promieniami, bezpośrednio wysyłanemi przez ciało, nie przeszkadzając sobie wzajemnie.

Wskutek wysyłania promieni przez ciało, jego zapas lub energia cieplna ponosi ubytek, proporcyonalny do energii promieniowań, a wskutek absorbcyi odpowiedni przyrost. Wyłącza się przytem wszystkie przypadki, w których absorbcya lub wypromieniowywanie wywołuje jakiekolwiek inne zmiany w ciele lub powoduje powstanie innych źródeł energii; zakłada się więc warunek kardynalny, że ciała nie podlegają żadnym zmianom zarówno przy emisyi, jak i wskutek absorbcyi, jeżeli temperatura przez odjęcie lub dodanie ciepła utrzymywana jest stale na jednym i tym samym poziomie.

W tych ostatnich warunkach, stosując zasadę równoważności pracy i ciepła, możemy ilość ciepła, dostarczaną ciału w określonym czasie na pokrycie straty powstającej wskutek promieniowania, uważać za odpowiadającą ilości energii promienistej, wysyłanej przez ciało, a także odwrotnie ilość ciepła, którą należałoby odjąć dla przeszkodzenia w ogrzaniu się ciała wskutek absorbcyi, za równoważną energii promieni pochłoniętych.

Wreszcie rozpatruje Kirchhoff w swym dowodzie, ciała doskonale „czarne", które, według określenia, pochłaniają w zupełności wszystkie

promienie na nie padające, a więc spełniają warunek, że ich zdolność absorbcyjna równa się jedności dla całego kompleksu promieni. Aby to było możebne, „ciało czarne" winno, według Kirchhoffa, posiadać tenże spółczynnik załamania, jak i ośrodek, w którym promieniowanie ma miejsce, wtedy bowiem na powierzchni ciała nie nastąpi odbicie i wszystkie promienie mogą być pochłonięte. Ponieważ wszystkie nasze rozważania odnoszą się ściśle do jednego i tegoż samego ośrodka, a mianowicie do t. zw. próżni, więc i omawiane ciało „czarne" Kirchhoffa winno posiadać spółczynnik załamania, który tylko nieskończenie mało może się różnić od jedności.

Nakoniec posiłkuje się Kirchhoff, prócz ciał „czarnych", także ciałami „doskonale przezroczystemi", które bezwzględnie przepuszczają wszystkie bez różnicy promienie, a również i idealnemi zwierciadłami, które padającą wiązkę w całości odbijają. Takie ciała nie mogą same posiadać zdolności wysyłania promieni, gdyż inaczej zamknięte w przestrzeni o jednakowej temperaturze, ogrzewałyby ją stale, ochładzając się przytem.

§ 5. Na zasadzie wszystkich założeń powyższych przeprowadza Kirchhoff swój nowy dowód, bardziej ogólny, uwzględniający, prócz długości fali, także i oddzielne składowe drgań. Obszerny ten dowód, składający się z 17 części, podany został w tomie 109 Annalów Poggendorffa (str. 275—301) w rozprawie p. t.: „Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht" i przedrukowany następnie w „Gesammelte Abhandlungen". Nie powtarzając w całości tego złożonego dowodu, przeciw któremu — podobnie jak i przeciw pierwszemu — podnieść się dają poważne zarzuty, ograniczymy się do wskazania niektórych zasadniczych punktów twierdzenia Kirchhoffa.

Po określeniach wstępnych rozważany jest (w części 4) przypadek ciała „czarnego" C, otoczonego zewsząd przestrzenią z ściankami doskonale „czarnemi"; jako warunek równowagi temperatur otrzymuje się łatwo równanie Kirchhoffa dla całego kompleksu promieniowań, co jednak nie pozwala w ogóle na rozciągnięcie podobnej zależności i na oddzielne długości fali lub kierunki polaryzacyi. Potrzebne uzupełnienie dowodu, powiada Kirchhoff, dałoby się łatwo przeprowadzić, gdyby można było założyć istnienie płytki, posiadającej własność zupełnej przezroczystości dla promieni o długościach fali między λ i $\lambda + d\lambda$ i określonej płaszczyzny polaryzacyi, zaś zupełnie odbijającej promienie pozostałe. Założenie jednak podobnej płytki jest niczem nieusprawiedliwione.

W części piątej swego dowodu wprowadza Kirchhoff, zamiast poprzedniej, idealnie przezroczystą płytkę tak cienką, że otrzymują się barwy cienkich blaszek. Posiłkując się teoryą takich barw, otrzymuje

Kirchhoff rezultat, że dla każdej długości fali i płaszczyzny polaryzacyi, emisye wszystkich ciał „czarnych“ są jednakowe.

W części szóstej wskazane jest, że promieniowania, wysyłane przez ciała „czarne“, nie mogą być spolaryzowane. Gdyby bowiem pewna wiązka była choćby w części, np. liniowo spolaryzowana, to przy obrocie ciała zmieniałaby się również i część odbita od (rozważanej w części poprzedniej) cienkiej płytki, co naruszyłoby równowagę temperatur.

W trzech częściach następnych rozważana jest zależność wypromieniowywanej energii od postaci i względnego położenia otworów, zaś w paragrafach 10, 11 i 12 rozpatrywane są promieniowania wzajemne dwóch „czarnych“ powierzchni. Dla większej ogólności przypuszcza Kirchhoff, że pomiędzy takiemi dwiema powierzchniami (1 i 2) znajdować się może dowolna liczba ciał, które w najrozmaitszy sposób odbijają i załamują promienie, przesyłane ku sobie przez 1 i 2. Zakładając początkowo, że odbicia i załamania po drodze nie połączone są z absorbcyą, rozważa Kirchhoff część wiązki, biegnącej z 1 do 2, o długościach fali między λ i $\lambda + d\lambda$ i rozkłada ją na dwie składowe we wzajemnie względem siebie prostopadłych płaszczyznach polaryzacyi a_1 i b_1. To, co z składowej pierwszej dochodzi do 2, rozkładamy na dwie składowe, których płaszczyzny polaryzacyi są (wzajemnie prostopadłe, lecz zresztą dowolne) płaszczyzny a_2 i b_2. Natężenie składowej, spolaryzowanej w a_2, niechaj będzie $K d\lambda$. Dla promieni, które dążą odwrotnie z 2 do 1 po tejże drodze, rozkładamy również część między λ i $\lambda + d\lambda$ na składowe w płaszczyznach a_2 i b_2 i to, co z składowej pierwszej przychodzi do 1, na składowe według a_1 i b_1; natężenie rozważanej składowej nazwijmy $K' d\lambda$. Wtedy daje się dowieść, że $K = K'$.

