die längs der betrachteten orthogonalen Trajectorien liegen, bekommt man die Formel:

$$S_1 = -\frac{\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2}}{\sum\left(\frac{d\alpha}{d\Phi}\right)^2}\begin{vmatrix} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma \\ \frac{d\alpha}{d\Phi}\,, & \frac{d\beta}{d\Phi}\,, & \frac{d\gamma}{d\Phi} \\ \frac{d^2\alpha}{d\Phi^2}\,, & \frac{d^2\beta}{d\Phi^2}\,, & \frac{d^2\gamma}{d\Phi^2} \end{vmatrix}$$

und für die Torsion der Schar L die Formel:

(55) $$S = S_1\, a'\,.$$

W. SIERPIŃSKI.

O PEWNEM ZAGADNIENIU
Z RACHUNKU FUNKCYJ ASYMPTOTYCZNYCH.

Pod tytułem powyższym ukazała się w „Journal für reine und angewandte Mathematik" (T. **126**, zeszyt 4) praca G. Woronoja, zajmująca się nieznaną przedtem metodą obliczania wartości asymptotycznej funkcyi liczbowej

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x} E\frac{x}{n}\,,$$

gdzie Ex oznacza liczbę całkowitą, czyniącą zadość warunkom:

$$x-1 < Ex \leqslant x\,.$$

Autor dowiódł nowego twierdzenia, dotyczącego tej sumy: „Funkcya $x\,(\lg x + 2\,C - 1)$, gdzie C jest stałą Eulera, przedstawia funkcyę liczbową $\sum\limits_{n>0}^{n\leqslant x} E\frac{x}{n}$ z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcyi $\sqrt[3]{x}\lg x$" i dodaje, iż metoda, którą się w tym celu posługuje, może być stosowana do badania wartości asymptotycznych rozmaitych sum podwójnych.

Praca niniejsza ma na celu zastosowanie metody Woronoja do obliczenia wartości asymptotycznej funkcyi liczbowej

$$\sum_{n\geqslant 0}^{n<\sqrt{x}} E\sqrt{x-n^2}\,.$$

Miejscami powtarzamy prawie dosłownie całe ustępy z wymienionej rozprawy Woronoja, co uważaliśmy za stosowniejsze, niż podawać odsyłacze, gdyż w ten sposób praca nasza sama w sobie przedstawia pewną całość, zaznajamiającą czytelnika z nową i płodną metodą badania wartości asymptotycznych sum podwójnych na łatwym przykładzie, który też sam przez się przedstawia pewien interes naukowy.

WSTĘP.

Niech

$$F(x) = \sum_{(S)} f(m, n)$$

gdzie dowolna funkcya $f(m,n)$ zmiennych całkowitych m i n ma wartości w zupełności określone w obszarze (S), wyznaczonym przez nierówność

$$(S)\ldots \qquad m^2+n^2 \leqslant x\,, \quad \text{gdzie} \quad x \geqslant 1\,.$$

W przypadku najprostszym, gdy $f(m,n)=1$, funkcya $F(x)$ może być przedstawiona w postaci

$$F(x) = 1 + 4 \sum_{n \geqslant 0}^{n < \sqrt{x}} E\sqrt{x-n^2}\,.$$

Stosując znane twierdzenie geometryczne Lejeune-Dirichleta[1]) o zależności pomiędzy polem figury płaskiej a liczbą punktów siatkowych wewnątrz niej zawartych, z łatwością znajdziemy na $F(x)$ wyrażenie asymptotyczne

$$\pi x\,,$$

i nadto jeśli założymy:

$$F(x) = \pi x + r(x)\,,$$

[1]) Dirichlet. Recherches etc. § 1. Patrz też: Vorles. über Zahlenth. von Dirichl. herausg. von Dedekind. Braunschweig 1871. Supplem. III.

to reszta $r(x)$ czyni zadość nierówności

$$|\,r(x)\,| < A\sqrt{x}\,,$$

przy wszelkiem $x \geqslant 1$, gdzie A oznacza pewną stałą.

Dowodzenie tego twierdzenia polega na tej prostej uwadze, iż zbiór punktów o spółrzędnych całkowitych (prostokątnych) m i n, czyniących zadość nierówności

$$m^2+n^2 \leqslant x\,,$$

przedstawia punkty o spółrzędnych całkowitych, leżące wewnątrz koła oraz na okręgu koła, zakreślonego promieniem $\sqrt{x}$ około początku spółrzędnych.

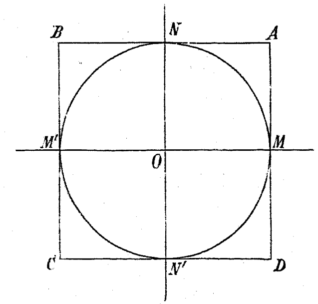
W pracy niniejszej dowodzimy następującego nowego twierdzenia o funkcyi $F(x)$: „Funkcya πx przedstawia funkcyę liczbową $F(x)$ z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcyi $\sqrt[3]{x}$“.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

PRZEKSZTAŁCENIE ZASADNICZE SUMY $\sum_{(S)} f(m,n)$, $(S\ldots\ m^2+n^2 \leqslant x)$.

1. Oznaczmy przez (S) zbiór punktów o spółrzędnych całkowitych m, n, czyniących zadość nierówności

$$(S)\ldots \quad m^2+n^2 \leqslant x\,.$$



Około koła, wyznaczonego przez równanie

$$m^2+n^2 = x\,,$$

opiszmy kwadrat $ABCD$, którego boki są równoległe do osi spółrzędnych.

Oznaczmy przez (S_*) zbiór punktów o spółrzędnych całkowitych, które znajdują się na kwadracie $ABCD$ i wewnątrz niego; przez (S_I), (S_{II}), (S_{III}), (S_{IV}) oznaczmy odpowiednio zbiory punktów o spółrzędnych całkowitych, które leżą wewnątrz trójkątów krzywolinjowych MAN, NBM',

$M'CN'$ i $N'DM$ oraz na ich bokach, wyłączając punkty, leżące na kole $MNM'N'M$.

