ALF GULDBERG,

UEBER LINEARE HOMOGENE DIFFERENZENGLEICHUNGEN DERSELBEN ART. [1]

(O RÓWNANIACH RÓŻNICOWYCH LINIOWYCH JEDNORODNYCH TEGO SAMEGO GATUNKU).

Hat man zwei lineare homogene Differenzengleichungen:

$$(1) \qquad Py_x \equiv y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + \ldots + p_x^{(n)} y_x = 0\,,$$

$$(2) \qquad Qz_x \equiv z_{x+m} + q_x^{(1)} z_{x+m-1} + \ldots + q_x^{(m)} z_x = 0\,, \qquad (m \leqq n)$$

mit rationalen Coefficienten, so sage ich, die Gleichung (2) gehört mit (1) zu derselben Art oder ist mit (1) von derselben Art, wenn man durch die Beziehung:

$$(3) \qquad z_x = a_x^{(0)} y_x + a_x^{(1)} y_{x+1} + \ldots + a_x^{(n-1)} y_{x+n-1} \equiv Ay_x$$

wo die a_x rationale Funktionen sind, von den Integralen der Differenzengleichung (1) zu denen der Differenzengleichung (2) übergehen kann.

Ist $n > m$, so wird man nicht durch eine zu (3) analoge Relation von dem allgemeinen Integral von (2) zu dem der Gleichung (1) übergehen

[1]) Für die entsprechenden Untersuchungen bei den linearen homogenenen Differentialgleichungen vgl. vorzüglich die wichtige Abhandlung von Loewy: „Ueber reduzible lineare homogene Differentialgleichungen“. Mathematische Annalen B. 56, p. 550 sq. Die hier mitgeteilten Sätze sind in analoger Weise wie bei Herrn Loewy bewiesen und ich verwende dabei, um eine leichte Vergleichung zu ermöglichen, analoge Bezeichnungen.

können; ist $n > m$ und die Gleichung (2) mit (1) von derselben Art, so ist nicht auch (1) mit (2) von derselben Art. Die eingeführte Beziehung ist also nicht stets wechselseitig. Ist die Gleichung (2) mit (1) von derselben Art und auch (1) mit (2) von derselben Art, so sagt man: die zwei linearen homogenen Differenzengleichungen sind gegenseitig von derselben Art oder auch kurz, sie sind von derselben Art.

Aus unserer Definition folgt unmittelbar:

Ist die Gleichung (2) mit (1) von derselben Art und die Gleichung (1) mit einer anderen linearen homogenen Differenzengleichung n-ter oder höherer Ordnung, die auch rationale Coefficienten hat, von derselben Art, so ist auch die Gleichung (2) mit dieser von derselben Art.

Es mögen $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $Py_x = 0$ sein; bezeichnen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ irgend n Constanten, so ist, wenn die Differenzengleichung $Qy_x = 0$ mit der Differenzengleichung $Py_x = 0$ zu derselben Art gehört und der Uebergang von den Integralen von (1) zu denen von (2) durch die Relation (3) vermittelt wird,

$$A\left(\sum_1^n \mu_k y_x^{(k)}\right),$$

stets ein Integral von $Qy_x = 0$ und ferner sind in der Form $A\left(\sum_1^n \mu_k y_x^{(k)}\right)$ alle Integrale von $Qy_x = 0$ enthalten; denn $\sum_1^n \mu_k y_x^{(k)}$ ist das allgemeine Integral der Gleichung $Py_x = 0$. Da

$$A\left(\sum_1^n \mu_k y_x^{(k)}\right) = \sum_1^n \mu_k A y_x^{(k)}$$

ist, so folgt, dass unter den folgenden n Functionen:

$$Ay_x^{(1)}, Ay_x^{(2)}, \ldots, Ay_x^{(n)}$$

die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung $Qy_x = 0$ enthalten sein müssen.