§ **6.** Aby to wykazać, bierze Kirchhoff dwie płaszczyzny spółrzędnych z początkiem w środkach powierzchni 1 i 2, przyczem x i y mają kierunki prostopadłe do osi wchodzącej lub wychodzącej w tem miejscu wiązki promieni. W jednostce odległości od wskazanych osi bierzemy dwa nowe układy spółrzędnych, równoległe do pierwszych z początkami na osi wiązki. Oznaczając przez (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) spółrzędne punktów w czterech płaszczyznach x i y, a dalej przez T czas biegu promienia z punktu (x_1, y_1) do (x_2, y_2), otrzymamy dla czasu przejścia od (x_3, y_3) do (x_4, y_4) następujące wyrażenie:

$$T - \sqrt{1 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} - \sqrt{1 + (x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2}, \tag{8}$$

gdzie T rozpatrujemy jako daną funkcyę spółrzędnych x_1, y_1, x_2, y_2, a prędkość biegu promienia w przestrzeni próżnej dla krótkości przyjmujemy za jednostkę.

Warunkiem, aby wszystkie cztery punkty leżały na jednym promieniu, stosujemy [1]) zasadę minimum czasu i przyjmujemy, że wszystkie 8 spółrzędnych: $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$ są nieskończenie małe — będzie:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 - \frac{\partial T}{\partial x_1}; \quad x_4 = x_2 - \frac{\partial T}{\partial x_2}, \\ y_3 &= y_1 - \frac{\partial T}{\partial y_1}; \quad y_4 = y_2 - \frac{\partial T}{\partial y_2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Uważając dalej (x_1, y_1) jako punkt rzutu naszej powierzchni 1 na płaszczyznę z (x_1, y_1) i $dx_1 \,.\, dy_1$ jako element tej płaszczyzny rzutu (element ten jest wielkością nieskończenie małą rzędu wyższego, niż powierzchnie 1 i 2); dalej (x_3, y_3) jako punkt promienia, który wychodzi z (x_1, y_1) i trafia powierzchnię 2, a $dx_3 \,.\, dy_3$ jako element tegoż rzędu co i $dx_1 \,.\, dy_1$ — otrzymamy dla promieni rozważanych długości fali i wybranych kierunków polaryzacyi wyrażenie:

$$I \,.\, d\lambda \,.\, dx_1 \,.\, dy_1 \,.\, dx_3 \,.\, dy_3,$$

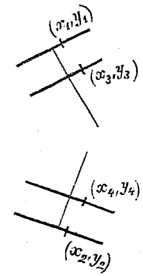

Fig. 1.

gdzie rozważamy promieniowanie w wiązce, opierającej się na $dx_1 \,.\, dy_1$ i przechodzącej przez $dx_3 \,.\, dy_3$. I jest funkcyą tylko temperatury i długości fali i nie zależy od postaci i względnych położeń powierzchni 1 i 2.

Stosownie do uczynionych założeń, ilość ta promieniowania dochodzi bez osłabienia do 2 i tworzy tam element wielkości, oznaczonej przez $K d\lambda$, więc:

$$K = I \iiiint dx_1 \,.\, dy_1 \,.\, dx_3 \,.\, dy_3. \tag{10}$$

Uwzględniając równania (9), mieć będziemy:

$$\begin{aligned} \iint dx_3\, dy_3 &= \iint \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial y_2} - \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \right) dx_2\, dy_2 \\ &= \iint \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial y_2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial y_1} \right) dx_2\, dy_2 \end{aligned} \tag{11}$$

i ostatecznie:

$$K = I \iiiint \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial y_2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial y_1} \right) dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2, \tag{12}$$

gdzie całkowanie rozciąga się na rzuty rozważanych powierzchni 1 i 2.

---

[1]) Por. uwagę M. Plancka (w Ostwald's Klassiker № 100, str. 39) oraz Clausiusa (w Pogg. Ann. 121, str. 13).

Tworząc w zupełnie identyczny sposób wyrażenie na K' i uwzględniając ten fakt, że czas przebiegu promienia między dwoma punktami jest jednakowy w obu kierunkach, otrzymamy toż samo wyrażenie, a więc:

$$K = K'. \tag{13}$$

W tem dowodzeniu zakłada się, że odbicie i załamanie po drodze biegu promieni nie połączone jest z absorbcyą. Ograniczenie to jednak nie jest istotne wobec następującego dowiedzionego przez Helmholtza (w „Physiologische Optik") stosunku, który niżej podajemy. Niechaj promień dąży z punktu 1 do 2, podlegając po drodze dowolnej liczbie załamań, odbić i t. d. W kierunku promienia prowadzimy w 1 dwie dowolne, wzajemnie prostopadłe, płaszczyzny a_1 i b_1, wzdłuż których rozkładamy drgania. Podobne płaszczyzny a_2 i b_2 prowadzimy przez promień w 2. Jeżeli wtedy z 1 wychodzi w kierunku rozważanego promienia ilość i promieniowania spolaryzowanego w a_1 i z tego do 2 dochodzi ilość k (polaryzacya a_2), to i odwrotnie, jeżeli z 2 wychodzi ilość i (polaryzacya a_2), to do 1 dochodzi k (polaryzacya a_1). Helmholtz wyłącza tylko wypadki skręcenia płaszczyzny polaryzacyi wskutek działania sił magnetycznych.