Te pięć obszarów będą określone przez nierówności:

$$
\begin{array}{llll}
(S_*) \ldots & -\sqrt{x} \leqslant m \leqslant \sqrt{x}, & -\sqrt{x} \leqslant n \leqslant \sqrt{x} & \\
(S_I) \ldots & 0 < m \leqslant \sqrt{x}, & 0 < n \leqslant \sqrt{x}, & m^2+n^2 > x, \\
(S_{II}) \ldots & -\sqrt{x} \leqslant m < 0, & 0 < n \leqslant \sqrt{x}, & m^2+n^2 > x, \\
(S_{III}) \ldots & -\sqrt{x} \leqslant m < 0, & -\sqrt{x} \leqslant n < 0, & m^2+n^2 > x, \\
(S_{IV}) \ldots & 0 < m \leqslant \sqrt{x}, & -\sqrt{x} \leqslant n < 0, & m^2+n^2 > x.
\end{array}
$$

Wypływa stąd, iż jeśli $f(m, n)$ posiada określone znaczenie w obszarze (S_*), to

$$\sum_{(S)} f(m,n) = \sum_{(S_*)} f(m,n) - \sum_{(S_I)} f(m,n) - \sum_{(S_{II})} f(m,n) - \sum_{(S_{III})} f(m,n) - \sum_{(S_{IV})} f(m,n)$$

lub też

$$\sum_{(S)} f(m,n) = \sum_{(S_*)} f(m,n) - \sum_{(S_I)} [f(m,n)+f(-m,n)+f(-m,-n)+f(m,-n)].$$

Dość będzie przeto (przy dowolnej funkcyi f) obliczyć tylko sumy:

$$\sum_{(S_*)} f(m,n), \quad \sum_{(S_I)} f(m,n).$$

Kładąc $f(m, n) = 1$, otrzymamy:

$$(*) \qquad \sum_{(S)} 1 = \sum_{(S_*)} 1 - 4 \sum_{(S_I)} 1 = (2E\sqrt{x}+1)^2 - 4 \sum_{(S_I)} 1.$$

PRZEKSZTAŁCENIE SUMY $\sum\limits_{(S_I)} f(m, n)$.

2. Na kole, wyznaczonem przez równanie

$$m^2 + n^2 = x$$

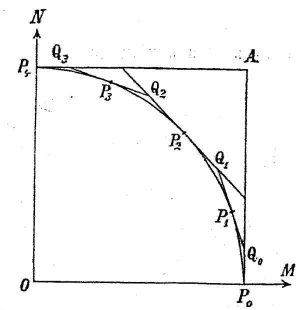
weźmy k punktów $P_1, P_2, \ldots P_k$ o spółrzędnych $\mu_i, \nu_i \; (i=1,2,\ldots k)$, czyniących zadość warunkom:

$$\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_k > 0$$

oraz

$$0 < \nu_1 < \ldots < \nu_{k-1} < \nu_k.$$

Poprowadźmy styczne do koła w obranych punktach oraz w punktach P_0 i P_{k+1}, leżących na osiach spółrzędnych.



Oznaczmy punkty przecięcia się sąsiednich stycznych przez $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$. W ten sposób utworzymy $k+1$ trójkątów krzywoliniowych $P_i\, Q_i\, P_{i+1}\; (i=0,1,\ldots k)$ oraz wielokąt $AQ_0\, Q_1 \ldots Q_k$.

Oznaczmy przez (S_i) zbiór punktów trójkąta krzywoliniowego $P_i\, Q_i\, P_{i+1}\; (i=0,1,\ldots k)$, należących do obszaru (S_I) (a więc z wyłączeniem punktów łuku $P_i\, P_{i+1}$); przez (Σ) oznaczmy zbiór punktów wielokąta $AQ_0\, Q_1 \ldots Q_k$ z wyłączeniem punktów linii łamanej $Q_0\, Q_1 \ldots Q_k$.

Obszar (S_I) podzieliliśmy w ten sposób na $k+2$ oddzielne obszary $(S_0), (S_1), \ldots (S_k)$ oraz (Σ); wypływa stąd oczywista tożsamość:

$$\sum_{(S_I)} f(m,n) = \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(S_i)} f(m,n) + \sum_{(\sigma)} f(m,n).$$

Obszary $(S_0), (S_1), \ldots (S_k)$ wyznaczymy przez nierówności:

$$\underset{(i=0,1,\ldots k)}{(S_i) \ldots} \begin{cases} \mu_{i+1}\, \mu_i + \nu_{i+1}\, \nu_i < m\, \mu_i + n\, \nu_i \leqslant x \\ \mu_i\, \mu_{i+1} + \nu_i\, \nu_{i+1} < m\, \mu_{i+1} + n\, \nu_{i+1} \leqslant x, \quad m^2+n^2 > x, \end{cases}$$

zwracając uwagę na równania stycznych i równanie koła.

Co się zaś tyczy obszaru (Σ), to wyznaczymy go, podzieliwszy wielokąt $AQ_0\, Q \ldots Q_k$ na k trójkątów, utworzonych przez $k+2$ styczne do koła.

Zbudowanie tych trójkątów oraz ich określenie analityczne zależne jest od obioru punktów $P_1, P_2, \ldots P_k$ na kole.

ALGORYTM DLA OBIORU PUNKTÓW $P_1, P_2, \ldots P_k$ NA KOLE.

3. Twierdzenie pomocnicze. Niech t będzie liczbą dowolną, czyniącą zadość warunkowi

$$t \geqslant 2.$$

Przypuśćmy, iż wszystkie układy dwóch liczb całkowitych dodatnich a i b, czyniących zadość nierówności

$$a^2+b^2 \leqslant t$$

i nie mających wspólnego dzielnika, tworzą szereg ułamków:

$$\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2} > \ldots > \frac{a_k}{b_k}.$$

Kładąc:

$$a_0=1, \quad b_0=0 \quad \text{oraz} \quad a_{k+1}=0, \quad b_{k+1}=1,$$

będziemy mieli:

$$a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i = 1$$

dla $i=0,1,2,\ldots k$.

Weźmy cztery liczby $\geqslant 0$:

$$\alpha', \ \beta' \quad \text{oraz} \quad \alpha'', \ \beta'',$$

związane równaniem

$$\alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = 1;$$

wypływa stąd:

$$\frac{\alpha'}{\beta'} > \frac{\alpha''}{\beta''}.$$

Kładąc:

$$\alpha=\alpha'+\alpha'' \quad \text{oraz} \quad \beta=\beta'+\beta'',$$

utworzymy szereg ułamków, przyczem:

$$\frac{\alpha'}{\beta'} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha''}{\beta''}$$

tudzież

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' = 1, \quad \alpha\beta'' - \alpha''\beta = 1.$$

W ten sam sposób możemy między ułamkami

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \text{ i } \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{lub też} \quad \frac{\alpha}{\beta} \text{ i } \frac{\alpha''}{\beta''}$$

wstawić nowe ułamki i t. d.