Ist $Qy_x = 0$ eine lineare homogene Differenzengleichung von der Ordnung $m = n - \nu$, so kann die Gleichung $Qy_x = 0$ nur m linear unabhängige Integrale besitzen. Mithin muss ein System von $n . \nu$ Constanten $\lambda_{kl}\left(\begin{smallmatrix} k = 1, 2, \ldots, \nu \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{smallmatrix}\right)$ existieren, dass die ν von einander unabhängigen Relationen:

$$\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{1l} A y_x^{(l)} = 0, \quad \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{2l} A y_x^{(l)} = 0, \ldots, \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu l} A y_x^{(l)} = 0$$

zwischen den Functionen $Ay_x^{(1)}, Ay_x^{(2)}, \ldots, Ay_x^{(n)}$ bestehen. Das soeben hergeleitete Gleichungssystem sagt aus, dass die ν Functionen

$$\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{1l} y_x^{(l)}, \quad \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{2l} y_x^{(l)}, \ldots, \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu l} y_x^{(l)}$$

ν unabhängige Integrale der linearen homogenen Differenzengleichung $Ay_x = 0$ sind. Die zwei linearen homogenen Differenzengleichungen $Py_x = 0$ und $Ay_x = 0$ haben daher ν linear unabhängige Integrale gemeinsam.

Angenommen $\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+1\, l} y_x^{(l)}$, wobei $\lambda_{\nu+1\, l\ (l = 1, 2, \ldots, n)}$ n Constanten bedeuten, sei ein $\nu+1$-tes gemeinsames partikuläres Integral der zwei Gleichungen $Py_x = 0$ und $Ay_x = 0$, und dieses Integral sei keine lineare homogene Combination mit konstanten Coefficienten von den schon gefundenen gemeinsamen Integralen, so folgt aus

$$A\left(\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+1\, l} y_x^{(l)}\right) = 0$$

eine $\nu+1$-te von den schon vorhandenen ν Relationen unabhängige Relation

$$\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+1\, l} A y_x^{(l)} = 0$$

zwischen den Funktionen $Ay_x^{(1)}, Ay_x^{(2)}, \ldots, Ay_x^{(n)}$. Da die Gleichung $Qy_x = 0$ von der Ordnung $n - \nu$ ist, so können zwischen den n Functionen $Ay_x^{(1)}, Ay_x^{(2)}, \ldots, Ay_x^{(n)}$, die unter sich die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen von $Qy_x = 0$ enthalten, nur ν unabhängige Relationen bestehen, daher ist unsere Annahme falsch. Mithin haben die zwei linearen homogenen Differenzengleichungen $Py_x = 0$ und $Ay_x = 0$ genau ν linear unabhängige Integrale gemeinsam. Hieraus aber folgt die Existenz einer linearen homogenen Differenzengleichung $Ry_x = 0$ von der Ordnung ν mit rationalen Coefficienten, welche die den zwei linearen homogenen Differenzengleichungen $Py_x = 0$ und $Ay_x = 0$ gemeinsamen ν linearen unabhängigen Integrale zum Fundamentalsystem besitzt[1]). Wir gewinnen also den Satz:

Gehört eine lineare homogene Differenzengleichung $n{-}\nu$-ter Ordnung mit einer linearen homogenen Differenzengleichung n-ter Ordnung zu derselben Art, so existiert eine lineare homogene Differenzen-

[1]) Vgl. Guldberg. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. B. 26.

gleichung ν*-ter Ordnung mit rationalen Coefficienten, deren sämmtliche Integrale der Differenzengleichung* n*-ter Ordnung genügen.*

Benützen wir den Begriff der Reducibilität einer linearen homogenen Differenzengleichung, wie es zuerst von Herrn S. Pincherle[1]) eingeführt worden ist, indem wir eine lineare homogene Differenzengleichung mit rationalen Coefficienten *reducibel* nennen, wenn sie mit einer ebenso beschaffenen linearen homogenen Differenzengleichung niedriger Ordnung ein Integral gemeinsam hat, und wenn nicht — *irreducibel* nennen, so lautet unser Satz:

Gehört eine lineare homogene Differenzengleichung $n-\nu$*-ter Ordnung mit einer linearen homogenen Differenzengleichung* n*-ter Ordnung zu derselben Art, so ist die letzte reducibel.*

Analog wie in der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen der Irreducibilitätsbegriff und Artbegriff mit der Rationalitätsgruppe der Gleichung zusammenhängt, so besteht in der Theorie der linearen homogenen Differenzengleichungen dieselbe enge Beziehung zwischen der Rationalitätsgruppe der Gleichung und den obengenannten Begriffen.

Ist G irgend eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in n Variablen und kann man diese Gruppe durch Einführung von neuen Variablen, welche lineare homogene Combinationen der alten Variablen mit konstanten Coefficienten sind, so transformieren, dass sich nach der Transformation bei allen Substitutionen der transformierten Gruppe ν der neuen Variablen, wobei $\nu < n$ ist, nur linear unter einander substituiren, so heisst, nach Loewy, die Gruppe G *reducibel*. Es gilt dann den Satz:

Eine jede reducible lineare homogene Differenzengleichung hat eine reducible Rationalitätsgruppe, und umgekehrt.

Es besteht nämlich der folgende Fundamentalsatz[2]): Hat man eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in n Variablen mit den folgenden zwei Eigenschaften:

1) eine jede rationale Differenzfunktion eines Fundamentalsystems von Integralen einer linearen homogenen Differenzengleichung n-ter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welche einen rationalen Werth hat, ändert bei allen Transformationen der Gruppe ihren Werth nicht;

[1]) S. Pincherle. Memorie d. R. Accademia di Bologna S. V., t. V.

[2]) Für den Begriff der Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differenzengleichung vgl. Guldberg: Comptes Rendus t. 137, p. 639 und S. Epsteen: Bulletin of the American Math. Society 2-nd S., Vol. 10, p. 499.

2) eine jede rationale Differenzfunktion, welche bei allen Transformationen der Gruppe ihren Werth nicht ändert, hat einen rationalen Werth, so ist die vorgelegte Gruppe die Rationalitätsgruppe der gegebenen Gleichung, und umgekehrt.

Ist nun die gegebene lineare homogene Differenzengleichung n-ter Ordnung reducibel, so existirt eine lineare homogene Differenzengleichung ν-ter Ordnung ($\nu < n$) mit rationalen Coefficienten, etwa die folgende

$$y_{x+\nu} + a_x^{(1)} y_{x+\nu-1} + \ldots + a_x^{(\nu)} y_x = 0 \tag{a}$$

deren sämtliche Lösungen auch Lösungen der gegebenen Gleichung sind. Sei nun:

$$y_x^{(1)},\ y_x^{(2)}, \ldots, y_x^{(\nu)}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen von (a), so muss bei der Rationalitätsgruppe G der gegebenen Gleichung der linearen Schar

$$\alpha_1 y_x^{(1)} + \alpha_2 y_x^{(2)} + \ldots + \alpha_\nu y_x^{(\nu)} \tag{b}$$

invariant bleiben, denn existierte es eine Transformation von G, die eine solche Lösung in eine Lösung $\overline{y}_x$ überführte, die nicht zu (b) gehörte, so müsste die Gleichung (a) — die linke Seite der Gleichung hat ja einen rationalen Werth (nämlich Null), also invariant bei dieser Transformation — von $\overline{y}_x$ befriedigt werden, was unmöglich ist.