Posiłkując się powyższem i oznaczając przez γ wartość stosunku $\frac{k}{i}$ dla obu promieni, biegnących między punktami (x_1, y_1) i (x_2, y_2) w tym lub odwrotnym kierunku, otrzymamy i teraz jedno i toż samo wyrażenie na K i K', z tą tylko różnicą, że pod znakiem całkowania figurować będzie jeszcze czynnik γ.

§ 7. Dowód swój o wypromieniowywaniach wzajemnych rozszerza następnie Kirchhoff i na inne składowe drgań i otrzymuje wniosek ogólny: promieniowania wzajemne dwóch elementów powierzchni „czarnych" 1 i 2, w jednej i tej samej temperaturze, są identyczne dla każdej długości fali i płaszczyzny polaryzacyi, i to zarówno dla promieni, które idą wprost z 1 do 2 lub odwrotnie z 2 do 1, jako też dla tych, które po drodze z 1 do 2 lub odwrotnie ulegają załamaniom i odbiciom na ciałach dowolnych.

Twierdzenie ostatnie rozciąga Kirchhoff także na przypadek dowolnego (nie czarnego) ciała C, otoczonego przestrzenią o „czarnych" ściankach formy dowolnej.

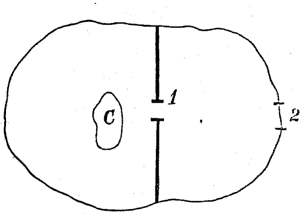

Fig. 2.

Promienie, wysyłane z 2, dochodzą przez 1 do ciała C i tu zostają w części zaabsorbowane, w części zaś wskutek odbić i załamań rozpraszają się w różnych kierunkach. Z wiązki promieni między 2 i 1 rozpatrzmy część z długościami fali między λ i $\lambda + d\lambda$ i rozłóżmy je na dwie składowe (spolaryzowane w płaszczyźnie a i w drugiej do niej prostopadłej). Niechaj $M'd\lambda$ będzie część pierwszej składowej, która nie uległa absorbcyi przez ciało C i dobiega do „czarnych" ścianek otaczającej przestrzeni zamkniętej.

Z drugiej strony ścianki te wysyłają promienie w kierunku ku C, z których niektóre padają przez 1 na 2; wskutek pośrednictwa ciała C tworzy się więc wiązka promieni, które przez otwór 1 dążą do powierzchni 2. Z tej wiązki rozważmy część między λ i $\lambda + d\lambda$, którą rozkładamy na dwie składowe (w płaszczyźnie a i drugiej do niej prostopadłej). Biorąc składową pierwszą i tworząc, podobnie jak powyżej, wyrażenie $M d\lambda$, otrzymamy:

$$M = M'. \tag{14}$$

Słuszność tego wniosku wynika z rozważań poprzedniego paragrafu, gdy je stosować będziemy do wiązek promieni, które wymieniają między sobą elementy „czarnej" przestrzeni, otaczającej ciało C, z powierzchnią 2 za pośrednictwem samego ciała C. Tworząc sumę wszystkich równań, otrzymamy żądany związek.

§ 8. Po tem badaniu szczegółowem biegu promieni między ciałami wewnętrznemi i ściankami otoczenia, przystępuje Kirchhoff w części 13 do ostatecznego dowodu swego prawa dla dowolnego ciała, zamkniętego w „czarnej przestrzeni". W dowodzeniu tem, dość skomplikowanem, opiera się Kirchhoff na działaniu idealnie przezroczystej płytki i doskonałego zwierciadła i z ich pomocą otrzymuje równanie:

$$\frac{e}{a} = E, \tag{15}$$

dla jednakowych, lecz zresztą dowolnych, długości fali i temperatur.

W części 14 swego dowodzenia uogólnia Kirchhoff swe twierdzenia i oznaczając przez I_1 i I_2 natężenia promieniowań ciała czarnego w dwóch przezroczystych ośrodkach z spółczynnikami załamania n_1 i n_2, wyprowadza, posiłkując się poprzedniemi wyrażeniami i zasadą minimum Fermat'a, zależność:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2}. \tag{16}$$

W następnych dwóch częściach rozpatruje Kirchhoff niektóre ważne wnioski swego prawa, a w rozdziale ostatnim (17-ym) zajmuje się następującą doniosłą konsekwencyą swych rozważań teoretycznych. Jeżeli ograniczymy jakąkolwiek część przestrzeni szeregiem ciał, które nie przepuszczają żadnych promieni, to każda wiązka wewnątrz takiej przestrzeni jest co do jakości i natężenia taka, jak gdyby pochodziła od ciała doskonale czarnego tejże temperatury, a zatem jest niezależna od jakości i rodzaju ciał i zależy tylko od temperatury.

§ **9**. Dowód Kirchhoffa, mimo słuszności wielu poszczególnych punktów (o promieniowaniu wzajemnem powierzchni bezpośrednio lub przy udziale dowolnej liczby ciał pośredniczących, o charakterze promieniowań wewnątrz zamkniętej przestrzeni nieprzezroczystej i niektórych innych) i mimo prawdziwości rezultatów końcowych, jest nie do przyjęcia, już dla tego samego względu, że dowodzenie opiera się na wnioskach co do przypuszczalnych działań ciał idealnych (doskonale czarnych, idealnie przezroczystych lub bezwzględnych zwierciadeł) lub nawet takich (przezroczystych dla jednej długości fali, a odbijających pozostałe), które, jak wykazał Wien, w działaniach swych są wprost sprzeczne z zasadami Termodynamiki. Co się tyczy ciał „czarnych", to te winny posiadać według Kirchhoffa spółczynnik załamania jednakowy z otaczającym ośrodkiem. Tu zjawia się np. taka trudność, że, o ile ciało takie graniczy z t. zw. próżnią, to nie powinno ono wykazywać rozszczepienia, a więc byłoby „czarne" dla jednej tylko długości fali! Jeszcze większe trudności sprowadza założenie ciał doskonale przezroczystych, których spółczynnik załamania winien nadto bardzo mało różnić się od jedności.