Przypuśćmy, żeśmy wstawili w ten sposób s ułamków między ułamkami $\frac{\alpha'}{\beta'}$ i $\frac{\alpha''}{\beta''}$; otrzymamy szereg ułamków:

$$(*) \qquad \frac{\alpha'}{\beta'} > \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \ldots > \frac{\alpha_s}{\beta_s} > \frac{\alpha''}{\beta''}.$$

Oznaczając

$$\alpha'=\alpha_0, \quad \beta'=\beta_0 \quad \text{oraz} \quad \alpha''=\alpha_{s+1}, \quad \beta''=\beta_{s+1},$$

będziemy mieli:

$$(**) \qquad \alpha_i\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}\beta_i = 1. \qquad (i=0,1,\ldots s)$$

W razie, jeżeli

$$\alpha'^2+\beta'^2 \leqslant t, \quad \alpha''^2+\beta''^2 \leqslant t \quad \text{oraz} \quad (\alpha'+\alpha'')^2+(\beta'+\beta'')^2 \leqslant t,$$

możemy utworzyć szereg (*) w ten sposób, iżby zachowane były nierówności:

$$\alpha_i^2+\beta_i^2 \leqslant t \qquad (i=0,1,\ldots s+1)$$

oraz

$$(\alpha_i+\alpha_{i+1})^2+(\beta_i+\beta_{i+1})^2 > t. \qquad (i=0,1,\ldots s).$$

Przypuszczając to, przyjmijmy:

$$\alpha'=1, \quad \beta'=0 \quad \text{oraz} \quad \alpha''=0, \quad \beta''=1.$$

Szereg F a r e y a ułamków (*) jest w tym razie szeregiem

$$(***) \qquad \frac{a_0}{b_0} > \frac{a_1}{b_1} > \ldots > \frac{a_k}{b_k} > \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}.$$

Aby to pokazać, rozpatrzmy jakikolwiek ułamek $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$, należący do szeregu (*) $(i=1,2,\ldots s)$. Z założenia $\alpha_i^2+\beta_i^2 \leqslant t$ i na podstawie równania (**) liczby całkowite α_i i β_i nie posiadają wspólnego dzielnika. Wypływa stąd, iż ułamek $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ należy do szeregu (***).

Przypuśćmy teraz, iż istnieje ułamek $\frac{a}{b}$ wśród szeregu ułamków (***), nie należący do szeregu (*). W tym ostatnim znajdziemy dwa ułamki sąsiednie $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ i $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}}$, czyniące zadość warunkom:

$$\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} > \frac{a}{b} > \frac{\alpha_{\nu+1}}{\beta_{\nu+1}};$$

wypływa stąd:

$$a_\nu b - \beta_\nu a > 0 \quad \text{oraz} \quad a\beta_{\nu+1} - b\,a_{\nu+1} > 0$$

lub też, co wychodzi na to samo:

$$a_\nu b - \beta_\nu a \geqslant 1 \quad \text{oraz} \quad a\beta_{\nu+1} - b\,a_{\nu+1} \geqslant 1\,.$$

Dodając te nierówności, pomnożywszy je odpowiednio przez $a_{\nu+1}$ i a_ν, dostaniemy:

$$a\,(a_\nu \beta_{\nu+1} - a_{\nu+1}\beta_\nu) \geqslant a_\nu + a_{\nu+1}\,,$$

a więc wskutek (**) będzie:

$$a \geqslant a_\nu + a_{\nu+1}\,.$$

W tenże sam sposób znajdziemy:

$$b \geqslant \beta_\nu + \beta_{\nu+1}\,,$$

skąd

$$a^2 + b^2 \geqslant (a_\nu + a_{\nu+1})^2 + (\beta_\nu + \beta_{\nu+1})^2\,,$$

czyli

$$a^2 + b^2 > t\,,$$

co przeczy założeniu.

A więc dowiedliśmy tożsamości szeregów (***) i (*). Równania (**) mogą być w tym przypadku napisane tak:

$$a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i = 1\,. \qquad (i = 0, 1, \ldots k)$$

W n i o s e k. Wstawiając według wskazanego wyżej sposobu między liczbami $\frac{1}{0}$ i $\frac{0}{1}$ wszystkie ułamki $\frac{\alpha}{\beta}$, czyniące zadość warunkowi

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqslant t\,,$$

otrzymamy wszystkie układy liczb dodatnich całkowitych a i b, nie posiadających wspólnego dzielnika i czyniących zadość nierówności:

$$a^2 + b^2 \leqslant t\,.$$

4. Rozpatrzmy bliżej przypadek $t = 25$.

Utwórzmy sumy kwadratów liczb całkowitych, dodatnich, względnie pierwszych, nie przewyższające 25:

$$1^2+1^2,\ 1^2+2^2,\ 1^2+3,\ 1^2+4^2,\ 2^2+1^2,\ 2^2+3^2,\ 3^2+1^2,\ 3^2+2^2,\ 3^2+4^2,\ 4^2+1^2,\ 4^2+3^2.$$

W ten sposób utworzymy szereg ułamków:

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{1},\ \frac{4}{3}.$$

Porządkując je według wielkości, otrzymamy szukany szereg ułamków:

$$\frac{4}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}.$$

Utworzymy tenże szereg w inny sposób. Wstawimy między ułamkami $\frac{1}{0}$ i $\frac{0}{1}$ ułamek $\frac{1}{1}$; między ułamkami $\frac{1}{0}$ i $\frac{1}{1}$ wstawimy ułamek $\frac{2}{1}$, a między ułamkami $\frac{1}{1}$ i $\frac{0}{1}$ ułamek $\frac{1}{2}$; utworzymy w ten sposób szereg F a r e y a:

$$\frac{1}{0},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{0}{1}.$$

Wstawiając odpowiednie ułamki między sąsiedniemi ułamkami tego szeregu, utworzymy szereg F a r e y a:

$$\frac{1}{0},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{0}{1}.$$

Nie możemy już wstawiać ułamków pomiędzy ułamkami sąsiedniemi

$$\frac{3}{1},\ \frac{2}{1};\quad \frac{2}{1},\ \frac{3}{2};\quad \frac{2}{3},\ \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$$

gdyż wstawione ułamki $\frac{a}{b}$ nie czyniłyby zadość warunkowi

$$a^2 + b^2 \leqslant 25\,.$$

Wstawiwszy ułamki pomiędzy pozostałemi ułamkami, otrzymamy ostatecznie szukany szereg F a r e y a:

$$\frac{1}{0},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{0}{1}.$$

5. Algorytm. Obierzmy punkty $P_1, P_2, \dots P_k$ na kole, określonem przez równanie

$$m^2 + n^2 = x\,,$$

oznaczając przez

$$\mu_i = \frac{a_i\sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} \quad \text{oraz} \quad \nu_i = \frac{b_i\sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}}$$

spółrzędne μ_i i ν_i punktu P_i $(i = 1, 2, \dots k)$.