Umgekehrt ist die Rationalitätsgruppe der gegebenen Gleichung reducibel, also etwa von der folgenden Form:

$$\begin{aligned}
\overline{y}_x^{(1)} &= e_{11}\, y_x^{(1)} + e_{12}\, y_x^{(2)} + \ldots + e_{1\nu}\, y_x^{(\nu)}, \\
\overline{y}_x^{(2)} &= e_{21}\, y_x^{(1)} + e_{22}\, y_x^{(2)} + \ldots + e_{2\nu}\, y_x^{(\nu)}, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\overline{y}_x^{(\nu)} &= e_{\nu 1}\, y_x^{(1)} + e_{\nu 2}\, y_x^{(2)} + \ldots e_{\nu\nu}\, y_x^{(\nu)}, \\
\overline{y}_x^{(\nu+1)} &= e_{\nu+1\,1}\, y_x^{(1)} + e_{\nu+1\,2}\, y_x^{(2)} + \ldots + e_{\nu+1\,\nu}\, y_x^{(\nu)} + e_{\nu+1\,\nu+1}\, y_x^{(\nu+1)} + \ldots + e_{\nu+1\,n}\, y_x^{(n)}, \\
\overline{y}_x^{(\nu+2)} &= e_{\nu+2\,1}\, y_x^{(1)} + \ldots + e_{\nu+2\,\nu}\, y_x^{(\nu)} + e_{\nu+2\,\nu+1}\, y_x^{(\nu+1)} + \ldots + e_{\nu+2\,n}\, y_x^{(n)}, \\
&\cdot\ \cdot \\
\overline{y}_x^{(1)} &= e_{n1}\, y_x^{(1)} + e_{n2}\, y_x^{(2)} + \ldots + e_{n\nu}\, y_x^{(\nu)} + e_{n\,\nu+1}\, y_x^{(\nu+1)} + \ldots + e_{nn}\, y_x^{(n)}
\end{aligned}$$

so sind die Coefficienten der linearen homogenen Differenzengleichung ν-ter Ordnung, wo $y_x^{(1)}, y_x^{(2)} \ldots y_x^{(\nu)}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden, invariant bei G und haben folglich einen rationalen Werth; die gegebene Gleichung ist also reducibel.

Aus diesen Bemerkungen folgt also, dass, wenn die Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differenzengleichung $Py_x = 0$ von der Ordnung n reducibel ist und in die Form

$$\begin{array}{c|c} G_{11} & 0 \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}\,;$$

gebracht werden kann, wobei G_{11} einen Inbegriff von Matrizes mit ν Zeilen und ν Colonnen, G_{21} einen Inbegriff von Matrizes von $n-\nu$ Zeilen und ν Colonnen, G_{22} einen Inbegriff von Matrizes mit $n-\nu$ Zeilen und $n-\nu$ Colonnen, $n > n - \nu > 0$, bedeutet, so giebt es stets eine lineare homogene Differenzengleichung $Ry_x = 0$ von der Ordnung ν mit rationalen Coefficienten, deren sämmtliche Integrale der Gleichung $Py_x = 0$ genügen und welche G_{11} zur Rationalitätsgruppe hat.

Nach diesen kurzen Auseinandersetzungen über den Zusammenhang zwischen dem Begriffe Irreducibilität und Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differenzengleichung wollen wir auch die Beziehung zwischen den Artbegriff und die Rationalitätsgruppe einer Differenzengleichung kurz besprechen.

Wir halten die obigen Bezeichnungen auf Seite 1 sq. bei und setzen:

$$t_x^{(1)} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{1\,l}\, y_x^{(l)}\,,\quad t_x^{(2)} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{2\,l}\, y_x^{(l)}\,, \dots,\; t_x^{(\nu)} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu\,l}\, y_x^{(l)}\,,$$

und ferner:

$$t_x^{(\nu+1)} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+1\,l}\, y_x^{(l)}\,,\quad t_x^{(\nu+2)} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+2\,l}\, y_x^{(l)}\,, \dots,\; t_x^{(n)} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{n\,l}\, y_x^{(l)}\,;$$

hierbei bedeuten $\lambda_{kl}\left(\begin{smallmatrix} k=\nu+1,\,\nu+2,\,\dots,\,n \\ l=1,\,2,\,\dots,\,n \end{smallmatrix}\right)$ ein System von $n(n-\nu)$ willkürlichen Constanten, die nur der Bedingung unterworfen sind, dass die Determinante $|\lambda_{kl}|$ von Null verschieden ist, damit die n Functionen $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \dots, t_x^{(n)}$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differenzengleichung $Py_x = 0$ bilden; die ersten ν Functionen $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \dots, t_x^{(\nu)}$ sind die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen der Differenzengleichung $Ry_x = 0$.