Z tego powodu już de la Provostaye w r. 1863 (w Ann. chim. et phys.) podniósł zarzuty przeciw dowodzeniom Kirchhoffa, nazywając jego założenia „hypothèses gratuites". Jednak nowy dowód, wskazany przez Provostaye'a, jest również niedostateczny, podobnie jak i poprzednie próby, czynione przez Stewarta (Edin. Trans. Soc. 1858). Nadto Schuster w r. 1881 (On the dynamical theory of radiation w Phil. Mag.) powstał przeciwko teoryi równowagi ruchomej Prévosta wraz z założeniem, że promieniowanie danego ciała zależy od jego rodzaju i temperatury, ale jest niezależne od jego otoczenia. Schuster gruntuje swoje zarzuty na hypotezach teoryi cynetycznej gazów.

W notatce „on radiation" z r. 1884 zwraca P. Tait (Edinb. Proc.) uwagę, że prawo Kirchhoffa ważne jest tylko dla czysto kalorycznego promieniowania, gdy energia promienista przechodzi wyłącznie na ciepło i odwrotnie; oraz że o równości temperatur w przestrzeni zamkniętej można mówić tylko w znaczeniu „statystycznem", t. j. w takiem, w jakiem się mówi o średniej prędkości molekuł.

Notatka Taita nie przynosi zresztą nic nowego, gdyż stosowne ograniczenia poczynione były już przez samego Kirchhoffa.

§ **10**. Po pewnej przerwie nowy dowód prawa Kirchhoffa starał się dać Helmholtz, a podług niego i Drude w swem „Lehrbuch der Optik" (1900). W swych „Vorlesungen über Theorie der Wärme" (mianych w r. 1890 i 1893) podaje Helmholtz następujące rozumowanie.

Ważność równania Kirchhoffa dla oddzielnych rodzajów promieni może być wyprowadzona, podobnie jak i dla całkowitego promieniowania, z warunku równowagi cieplnej między ciałami o jednej i tej samej temperaturze. Stosownie do poprzednich rozważań, uważamy za rzecz dowiedzioną, że natężenie I energii promienistej jest dla wszystkich ciał „czarnych" jednakowe. Stąd jednakowoż nie wynika jeszcze, żeby dla pewnego ciała „czarnego" natężenie częściowe w barwie f_1 nie mogło być większe, niż w innych ciałach czarnych, pod warunkiem, aby dla pewnej barwy f_2 było ono mniejsze niż we wszystkich innych: wypadek ten nie byłby w sprzeczności z warunkiem równowagi temperatur dla całego kompleksu promieniowań. Można dalej przy pomocy różnych przyrządów optycznych (siatek, pryzmatów i t. p.) osiągnąć — mówi Helmholtz — że promienie pewnej barwy określonej będą przeważnie skierowywane w jednym kierunku, gdy promienie z innej barwy (czystej) obierą inny blizki kierunek. Przedstawmy sobie np. wewnątrz doskonale „czarnej" przestrzeni „pryzmat bezwzględnie przezroczysty" P. Przy pomocy odpowiednio ustawionych, doskonale odbijających, przesłon d można osiągnąć, że z całej kategoryi promieniowań, biegnących z jednej części przestrzeni, na pryzmat upadnie tylko wiązka prostoliniowa, dążąca z określonego elementu zasłony T. Padając na pryzmat, ulegnie ona załamaniu w taki sposób, że w miejscu g_1 po drugiej stronie przestrzeni zbiorą się promienie wiązki barwy f_1, a w g_2 barwy f_2. Na podstawie zasady odwrotności biegu promieni wnioskujemy, że i odwrotnie z miejsca g_1 wychodzą ku T tylko promienie barwy f_1, a z g_2 barwy f_2. Jeżeliby istniało ciało „czarne", któreby w porównaniu z innemi odznaczało się większą emisyą częściową dla barwy f_1 niż dla barwy f_2 (absorbcya dla wszystkich barw jest według określenia w ciałach czarnych zawsze równa jedności), wtedy w promieniowaniu wzajemnem między g_1 i T nie mogłoby być równowagi, gdyż g_1 więcej wysyła niż od T otrzymuje; odwrotnie rzecz się ma z g_2. A więc zachodzi tu sprzeczność z zasadniczym postulatem równowagi temperatur w przestrzeni o jednej i tej samej temperaturze, a zatem równość promieniowań dla

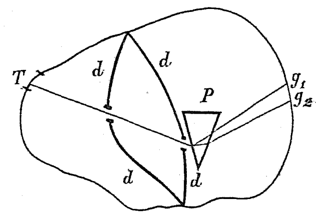

Fig. 3.

wszystkich ciał „czarnych" stosuje się nie tylko do ogółu promieni, ale także dla każdej poszczególnej barwy zosobna.

§ 11. Rozumowanie Helmholtza, mimo słuszności otrzymanego rezultatu, jest niesłuszne choćby dla tego, że pryzmat doskonale przezroczysty z własnościami rozszczepiającemi nie może być nawet teoretycznie pomyślany, gdyż warunek zupełnej przezroczystości nie daje się pogodzić z rozszczepieniem.

Richarz próbował w r. 1903 ocalić sposób dowodzenia Helmholtza, proponując, zamiast pryzmatu, użycie siatki dyfrakcyjnej wklęsłej wstawionej w taki sposób, aby obraz rzeczywisty pochodzący z T występował w g_1 w barwie f_1, a w g_2 w barwie f_2. Wtenczas upada sprzeczność doskonale przezroczystego pryzmatu z własnościami rozszczepiającemi, a więc — jak sądzi Richarz — dowód Helmholtza jest bez zarzutu.