Ponieważ punkty koła P_0 i P_{k+1} leżą na osiach spółrzędnych, mamy:

$$\mu_0 = \sqrt{x}\,,\quad \nu_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad \mu_{k+1} = 0\,,\quad \nu_{k+1} = \sqrt{x}\,.$$

Wypływa stąd, że spółrzędne tych punktów również mogą być wyznaczone przy pomocy ogólnych wzorów na μ_i i ν_i, gdyż wyżej oznaczyliśmy

$$a_0 = 1\,,\quad b_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad a_{k+1} = 0\,,\quad b_{k+1} = 1\,.$$

PRZEKSZTAŁCENIE SUMY $\sum\limits_{(\sigma)} f(m, n)$.

6. Na podstawie wprowadzonego algorytmu każdy ułamek szeregu Fareya

$$(1) \qquad \frac{1}{0}\,,\ \frac{a_1}{b_1}\,,\ \frac{a_2}{b_2}\,,\dots \frac{a_k}{b_k}\,,\ \frac{0}{1}$$

wyznacza jeden punkt P_i $(i = 0, 1, \dots k+1)$ na kole, a więc i jedną styczną do koła, poprowadzoną w punkcie P_i.

Przypomnijmy, żeśmy utworzyli szereg Fareya (1) przy pomocy następujących po sobie wstawiań. Przypuśćmy, żeśmy wstawiali ułamki w następującym porządku:

1) między ułamkami $\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}$ i $\frac{\alpha_1''}{\beta_1''}$ wstawiliśmy ułamek $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$

2) „ „ $\frac{\alpha_2'}{\beta_2'}$ i $\frac{\alpha_2''}{\beta_2''}$ „ „ $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$

. . . .

k) „ „ $\frac{\alpha_k'}{\beta_k'}$ i $\frac{\alpha_k''}{\beta_k''}$ „ „ $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$.

Szereg ułamków

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}\,,\ \frac{\alpha_2}{\beta_2}\,,\dots \frac{\alpha_k}{\beta_k}$$

różni się od szeregu ułamków

$$\frac{a_1}{b_1}\,,\ \frac{a_2}{b_2}\,,\dots \frac{a_k}{b_k}$$

tylko porządkiem wyrazów.

Każda para ułamków $\frac{\alpha_i'}{\beta_i'}$ i $\frac{\alpha_i''}{\beta_i''}$, jak również wstawiony ułamek $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ $(i=1,2,\dots k)$, należy do szeregu Fareya (1); trzy te ułamki określają przeto trzy styczne do koła.

Oznaczmy trójkąt, utworzony przez te trzy styczne, symbolem

$$\left[\frac{\alpha_i'}{\beta_i'}\,,\ \frac{\alpha_i''}{\beta_i''}\right]. \qquad (i=1,2,\dots k)$$

Zbiór k trójkątów

$$\left[\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}\,,\ \frac{\alpha_1''}{\beta_1''}\right],\ \left[\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}\,,\ \frac{\alpha_2''}{\beta_2''}\right],\dots \left[\frac{\alpha_k'}{\beta_k'}\,,\ \frac{\alpha_k''}{\beta_k''}\right]$$

tworzy wielokąt $AQ_0Q_1\dots Q_k$. By tego dowieść, dość rozpatrzyć wielokąty, odpowiadające rozmaitym wartościom t.

Gdy t zmienia się w granicach

$$2 \leqslant t < 5\,,$$

odpowiedni szereg Fareya będzie:

$$\frac{1}{0}\,,\ \frac{1}{1}\,,\ \frac{0}{1}$$

i wielokąt AQ_0Q_1 jest w tym razie trójkątem, oznaczonym przez symbol $\left[\frac{1}{0}\,,\ \frac{0}{1}\right]$.

Zmieniając t w granicach

$$5 \leqslant t < 10\,,$$

otrzymamy szereg Fareya

$$\frac{1}{0}\,,\ \frac{2}{1}\,,\ \frac{1}{1}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{0}{1}$$

i wielokąt $AQ_0\,Q_1\,Q_2\,Q_3$ składa się w tym razie z trzech trójkątów

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{0}{1}\right], \quad \left[\frac{1}{0}, \frac{1}{1}\right], \quad \left[\frac{1}{1}, \frac{0}{1}\right].$$

Gdy t zmienia się w granicach

$$10 \leqslant t < 13,$$

powinniśmy do tych trójkątów dołączyć jeszcze dwa:

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{2}{1}\right] \quad \text{oraz} \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{0}{1}\right]$$

dla utworzenia nowego wielokątu $AQ_0\,Q_1 \ldots Q_5$ i t. d.

7. Oznaczyliśmy wyżej przez $(\boldsymbol{\Sigma})$ zbiór punktów wielokąta $AQ_0Q_1 \ldots Q_k$ z wyłączeniem punktów linii łamanej $Q_0\,Q_1 \ldots Q_k$ (patrz art. 2-gi).

Oznaczmy przez $(\boldsymbol{\Sigma}_i)$ zbiór punktów trójkąta $\left[\frac{\alpha_i'}{\beta_i'}, \frac{\alpha_i''}{\beta_i''}\right]$ z wyłączeniem punktów stycznej, odpowiadającej ułamkowi $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$.

Podzielimy w ten sposób obszar $(\boldsymbol{\Sigma})$ na k oddzielnych obszarów $(\boldsymbol{\Sigma}_1), (\boldsymbol{\Sigma}_2), \ldots (\boldsymbol{\Sigma}_k)$, a więc będziemy mieli tożsamość:

$$\sum_{(\sigma)} f(m, n) = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{(\sigma_i)} f(m, n). \tag{2}$$

Biorąc pod uwagę równania stycznych do koła, tworzących trójkąt $\left[\frac{\alpha_i'}{\beta_i'}, \frac{\alpha_i''}{\beta_i''}\right]$, wyznaczymy obszar $(\boldsymbol{\Sigma}_i)$ przy pomocy następujących nierówności:

$$(\boldsymbol{\Sigma}_i) \ldots \quad m\,\alpha_i' + n\,\beta_i' \leqslant \sqrt{x\,(\alpha_i'^2 + \beta_i'^2)}, \quad m\,\alpha_i'' + n\,\beta_i'' \leqslant \sqrt{x\,(\alpha_i''^2 + \beta_i''^2)}$$

oraz

$$m\,\alpha_i + n\,\beta_i > \sqrt{x\,(\alpha_i^2 + \beta_i^2)}. \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

WZÓR ZASADNICZY NA PRZEKSZTAŁCENIE SUMY $\sum\limits_{(S_I)} f(m, n)$.