Bilden wir unter Zugrundelegung des Fundamentalsystems von Integralen $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \dots, t_x^{(n)}$ die Rationalitätsgruppe G der Differenzengleichung $Py_x = 0$, so erscheint dieselbe in der Form:

$$\begin{array}{c|c} G_{11} & 0 \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}\,;$$

hierbei bedeutet G_{11} die Rationalitätsgruppe von $Ry_x = 0$. Wir beweisen, dass G_{22} die Rationalitätsgruppe der Differenzengleichung $Qy_x = 0$ ist, die mit $Py_x = 0$ zu derselben Art gehört. Da

$$At_x^{(1)} = At_x^{(2)} = \dots = At_x^{(\nu)} = 0$$

ist, so folgt, dass die $n-\nu$ Functionen:

$$At_x^{(\nu+1)},\; At_x^{(\nu+2)}, \dots,\; At_x^{(n)}$$

die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen von $Qy_x = 0$ bilden. Eine Substitution C der Rationalitätsgruppe von $Py_x = 0$ wird wegen der besonderen Form der Gruppe G die Elemente $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \dots, t_x^{(n)}$ des Fundamentalsystems von $Py_x = 0$ überführen in

$$\begin{array}{l}
e_{11}\, t_x^{(1)} + e_{12}\, t_x^{(2)} + \dots + e_{1\nu}\, t_x^{(\nu)}\,, \\
e_{21}\, t_x^{(1)} + e_{22}\, t_x^{(2)} + \dots + e_{2\nu}\, t_x^{(\nu)}\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
e_{\nu 1}\, t_x^{(1)} + e_{\nu 2}\, t_x^{(2)} + \dots + e_{\nu\nu}\, t_x^{(\nu)}\,, \\
e_{\nu+1\,1}\, t_x^{(1)} + e_{\nu+1\,2}\, t_x^{(2)} + \dots + e_{\nu+1\,\nu}\, t_x^{(\nu)} + e_{\nu+1\,\nu+1}\, t_x^{(\nu+1)} + \dots + e_{\nu+1\,n}\, t_x^{(n)}\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
e_{n1}\, t_x^{(1)} + e_{n2}\, t_x^{(2)} + \dots + e_{n\nu}\, t_x^{(\nu)} + e_{n\,\nu+1}\, t_x^{(\nu+1)} + \dots + e_{nn}\, t_x^{(n)}\,.
\end{array}$$

Macht man davon Gebrauch, dass:

$$At_x^{(1)} = At_x^{(2)} = \dots = At_x^{(\nu)} = 0$$

so gehen durch die Substitution C die $n-\nu$ Functionen:

$$At_x^{(\nu+1)},\; At_x^{(\nu+2)}, \dots,\; At_x^{(n)}$$

über in:

$$\begin{array}{l}
e_{\nu+1\,\nu+1}\, At_x^{(\nu+1)} + e_{\nu+1\,\nu+2}\, At_x^{(\nu+2)} + \dots + e_{\nu+1\,n}\, At_x^{(n)}\,, \\
e_{\nu+2\,\nu+1}\, At_x^{(\nu+1)} + e_{\nu+2\,\nu+2}\, At_x^{(\nu+2)} + \dots + e_{\nu+2\,n}\, At_x^{(n)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
e_{n\,\nu+1}\, At_x^{(\nu+1)} + e_{n\,\nu+2}\, At_x^{(\nu+2)} + \dots + e_{nn}\, At_x^{(n)}\,.
\end{array}$$