Jednakże mimo usunięcia tej trudności i pomijając nawet wprowadzenie doskonale czarnych ścianek, w rozumowaniu Helmholtza tkwi błąd zasadniczy w nieuwzględnieniu charakteru „czarnych promieniowań" w znaczeniu, w jakiem są one pojmowane obecnie. Doniosłym postępem w teoryi i praktyce teoryi o energii promienistej było właśnie oderwanie się od założenia ciał „doskonale czarnych", niemożliwych do urzeczywistnienia, a natomiast zwrócenie się do „idealnie czarnych" promieniowań, które w odpowiednich warunkach przy pomocy ciał zwykłych zrealizować się dają. Rozpatrując „czarne promieniowania" w oderwaniu od ciał, którym zawdzięczają one swe powstanie, nie mamy ani możności, ani prawa sądzić, że przy pomocy stosownych przesłon (Fig. 3) daje się wydzielić z jednej części przestrzeni wiązka, dążąca tylko z określonego elementu T. W warunkach, odpowiadających fig. 3, wstępują we wszystkich kierunkach przez otwory w doskonale odbijających ściankach przesłon, promienie w przestrzeń, ograniczoną przesłonami $d \ldots d$; promieniowanie to pozostaje w tem ogrodzeniu w większej części bez zmiany (gdyż tylko nader drobny ułamek zdoła wyjść z powrotem przez otwory w ściankach), tak że w naszej odbijającej przestrzeni $d \ldots d$ tworzy się stan stałej równowagi energii promienistej. Ten stały stan równowagi odpowiada i charakteryzuje właśnie „czarne promieniowanie" w określonej temperaturze, jednakowej dla całej przestrzeni; jest ono reprezentowane przez wszystkie możliwe kierunki i długości fali. Dlatego też przez otwór z drugiej strony wychodzą i padają na pryzmat także i inne promienie o barwie różnej od f_1, które dochodzą również do g_1; to samo stosuje się do g_2 i t. d. Jest więc rzeczą niesprawiedliwioną i niemożliwą rozpatrywać wzajemne wypromieniowywania elementu T i g_1, g_2, a więc i opieranie na niem rezultatów jest niedozwolone.

§ 12. Pozostaje jeszcze jeden dowód prawa Kirchhoffa, który w r. 1901 podał E. Pringsheim. Nie robi on żadnych szczególnych założeń co do istnienia różnych ciał fikcyjnych i po rozważeniu „czarnego" charakteru promieniowań wewnątrz zamkniętej przestrzeni nieprzezroczystej, wyprowadza równanie Kirchhoffa w sposób następujący.

Wewnątrz przestrzeni nieprzezroczystej rozważmy energię, przesyłaną przez element ds_1 ciała K drugiemu, odległemu elementowi ds_2. Oznaczając przez E_λ emisyę ciała „czarnego" w równych warunkach, mieć będziemy ze względu na „czarny" charakter promieniowań w całej przestrzeni następujące wyrażenie dla energii przesłanej z ds_1 do ds_2:

$$E_\lambda = e_\lambda + g_\lambda\,, \tag{17}$$

gdzie $e_\lambda \,.\, d\lambda$ jest „właściwem" promieniowaniem ciała K, które w jednostce czasu dochodzi z ds_1 do ds_2, posiada długość fali między λ i $\lambda + d\lambda$ i określony kierunek polaryzacyjny, a $g_\lambda \,.\, d\lambda$ nosi nazwę promieniowania „zapożyczonego" elementu ds_1 t. j. tego ułamka energii, który, po odbiciu od ds_1 lub przejściu przez ciało K, wychodzi z ds_1 i trafia do ds_2.

Stosując teraz zasadę odwrotności biegu i opierając się na dowiedzionych przez Kirchhoffa twierdzeniach o promieniowaniach wzajemnych powierzchni „czarnych", mamy prawo — mówi Pringsheim — wnioskować, że promieniowanie „zapożyczone", dobiegające za pośrednictwem ds_1 do ds_2, jest dokładnie równe tej ilości, która po tychże drogach w kierunku odwrotnym wychodzi z ds_2 i za pośrednictwem ds_1 dobiega do innych ciał naszej zamkniętej przestrzeni. Wszystkie bowiem ciała wysyłają, podobnie jak i ds_2 promieniowanie „czarne".

Rozpatrzmy teraz promienie, wychodzące z ds_2 i dostarczane w jednostce czasu do ds_1. Oznaczając przez a_λ zdolność absorbcyjną ciała K dla danych promieni, mieć będziemy, że z ilości $E_\lambda d\lambda$ dobiegającej do niego pochłania ono $a_\lambda E_\lambda d\lambda$, reszta zaś t. j.:

$$(1 - a_\lambda)\, E_\lambda d\lambda = g_\lambda \,.\, d\lambda \tag{18}$$

jest częściowo przepuszczona, częściowo zaś odbita od ds_1 i dobiega do pozostałych ciał przestrzeni. Stosownie do tylko co przytoczonego rozumowania, z (17) i (18) wynika:

$$E_\lambda = e_\lambda + (1 - a_\lambda)\, E_\lambda \tag{19}$$

lub

$$e_\lambda = a_\lambda E_\lambda \tag{20}$$

t. j. równanie Kirchhoffa.

Dowód Pringsheima, dla wielu względów najlepszy z wszystkich poprzedzających i nie budzący żadnych szczególnych wątpliwości teoretycznych, ma jednak pewne słabe strony z formalnego punktu widzenia. Zasadniczym punktem w dowodzeniu Pringsheima są twierdzenia Kirchhoffa o promieniowaniu „wzajemnem" powierzchni czarnych, skąd też wyprowadzony jest wniosek o równości g_λ, a więc właściwie i sam związek $e_\lambda = a_\lambda E_\lambda$. Ani dowodów, ani też odnośnych twierdzeń Kirchhoffa, Pringsheim nie przytacza, a więc całe rozumowanie, niezależnie od słuszności metody i przesłanek, jest niezupełne.

Z drugiej strony nie należy zapominać, że twierdzenia swe o promieniowaniach wzajemnych powierzchni „czarnych" wyprowadzał Kirchhoff na zasadzie poprzednio dowiedzionej równości emisyi ciał „czarnych" z pomocą idealnie przezroczystych płytek, doskonałych zwierciadeł i innych tym podobnych założeń fikcyjnych. Wprawdzie sposoby dowodzeń Kirchhoffa mogą być, odnośnie do wypromieniowywań wzajemnych, uważane za słuszne (część 6—12 dowodu), a założenie przedwstępne o równości emisyi ciał czarnych daje się wyprowadzić w sposób zadawalający (jak to pokazał już sam Pringsheim), bez uciekania się do założeń fikcyjnych, jednak są to kwestye, które w kolejnej drodze dedukcyj nie są wykazane.