8. Przedstawiliśmy wyżej sumę $\sum\limits_{(S_I)} f(m, n)$ w postaci:

$$\sum_{(S_I)} f(m, n) = \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(S_I)} f(m, n) + \sum_{(\sigma)} f(m, n).$$

Na mocy równości (2) otrzymamy wzór:

$$\sum_{(S_I)} f(m, n) = \sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(S_i)} f(m, n) + \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{(\sigma_i)} f(m, n).$$

Obszar (S_i) $(i = 0, 1, \ldots k)$ określiliśmy przez nierówności:

$$\mu_{i+1}\,\mu_i + \nu_{i+1}\,\nu_i < m\,\mu_i \;\; + n\,\nu_i \;\; \leqslant x$$

$$\mu_i\,\mu_{i+1} + \nu_i\,\nu_{i+1} < m\,\mu_{i+1} + n\,\nu_{i+1} \leqslant x, \quad m^2 + n^2 > x: \qquad (i = 0, 1, \ldots k)$$

Jeżeli przypomnimy, żeśmy założyli:

$$\mu_i = \frac{a_i \sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \quad \nu_i = \frac{b_i \sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \qquad (i = 0, 1, \ldots k+1)$$

to przedstawimy nierówności poprzedzające w postaci:

$$(1) \quad (S_i) \ldots \begin{cases} (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\dfrac{x}{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}} < m\,a_i \;\; + n\,b_i \;\; \leqslant \sqrt{x\,(a_i^2 + b_i^2)}, \\ (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\dfrac{x}{a_i^2 + b_i^2}} < m\,a_{i+1} + n\,b_{i+1} \leqslant \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)}, \\ \qquad m^2 + n^2 > x. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots k) \end{cases}$$

9. Sumy $\sum\limits_{(S_i)} f(m, n)$ oraz $\sum\limits_{(\sigma_i)} f(m, n)$ mogą być przedstawione w innej postaci przy pomocy przekształcenia zmiennych m i n.

Połóżmy:

$$m\,a_i + n\,b_i = m' \quad \text{oraz} \quad m\,a_{i+1} + n\,b_{i+1} = n'. \tag{2}$$

Na mocy warunku

$$a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i = 1$$

równania poprzedzające dają nam:

$$(3)\qquad \begin{aligned} m &= m' b_{i+1} - n' b_i\,, \\ n &= -m' a_{i+1} + n' a_i\,. \end{aligned}$$

Równania (2) i (3) tworzą odpowiedniość jednoznaczną pomiędzy układami (m, n) zmiennych całkowitych m i n, oraz układami (m', n') zmiennych całkowitych m' i n'.

Oznaczmy przez (S_i') zbiór układów (m', n'), odpowiadający jednoznacznie obszarowi (S_i).

Nierówności (1), określające obszar (S_i), przejdą na mocy (2) i (3) na nierówności:

$$\text{(I)}\quad \underset{(i=0,1,\dots k)}{(S_i')\dots} \left\{ \begin{aligned} &(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}} < m' \leqslant \sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)}\,, \\ &(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_i^2 + b_i^2}} < n' \leqslant \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)}\,, \\ &(m' b_{i+1} - n' b_i)^2 + (-m' a_{i+1} + n' a_i)^2 > x\,, \end{aligned} \right.$$

określające odpowiedni obszar (S_i').

Na mocy (3) suma $\sum_{(S_i)} f(m, n)$ może być przedstawiona w postaci:

$$\sum_{(S_i)} f(m, n) = \sum_{(S'_i)} f(m' b_{i+1} - n' b_i\,, -m' a_{i+1} + n' a_i)\,. \quad (i = 0, 1, \dots k)$$

W tenże sam sposób, kładąc:

$$m\alpha_i' + n\beta_i' = m' \quad \text{oraz} \quad m\alpha_i'' + n\beta_i'' = n'\,,$$

na zasadzie nierówności dla (Σ_i), określimy przez nierówności:

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} &(\Sigma_i')\dots \quad m' \leqslant \sqrt{x(\alpha_i'^2 + \beta_i'^2)}\,, \quad n' \leqslant \sqrt{x(\alpha_i''^2 + \beta_i''^2)}\,, \\ &\qquad\qquad m' + n' > \sqrt{x(\alpha_i^2 + \beta_i^2)} \end{aligned}$$

obszar (Σ_i'), odpowiadający jednoznacznie obszarowi (Σ_i); suma $\sum_{(\sigma_i)} f(m, n)$ przedstawi się w postaci:

$$\sum_{(\sigma_i)} f(m, n) = \sum_{(\sigma'_i)} f(m'\beta_i'' - n'\beta_i'\,, -m'\alpha_i'' + n'\alpha_i')\,. \quad (i = 1, 2, \dots k)$$

Łącząc razem otrzymane rezultaty, dostajemy następujące twierdzenie zasadnicze:

Twierdzenie. Suma $\sum_{(S_I)} f(m, n)$ może być przedstawiona w postaci:

$$(*)\quad \begin{aligned} \sum_{(S_I)} f(m, n) = &\sum_{i=0}^{i=k} \sum_{(S'_i)} f(m' b_{i+1} - n' b_i\,, -m' a_{i+1} + n' a_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{(\sigma'_i)} f(m'\beta_i'' - n'\beta_i'\,, -m'\alpha_i'' + n'\alpha_i') \end{aligned}$$

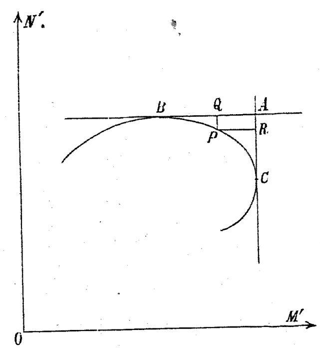
gdzie obszary (S_i') $(i=0,1,\dots k)$ oraz (Σ_i') $(i=1,2,\dots k)$ określone są przez nierówności (I) i (II).