Bezeichnen wir die soeben hingeschriebene Substitution zwischen den Elementen:

$$At_x^{(\nu+1)},\ At_x^{(\nu+2)}, \dots, At_x^{(n)}$$

eines Fundamentalsystems von Integralen der linearen homogenen Differenzengleichung $Qy_x = 0$ mit C_{22}, so ergiebt sich infolge der besonderen Form der Gruppe G, dass die Gesamtheit aller Transformationen C_{22}, welche allen Transformationen C der Rationalitätsgruppe G von $Py_x = 0$ entsprechen, ebenfalls eine Gruppe bilden; dies ist die Gruppe G_{22}.

Betrachtet man irgend eine rationale Differenzfunktion von

$$At_x^{(\nu+1)},\ At_x^{(\nu+2)}, \dots, At_x^{(n)}$$

welche einen rationalen Werth hat, so bleibt diese, als Function von $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \dots, t_x^{(n)}$ aufgefasst, bei einer jeden Transformation C der Rationalitätsgruppe G von $Py_x = 0$ ihrem Werth nach ungeändert; einer Substitution C für die n Functionen $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \dots, t_x^{(n)}$ entspricht die Substitution C_{22} für die $n-\nu$ Functionen:

$$At_x^{(\nu+1)},\ At_x^{(\nu+2)}, \dots, At_x^{(n)};$$

daher bleibt eine jede rationale Differenzfunction von

$$At_x^{(\nu+1)},\ At_x^{(\nu+2)}, \dots, At_x^{(n)},$$

welche einen rationalen Werth hat, bei allen Substitutionen der Gruppe G_{22} ihrem Werth nach ungeändert.

Wir können aber auch umgekehrt zeigen: Bleibt eine rationale Differenzfunction von $At_x^{(\nu+1)} \dots At_x^{(n)}$ bei allen Substitutionen der Gruppe G_{22} ihrem Werth nach ungeändert, so ist sie eine rationale Function. Bleibt nämlich die Function, aufgefasst als Funktion von $At_x^{(\nu+1)} \dots At_x^{(n)}$ bei den Substitutionen C_{22} von G_{22} ihrem Werth nach ungeändert, so bleibt sie, als Function von $t_x^{(1)}, t_x^{(2)} \dots t_x^{(n)}$ bei allen Substitutionen C von G ihrem Werth nach ungeändert. Da aber G die Rationalitätsgruppe der linearen homogenen Differenzengleichung $Py_x = 0$ für das Fundamentalsystem $t_x^{(1)}, t_x^{(2)}, \dots, t_x^{(n)}$ von Integralen von $Py_x = 0$ ist, so ist die betrachtete Function eine rationale Function. Nach dem Satze Seite 4—5 ist also die Gruppe G_{22} die Rationalitätsgruppe der Gleichung $Qy_x = 0$. Wir haben also den folgenden Satz:

Gehört die lineare homogene Differenzengleichung $Qy_x = 0$ von der Ordnung $m = n - \nu$ mit der linearen homogenen Differenzengleichung $Py_x = 0$ von der

Ordnung n zu derselben Art, so kann man die Rationalitätsgruppe G von $Py_x = 0$ in die Form:

$$\begin{array}{c|c} G_{11} & 0 \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array}$$

bringen; hierbei ist G_{11} die Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differenzengleichung $Ry_x = 0$ von der ν-ter Ordnung, deren sämmtliche Integrale $Py_x = 0$ genügen; G_{22} ist die Rationalitätsgruppe der Differenzengleichung $Qy_x = 0$.

Für $\nu = 0$ hat man den Satz:

Zwei lineare homogene Differenzengleichungen derselben Ordnung, die von derselben Art sind, haben dieselbe Rationalitätsgruppe.

Christiania, im November 1904.