Poniżej — w części II — staraliśmy się w sposób nieco odmienny wyprowadzić równanie Kirchhoffa, biorąc wraz z Pringsheimem za punkt wyjścia „czarny" charakter promieniowań wewnątrz nieprzezroczystej zasłony.

II.

§ **13**. W podanem poniżej dowodzeniu, nie czynimy, podobnie jak i u Pringsheima, żadnych założeń szczególnych o istnieniu ciał idealnie odbijających, przezroczystych lub przepuszczających promienie tylko jednej długości fali. Są to bowiem ciała zupełnie fikcyjne, a nawet przyjęcie płytki, przepuszczającej promienie tylko jednej długości fali, prowadzi, jak to wykazał Wien w roku 1894, do rezultatów sprzecznych z podstawowemi zasadami Termodynamiki.

W dowodzeniu naszem nie rozpatrujemy także ciał „doskonale czarnych", które przecież dają się z zupełnem uprawnieniem teoretycznie pomyśleć i określone są analitycznie równaniem

$$A = 1\,, \tag{21}$$

gdzie A oznacza zdolność absorbcyjną ciała dla całego kompleksu promieniowań, w każdej temperaturze T. Mimo to wykażemy, że, jakkolwiek

Fizyka doświadczalna nie zna ciał „doskonale czarnych", to jednakże „doskonale czarne" promieniowania dają się z wielkiem przybliżeniem zrealizować przy pomocy znanych ciał w pewnych warunkach. Termodynamicznie takie idealnie „czarne" promieniowanie charakteryzuje zupełna degradacya kierunków, zupełne rozproszenie i stała równowaga energii w danej temperaturze.

Należy zaznaczyć, że już Kirchhoff przewidywał taki sposób realizacyi, uważając go jednak za konsekwencyę swego prawa ilościowego; Lummer, Wien i inni stwierdzili doświadczalnie słuszność tych założeń.

Wbrew metodzie pierwszych teoretyków, a zgodnie z uwagą Pringsheima, dowiedziemy, że prawo Kirchhoffa może być uważane jako konsekwencya teoryi „czarnych" promieniowań i dlatego, przed podaniem dowodu właściwego równania Kirchhoffa, zajmiemy się przedewszystkiem wyprowadzeniem następujących:

§ **14**. Własności promieniowań w przestrzeni zamkniętej.

Przedstawmy sobie przestrzeń zamkniętą, dowolnego kształtu i wymiarów, której ścianki składać się mogą z nieograniczonej liczby ciał o dowolnych grubościach. Zakładamy, że ścianki te są zupełnie nieprzezroczyste dla wszelkich promieniowań, co przypuścić wolno wobec tego, że różne ciała w najrozmaitszy sposób odbijają, przepuszczają i pochłaniają oddzielne kategorye promieni, a przeto już przy pomocy stosunkowo niewielkiej liczby ciał, wziętych w odpowiednich grubościach, daje się wypełnić postawiony warunek.

Niechaj w takiej przestrzeni nieprzezroczystej o ściśle jednakowej wszędzie temperaturze T znajduje się dowolne ciało N; ilość energii promienistej, którą ciało to wysyła we wszystkich kierunkach w ciągu jednostki czasu, oznaczmy przez e_T, całkowitą zdolność absorbcyjną przez a_T, a odpowiednie wartości dla poszczególnych długości fali przez $e_{\lambda,T}$ i $a_{\lambda,T}$. Z uwagi, że temperatura T jest ściśle jednakową dla całej przestrzeni, będziemy dla krótkości pisali e i a względnie e_λ i a_λ.

Wykażemy, że dla naszej przestrzeni zamkniętej spełnia się warunek:

$$A = 1\,, \tag{21 a}$$

a wraz z nim promieniowanie, które się w takiej przestrzeni ustala, odpowiada jakościowo i ilościowo temu doskonale „czarnemu" promieniowaniu, któreby w tejże temperaturze wysyłało idealnie „czarne" ciało, o ileby ono bezpośrednio urzeczywistnić się dało.

Oznaczmy przez ε całkowitą ilość promieniowania, dostarczanego w jednostce czasu ciału N od otaczającej powłoki, t. j. ścianek przestrzeni zamkniętej; z tej ilości ε ciało N pochłania $a\varepsilon$, lecz z drugiej strony i wysyła w tymże czasie ilość energii promienistej e ku pokrywie. Dla czysto kalorycznego przebiegu zjawiska, z wyłączeniem wszelkich postronnych źródeł energii, warunkiem niezmienności temperatury T ciała K będzie równanie:

(22) $$e = a\varepsilon \quad \text{lub} \quad \frac{e}{a} = \varepsilon$$

dla całego kompleksu promieniowań.

Zajmiemy się zbadaniem wielkości ε; zauważymy przedewszystkiem, że w rozkładzie promieniowania w przestrzeni, ograniczonej daną powłoką nieprzezroczystą, niema kierunków uprzywilejowanych, lecz wszystkie są między sobą równoważne.

Pytanie to rozważał już w swym dowodzie i zadawalająco wyjaśnił (por. część szóstą, omówioną w § 5) sam K i r c h h o f f. Przedstawmy sobie wewnątrz powłoki nieprzezroczystej, zamiast dowolnego kształtu ciała N bardzo małą kulkę, której własności optyczne (emisya, zdolność absorbcyjna, rozpraszająca i t. p.) są najrozmaitsze w różnych miejscach, kierunkach i dla różnych długości fali λ. Kulka ta niechaj otrzymuje w ciągu jednostki czasu — bezpośrednio lub pośrednio — ilość energii ε; jeżeli pomyślemy sobie, że kulka ta dokonała następnie obrotu o kąt pewien względem jakiejkolwiek płaszczyzny, przechodzącej przez jej środek, to wskutek takiego obrotu kulki rozkład ogólny padającego na nią promieniowania może uledz tylko bardzo nieznacznym zmianom. Zmiany te bowiem pochodzić mogą od zmian w tej tylko cząstce promieni, które wybiegły z malutkiej powierzchni naszej kuli i zostały jej potem zwrócone wskutek odbić i załamań na innych ciałach, składających ścianki powłoki. Gdyby w przestrzeni naszej pewne kierunki lub rodzaje polaryzacyi miały przewagę, to przy obrocie kuli zdolności absorbcyjne dla tych rodzajów promieniowań ulegałyby silnym zmianom, a wraz z a również znacznie zmieniałby się i iloczyn $a\varepsilon$. To sprzeciwia się jednak założonemu warunkowi równości temperatur, wyrażonemu równaniem:

(22 a) $$e = a\varepsilon\,,$$

gdyż e nie zależy od położenia kuli i pozostaje stale przy jej obrocie. Stąd wnosimy, że w promieniowaniu ε wszystkie kierunki muszą być równoważne.