ZASTOSOWANIE METODY DIRICHLETA DO PRZEKSZTAŁCENIA SUMY $\sum_{(S'_i)} f(m' b_{i+1} - n' b_i\,, -m' a_{i+1} + n' a_i)$.

10. Rozważmy elipsę, określoną przez równanie

$$(m' b_{i+1} - n' b_i)^2 + (-m' a_{i+1} + n' a_i)^2 = x$$

w spółrzędnych prostokątnych OM' i ON'.



Z punktu A o spółrzędnych

$$\sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)} \text{ i } \sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)}$$

poprowadźmy dwie styczne AB i AC do elipsy. Styczne te będą równoległe do osi spółrzędnych. Punkty trójkąta krzywoliniowego ABC, mające spółrzędne całkowite, tworzą obszar (S_i'), jeśli wyłączymy punkty łuku BPC elipsy.

Weźmy na elipsie punkt dowolny P, którego spółrzędne μ' i ν' czynią zadość warunkom:

$$\sqrt{x(a_i^2 + b_i^2)} \geqslant \mu' > (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2}}\,,$$

$$\sqrt{x(a_{i+1}^2 + b_{i+1}^2)} \geqslant \nu' > (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1}) \sqrt{\frac{x}{a_i^2 + b_i^2}}\,.$$

Punkt P będzie się w tym razie znajdował na elipsie między punktami B i C.

Poprowadźmy z punktu P dwie równoległe PR i PQ do osi spółrzędnych; utworzymy w ten sposób prostokąt $AQPR$ oraz dwa czworokąty krzywoliniowe $AQPC$ i $ARPB$.

Oznaczmy przez $(S'_{0\,i})$ zbiór punktów prostokąta $AQPR$, należących do obszaru (S'_i), z wyłączeniem punktów, leżących na bokach PQ i PR; przez $(S'_{1\,i})$ i $(S'_{2\,i})$ oznaczmy odpowiednio zbiory punktów czworokątów krzywoliniowych, należących do obszaru (S'_i): przez $(S'_{1\,i})$ — czworokąta $AQPC$, wyłączając punkty na bokach PQ i PC; przez $(S'_{2\,i})$ — czworokąta $ARPB$, wyłączając punkty na bokach PR i PB. Trzy te obszary będą określone przez nierówności:

$$(1)\qquad (S'_{0\,i})\ \dots\ \mu' < m' \leqslant \sqrt{x(a_i^2+b_i^2)}\,,\qquad \nu' < n' \leqslant \sqrt{x(a_{i+1}^2+b_{i+1}^2)}\,,$$

$$(2)\ (S'_{1\,i})\left\{\begin{array}{l} \mu' < m' \leqslant \sqrt{x(a_i^2+b_i^2)}\,,\ (a_i a_{i+1}+b_i b_{i+1})\sqrt{\dfrac{x}{a_i^2+b_i^2}} < n' \leqslant \sqrt{x(a_{i+1}^2+b_{i+1}^2)} \\ (m' b_{i+1} - n' b_i)^2 + (-m' a_{i+1} + n' a_i)^2 > x\,, \end{array}\right.$$

$$(3)\ (S'_{2\,i})\left\{\begin{array}{l} (a_i a_{i+1}+b_i b_{i+1})\sqrt{\dfrac{x}{a_{i+1}^2+b_{i+1}^2}} < m' \leqslant \sqrt{x(a_i^2+b_i^2)}\,,\ \nu' < n' \leqslant \sqrt{x(a_{i+1}^2+b_{i+1}^2)} \\ (m' b_{i+1} - n' b_i)^2 + (-m' a_{i+1} + n' a_i)^2 > x \end{array}\right.$$

przy $i = 0, 1, 2, \dots k$.

11. Obszary $(S'_{1\,i})$ i $(S'_{2\,i})$ mogą być określone przez prostsze nierówności.

Mnożąc obie części nierówności

$$(m' b_{i+1} - n' b_i)^2 + (-m' a_{i+1} + n' a_i)^2 > x$$

przez $a_i^2+b_i^2$, przedstawimy otrzymaną w ten sposób nierówność w postaci:

$$(4)\qquad [(a_i^2+b_i^2)\,n' - m'\,(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})]^2 > x\,(a_i^2+b_i^2) - m'^2\,.$$

W ostatniej nierówności liczba

$$(a_i^2+b_i^2)\,n' - m'\,(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})$$

jest dodatnia. W samej rzeczy, na mocy (2) mamy nierówności:

$$(a_i^2+b_i^2)\,n' > (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})\sqrt{x(a_i^2+b_i^2)}$$
$$-(a_i a_{i+} + b_i b_{i+1})\,m' \geqslant -(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})\sqrt{x(a_i^2+b_i^2)}\,.$$

Dodając te nierówności, znajdujemy:

$$(a_i^2+b_i^2)\,n' - (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})\,m' > 0\,.$$

Wypływa stąd, że nierówność (4) może być zastąpiona przez prostszą nierówność

$$(a_i^2+b_i^2)\,n' - (a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})\,m' > \sqrt{x(a_i^2+b_i^2) - m'^2}\,,$$

lub też, co na jedno wychodzi:

$$n' > \frac{(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})\,m' + \sqrt{x(a_i^2+b_i^2) - m'^2}}{a_i^2+b_i^2}\,.$$

Zważywszy, iż funkcya

$$\frac{(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})\,m' + \sqrt{x(a_i^2+b_i^2) - m'^2}}{a_i^2+b_i^2}$$

ciągle się zmniejsza w granicach

$$(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})\sqrt{\frac{x}{a_{i+1}^2+b_{i+1}^2}} < m' \leqslant \sqrt{x(a_i^2+b_i^2)}$$

i posiada minimum

$$(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})\sqrt{\frac{x}{a_i^2+b_i^2}}\,,$$

wnioskujemy, iż nierówności (2), określające obszar $(S'_{1\,i})$, mogą być zastąpione przez nierówności:

$$(S'_{1\,i})\left\{\begin{array}{l} \mu' < m' \leqslant \sqrt{x(a_i^2+b_i^2)} \\ \dfrac{(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})\,m' + \sqrt{x(a_i^2+b_i^2) - m'^2}}{a_i^2+b_i^2} < n' \leqslant \sqrt{x(a_{i+1}^2+b_{i+1}^2)}\,. \end{array}\right.$$

W tenże sam sposób określimy obszar $(S'_{1\,i})$ przy pomocy nierówności:

$$(S'_{2\,i})\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(a_i a_{i+1} + b_i b_{i+1})\,n' + \sqrt{x(a_{i+1}^2+b_{i+1}^2) - n'^2}}{a_{i+1}^2+b_{i+1}^2} < m' \leqslant \sqrt{x(a_i^2+b_i^2)} \\ \nu' < n' \leqslant \sqrt{x(a_{i+1}^2+b_{i+1}^2)}\,. \end{array}\right.$$

Na mocy określenia obszarów $(S'_{0\,i})$, $(S'_{1\,i})$ i $(S'_{2\,i})$ mieć będziemy wzór:

$$
(*)\quad \begin{aligned}
\sum_{(S'_i)} f(m'b_{i+1}-n'b_i,\,-m'a_{i+1}+n'a_i) &= \sum_{(S'_{1\,i})} f(m'b_{i+1}-n'b_i,\,-m'a_{i+1}+n'a_i)\\
&+\sum_{(S'_{2\,i})} f(m'b_{i+1}-n'b_i,\,-m'a_{i+1}+n'a_i)-\sum_{(S'_{0\,i})} f(m'b_{i+1}-n'b_i,\,-m'a_{i+1}+n'a_i).
\end{aligned}
$$

12. Spółrzędne μ' i ν' punktu P na elipsie związane są przez równanie tejże:

$$(\mu' b_{i+1}-\nu' b_i)^2+(-\mu' a_{i+1}+\nu' a_i)^2=x\,.$$

Dalej rozpatrywać będziemy tylko te wartości μ' i ν', dla których suma $\mu'+\nu'$ jest minimum. W tym celu powinniśmy założyć:

$$\mu'=(a_ic_i+b_i\partial_i)\sqrt{\frac{x}{c_i^2+\partial_i^2}} \quad \text{oraz} \quad \nu'=(a_{i+1}c_i+b_{i+1}\partial_i)\sqrt{\frac{x}{c_i^2+\partial_i^2}}$$

gdzie $c_i=a_i+a_{i+1}$, $\partial_i=b_i+b_{i+1}$.

CZĘŚĆ DRUGA.

OBLICZENIE WARTOŚCI PRZYBLIŻONEJ FUNKCYI LICZBOWEJ, PRZEDSTAWIONEJ PRZEZ SUMĘ $1+4\sum\limits_{n\geqslant 0}^{n<\sqrt{x}} E\sqrt{x-n^2}$.

13. Celem naszych badań jest obliczenie dla wielkich wartości x funkcyi liczbowej $F(x)$, przedstawionej przez sumę

$$F(x)=\sum_{(S)} f(m,n)$$

w najprostszym przypadku, gdy

$$f(m,n)=1\,.$$

Uskuteczniając sumowanie względem zmiennej całkowitej m w obszarze (S), określonym przez nierówność:

$$m^2+n^2\leqslant x,\quad \text{gdzie}\quad x>0$$

lub co na jedno wychodzi, przez nierówności:

$$-\sqrt{x-n^2}\leqslant m\leqslant\sqrt{x-n^2},\quad n^2\leqslant x,\quad \text{gdzie}\quad x>0,$$

przedstawimy funkcyę $F(x)$ w postaci:

$$F(x)=2\sum_{n\geqslant-\sqrt{x}}^{n\leqslant\sqrt{x}} E\sqrt{x-n^2}+2E\sqrt{x}+1=1+4\sum_{n\geqslant 0}^{n<\sqrt{x}} E\sqrt{x-n^2}\,.$$

Wzory (*) artykułów 1-go i 9-go prowadzą do nowego wyrażenia funkcyi $F(x)$:

$$F(x)=\sum_{(S)}1=(2E\sqrt{x}+1)^2-4\sum_{i=0}^{i=k}\sum_{(S'_i)}1-4\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{(\sigma'_i)}1$$

gdzie suma $\sum\limits_{(S'_i)}1$ przedstawia liczbę układów liczb całkowitych m' i n', czyniących zadość nierównościom:

$$
\begin{gathered}
(a_ia_{i+1}+b_ib_{i+1})\sqrt{\frac{x}{a_{i+1}^2+b_{i+1}^2}}<m'\leqslant\sqrt{x(a_i^2+b_i^2)}\,, \qquad (i=0,1,\dots k)\\
(a_ia_{i+1}+b_ib_{i+1})\sqrt{\frac{x}{a_i^2+b_i^2}}<n'\leqslant\sqrt{x(a_{i+1}^2+b_{i+1}^2)}\,,\\
(m'b_{i+1}-n'b_i)^2+(-m'a_{i+1}+n'a_i)^2>x\,.
\end{gathered}
$$

Suma $\sum\limits_{(\sigma'_i)}1$ przedstawia liczbę układów liczb całkowitych m' i n', czyniących zadość nierównościom:

$$m'\leqslant\sqrt{x(\alpha_i'^2+\beta_i'^2)}\,,\quad n'\leqslant\sqrt{x(\alpha_i''^2+\beta_i''^2)}\,,\quad m'+n'>\sqrt{x(\alpha_i^2+\beta_i^2)}\,,$$

gdzie

$$\alpha_i=\alpha_i'+\alpha_i''\quad\text{oraz}\quad\beta_i=\beta_i'+\beta_i''\,. \qquad (i=1,2,\dots k)$$

14. Niech a, b, a', b' będą liczby całkowite $\geqslant 0$, związane warunkiem

$$ab'-a'b=1\,.$$

Wprowadźmy dwa symbole:

$$s\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}\quad\text{oraz}\quad\sigma\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix},$$

określając je w następujący sposób:

O k r e ś l e n i e. Symbol $s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ przedstawia liczbę układów liczb całkowitych m i n, czyniących zadość nierównościom:

$$(aa'+bb')\sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}} < m \leqslant \sqrt{x(a^2+b^2)},$$

$$(aa'+bb')\sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}} < n \leqslant \sqrt{x(a'^2+b'^2)},$$

$$(mb'-nb)^2+(-ma'+na)^2 > x.$$

Symbol $\sigma\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ przedstawia liczbę układów liczb całkowitych m i n, czyniących zadość nierównościom:

$$m \leqslant \sqrt{x(a^2+b^2)}, \quad n \leqslant \sqrt{x(a'^2+b'^2)}, \quad m+n > \sqrt{x(c^2+\partial^2)}$$

gdzie

$$c = a+a' \quad \text{oraz} \quad \partial = b+b'.$$

Przy pomocy wprowadzonych symbolów przedstawimy funkcyę $F(x)$ w postaci:

$$F(x) = (2E\sqrt{x}+1)^2 - 4\sum_{i=0}^{i=k} s\begin{pmatrix} a_i & , b_i \\ a_{i+1}, & b_{i+1} \end{pmatrix} - 4\sum_{i=1}^{i=k} \sigma\begin{pmatrix} \alpha_i', & \beta_i' \\ \alpha_i'', & \beta_i'' \end{pmatrix}.$$

PRZEKSZTAŁCENIE SYMBOLU $s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$.