Następnie zajmiemy się dowodem, że skład widmowy promieniowania, ustalającego się wewnątrz przestrzeni zamkniętej jest dla wszystkich dłu-

gości fali zawsze jednakowy i (w jednej i tej samej temperaturze) nie zależy od rodzaju rozważanych powłok nieprzezroczystych.

Wracając do równania (22), podstawmy tam:

(23) $$\varepsilon = \int \varepsilon_\lambda \, d\lambda \quad \text{oraz} \quad a = \frac{\int \sigma_\lambda a_\lambda \, d\lambda}{\int \sigma_\lambda \, d\lambda}\,,$$

gdzie równanie drugie jest ogólnem wyrażeniem absorbcyi całkowitej (a) w zależności od absorbcyi w barwach poszczególnych (a_λ), zaś σ_λ oznacza natężenie promieni danej długości fali λ, padających na ciało pochłaniające ze źródła. Granice całek, które dla krótkości opuszczamy, są $\lambda = \lambda_1$ i $\lambda = \lambda_2$, gdzie zamiast λ_1 i λ_2 można przyjąć 0 i ∞.

Uwzględniając, że w naszym przypadku

(24) $$\sigma_\lambda = \varepsilon_\lambda\,,$$

a więc, że

(25) $$a = \frac{\int a_\lambda \varepsilon_\lambda \, d\lambda}{\int \varepsilon_\lambda \, d\lambda}\,,$$

otrzymamy:

(26) $$e = \int a_\lambda \varepsilon_\lambda \, d\lambda\,.$$

Jeżeli teraz będziemy dowolne ciało N umieszczali kolejno w różnych powłokach zupełnie nieprzezroczystych o jednej i tej samej temperaturze, lecz zresztą zupełnie dowolnych co do swego rodzaju lub kształtu, to przy takich zmianach ani wartość e, ani absorbcye a_λ ciała K nie ulegną zmianie. Gdybyśmy przypuścili, że wartości ε_λ promieniowań ustalających się w różnych powłokach mogłyby być różne, np. $\varepsilon_\lambda^{(1)}, \varepsilon_\lambda^{(2)} \ldots, \varepsilon_\lambda^{(i)} \ldots, \varepsilon_\lambda^{(n)}$, to otrzymalibyśmy układ nieograniczonej liczby równań:

(27) $$e = \int a_\lambda \varepsilon_\lambda \, d\lambda = \int a_\lambda \varepsilon_\lambda^{(1)} d\lambda = \int a_\lambda \varepsilon_\lambda^{(2)} d\lambda = \ldots = \int a_\lambda \varepsilon_\lambda^{(i)} d\lambda = \ldots = \int a_\lambda \varepsilon_\lambda^{(n)} d\lambda\,.$$

Ciało K jest najzupełniej dowolne, a zatem a_λ jest w danej temperaturze funkcyą wielkości λ zupełnie niezależną od $\varepsilon_\lambda^{(i)}$; układowi (27) można więc zadość uczynić w ogóle tylko, gdy

(28) $$\varepsilon_\lambda = \varepsilon_\lambda^{(i)} = E_\lambda\,, \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

gdzie E_λ jest wielkością stałą, niezależną od rodzaju i formy „pokrywy".

Jeżeli tak, to i

$$\varepsilon = \int \varepsilon_\lambda \, d\lambda = \int \varepsilon_\lambda^{(i)} \, d\lambda = \int E_\lambda \, d\lambda = E \,, \tag{29}$$

gdzie wartość E jest stałą dla wszystkich przestrzeni zamkniętych, zupełnie nieprzezroczystych w danej temperaturze T.

Na zasadzie związku (22) otrzymujemy równanie:

$$\frac{e}{a} = E = \text{const} \tag{30}$$

ważne dla wszystkich ciał w tej samej temperaturze; odnosząc to ostatnie do naszej „pokrywy" nieprzezroczystej, t. j. kładąc

$$e = \varepsilon = E \,, \tag{31}$$

otrzymamy dla niej:

$$a = A = 1 \,, \tag{32}$$

co też było do wykazania.

Uwaga. Skoro pokrywa nasza absorbuje zupełnie wszystkie rodzaje promieni, zachowuje się ona — stosownie do określenia Kirchhoffa — tak, jak gdyby posiadała własności „czarnego" ciała. Promieniowanie, które ona w takich warunkach wysyła, będzie właśnie tem doskonale „czarnem" promieniowaniem, które w tak świetny sposób i z tak wielką dokładnością zdołali w kilku ostatnich latach urzeczywistnić zwłaszcza Lummer i Pringsheim, wykazując zarazem doświadczalnie słuszność założeń postawionej teoryi.

§ 15. Twierdzenie Kirchhoffa.

Twierdzenie to udowodnimy, jako konsekwencyę teoryi „czarnego" promieniowania w zamkniętej przestrzeni nieprzezroczystej. Oznaczając emisyę dowolnego ciała N w danej temperaturze przez e i e_λ, jego zdolność absorbcyjną przez a i a_λ, i przez E względnie E_λ emisye, odpowiadające ciału doskonale „czarnemu" w tejże temperaturze, mamy, że w warunkach, odpowiadających poprzedniemu twierdzeniu, spełnione być musi równanie

$$\frac{e}{a} = E \,, \tag{33}$$

dla całego kompleksu promieniowań.

Aby stąd przejść do poszczególnych długości fali, przekształcamy równanie (33) posiłkując się wzorami (25) i (29); otrzymamy:

$$\frac{e}{a} : E = 1 = \frac{\int e_\lambda \, d\lambda}{\int \sigma_\lambda a_\lambda \, d\lambda} \cdot \frac{\int \sigma_\lambda \, d\lambda}{\int E_\lambda \, d\lambda} \tag{34}$$

i uwzględniając, że w danym przypadku źródłem promieniowań

$$\sigma_\lambda = E_\lambda \tag{35}$$

jest promieniowanie doskonale „czarne", mieć będziemy:

$$\frac{\int e_\lambda \, d\lambda}{\int a_\lambda E_\lambda \, d\lambda} = 1 \quad \text{lub} \quad \int e_\lambda \, d\lambda = \int a_\lambda E_\lambda \, d\lambda \,. \tag{36}$$

Posiadając związek (36) i stosując go do nieograniczonej liczby n przypadków różnych ciał w różnych pokrywach nieprzezroczystych o jednej i tej samej temperaturze T, otrzymamy n równań postaci

$$\int e_\lambda^{(i)} \, d\lambda = \int a_\lambda^{(i)} E_\lambda^{(i)} \, d\lambda \,. \qquad i = 1, 2 \ldots n \tag{37}$$

Lecz według poprzednio wyprowadzonych równań:

$$E_\lambda^{(i)} = E_\lambda \,, \tag{38}$$

jest wartością stałą dla wszystkich zamkniętych przestrzeni nieprzezroczystych w tejże temperaturze, zatem z nieograniczonej liczby związków postaci

$$\left\{\begin{aligned} \int e_\lambda \, d\lambda &= \int a_\lambda E_\lambda \, d\lambda \,, \\ \int e_\lambda^{(1)} \, d\lambda &= \int a_\lambda^{(1)} E_\lambda \, d\lambda \,, \\ &\cdots\cdots \\ \int e_\lambda^{(i)} \, d\lambda &= \int a_\lambda^{(i)} E_\lambda \, d\lambda \,, \\ &\cdots\cdots \\ \int e_\lambda^{(n)} \, d\lambda &= \int a_\lambda^{(n)} E_\lambda \, d\lambda \,, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

wynika, wobec zupełnie dowolnych, w granicach od 0 do 1, wartości $a_\lambda^{(i)}$ niezależnych od E_λ, wniosek konieczny

$$e_\lambda^{(i)} = a_\lambda^{(i)} E_\lambda \tag{40}$$

lub, odrzucając indeksy,

$$\frac{e_\lambda}{a_\lambda} = E_\lambda\,, \tag{41}$$

t. j. szukane równanie Kirchhoffa.

Na zakończenie pragniemy dorzucić jeszcze dwie uwagi. Wszystkie dowodzenia powyższe, stosując się nadto do czysto kalorycznego przebiegu zjawisk, nie dają jednak „teoryi“ prawa Kirchhoffa w tem znaczeniu, że nie wiążą tego prawa z przyjmowanemi dotychczas teoryami energii promienistej. Usiłowania Lechera (z roku 1882) i Voigta (z roku 1899) nie dały w tym względzie pożądanych wyników.

Po drugie, dedukcye powyższe nie mówią nic o wpływie ośrodka; już zaś Kirchhoff zauważył, że promieniowanie „czarne“ zmienia się wraz z spółczynnikiem załamania otaczającego ośrodka i w r. 1862 w swej klasycznej rozprawie wyprowadził prawo odnośne. Pytaniem tem zajmował się następnie Clausius (1864), Bartoli (1879), Planck (1900) i inni. Ważne rozważania teoretyczne nad prawem „Kirchhoffa—Clausiusa“ zawdzięcza nauka Smoluchowskiemu (1896), który, wskazując na niedokładność pomiarów poprzednich Quintusa Iciliusa, zajmował się z dodatnim rezultatem także doświadczalnem sprawdzeniem tej ważnej zależności.

Warszawa, w styczniu 1905 r.

WIKTOR BIERNACKI,

ZWIERCIADEŁKA ŻELAZNE
OTRZYMANE PRZEZ ROZPYLANIE ŻELAZA PRĄDEM.

O. Lodge[1]) pierwszy, zdaje się, dostrzegł, że z drutu platynowego, żarzonego przez prąd elektryczny, wydzielają się cząsteczki, które wytwarzają mgłę w powietrzu, nasyconem parą wodną i pozbawionem w zupełności pyłu. R. Nahrwold[2]) przekonał się, że od drutu, żarzonego przez prąd, unoszą się cząsteczki platyny, tworzące osad na szkle; cząsteczki te mogą przenosić ładunki elektryczne; są one nadzwyczaj drobne. W jednem doświadczeniu Nahrwolda drucik platynowy, który w ciągu 20 godzin żarzenia się utracił zaledwie 1 mgr. masy, w ciągu jednej minuty żarzenia się wydzielał ilość cząsteczek, wystarczającą do przeniesienia dostrzegalnego ładunku elektrycznego. Nahrwold dostrzegł też, że w wodorze rozpylanie drutu platynowego przez prąd zachodzi o wiele powolniej, aniżeli w powietrzu. I. Elster i H. Geitel[3]) widzą tu zjawisko analogiczne z rozpylaniem się katodu w rurce Crookes'a. A. Berliner[4]) objaśnia rozpylanie drutu, żarzonego przez prąd, stopniowem wydzielaniem się z drutu gazów przezeń pochłoniętych; gazy te, według Berlinera, mechanicznie odrywają cząsteczki drutu. Tak samo objaśnia A. Berliner rozpylanie się włókienek węglowych w lampkach żarowych oraz katodów w rurkach Crookes'a. H. Kayser[5]) przypuszcza, że rozpylanie się

---

1) Nature, t. **31**, str. 268. 1885.
2) Wied. Ann., t. **31**, str. 448. 1887 i t. **35**, str. 107. 1888.
3) Wied. Ann., t. **31**, str. 109. 1887.
4) Wied. Ann., t. **33**, str. 289. 1888.
5) Wied. Ann., t. **34**, str. 607. 1888.