15. Metoda, wyłożona w art. 10—12, może nam służyć do przekształcenia symbolu $s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$.

Oznaczmy czasowo przez (S_0) liczbę układów (m, n), czyniących zadość nierównościom (porówn. art. 10, nierówn. 1):

$$(S_0)\begin{cases} (ac+b\partial)\sqrt{\dfrac{x}{c^2+\partial^2}} < m \leqslant \sqrt{x(a^2+b^2)} \\[2ex] (a'c+b'\partial)\sqrt{\dfrac{x}{c^2+\partial^2}} < n \leqslant \sqrt{x(a'^2+b'^2)}. \end{cases}$$

Przez (S_1) oznaczmy liczbę układów (m, n) czyniących zadość nierównościom:

$$(S_1)\begin{cases} (ac+b\partial)\sqrt{\dfrac{x}{c^2+\partial^2}} < m \leqslant \sqrt{x(a^2+b^2)} \\[2ex] \dfrac{(aa'+bb')m+\sqrt{x(a^2+b^2)-m^2}}{a^2+b^2} < n \leqslant \sqrt{x(a'^2+b'^2)} \end{cases}$$

(porówn. art. 10, nierówn. (1)) i, nakoniec przez (S_2) — liczbę układów (m, n), czyniących zadość nierównościom:

$$(S_2)\begin{cases} \dfrac{(aa'+bb')n+\sqrt{x(a'^2+b'^2)-n^2}}{a'^2+b'^2} < m \leqslant \sqrt{x(a^2+b^2)} \\[2ex] (a'c+b'\partial)\sqrt{\dfrac{x}{c^2+\partial^2}} < n \leqslant \sqrt{x(a'^2+b'^2)} \end{cases}$$

(porówn. art. 10, nierówn. (3)).

Na mocy wzoru (*) z art. 11-go będziemy mieli:

$$s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = (S_1)+(S_2)-(S_0).$$

Oznaczmy dla skrócenia:

$$\mu = (ac+b\partial)\sqrt{\frac{x}{c^2+\partial^2}}, \quad \nu = (a'c+b'\partial)\sqrt{\frac{x}{c^2+\partial^2}}, \quad \eta = \sqrt{x(a^2+b^2)}, \quad z = \sqrt{x(a'^2+b'^2)}$$

$$\varphi(m) = \frac{(aa'+bb')m+\sqrt{x(a^2+b^2)-m^2}}{a^2+b^2}, \quad \psi(n) = \frac{(aa'+bb')n+\sqrt{x(a'^2+b'^2)-n^2}}{a'^2+b'^2}.$$

Nierówności (S_0), (S_1) oraz (S_2) przedstawią się w prostszej postaci:

$$\begin{array}{lll} (S_0)\ldots & \mu < m \leqslant \eta, & \nu < n \leqslant z, \\ (S_1)\ldots & \mu < m \leqslant \eta, & \varphi(m) < n \leqslant z, \\ (S_2)\ldots & \psi(n) < m \leqslant \eta, & \nu < n \leqslant z. \end{array}$$

Na mocy tych nierówności z łatwością otrzymamy:

$$(S_0) = (E\eta - E\mu)(Ez - E\nu),$$

$$(S_1) = \sum_{m>\mu}^{m\leqslant\eta} [Ez - E\varphi(m)] = Ez(E\eta - E\mu) - \sum_{m>\mu}^{m\leqslant\eta} E\varphi(m),$$

$$(S_2) = \sum_{n>\nu}^{n\leqslant z} [E\eta - E\psi(n)] = E\eta(Ez - E\nu) - \sum_{n>\nu}^{n\leqslant z} E\psi(n),$$

a więc:

$$s\begin{pmatrix} a\,, & b \\ a'\,, & b' \end{pmatrix} = E\eta\, Ez - E\mu\, E\nu - \sum_{m>u}^{m\leqslant\eta} E\varphi(m) - \sum_{n>\nu}^{n\leqslant z} E\psi(n)\,.$$

16. Wprowadźmy funkcyę okresową

$$r_0(u) = r_0(u+1)\,,$$

określoną przez równanie:

$$r_0(u) = Eu - u + \frac{1}{2}\,.$$

Na mocy tego wzoru mieć będziemy nierówność

$$(*) \qquad |\, r_0(u)\,| \leqslant \frac{1}{2}$$

dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej u.

Przy pomocy funkcyi $r_0(u)$ przedstawimy sumę

$$\sum_{m>u}^{m\leqslant\eta} E\varphi(m) + \sum_{n>\nu}^{n\leqslant z} E\psi(n)$$

w następującej postaci:

$$\sum_{m>u}^{m\leqslant\eta}\left[\varphi(m) - \frac{1}{2}\right] + \sum_{n>\nu}^{n\leqslant z}\left[\psi(n) - \frac{1}{2}\right] + \sum_{m>\mu}^{m\leqslant\eta} r_0[\varphi(m)] + \sum_{n>\nu}^{n\leqslant z} r_0[\psi(n)]\,.$$

Na mocy (*) mamy nierówność:

$$\left|\sum_{m>u}^{m\leqslant\eta} r_0[\varphi(m)] + \sum_{n>\nu}^{n\leqslant z} r_0[\psi(n)]\right| \leqslant \frac{1}{2}(E\eta - E\mu + Ez - E\nu) \leqslant \frac{1}{2}(\eta + z - \mu - \nu + 2)\,,$$

a więc możemy napisać równość następującą:

$$-\sum_{m>u}^{m\leqslant\eta} E\varphi(m) - \sum_{n>\nu}^{n\leqslant z} E\psi(n) = -\sum_{m>\mu}^{m\leqslant\eta}\varphi(m) - \sum_{n>\nu}^{n\leqslant z}\psi(n) + \frac{1}{2}(E\eta + Ez - E\mu - E\nu)$$

$$+\frac{\vartheta}{2}(\eta + z - \mu - \nu + 2)\,, \quad \text{gdzie } |\vartheta| \leqslant 1\,.$$

Podstawiając znaleziony wzór w wyrażenie na $s\begin{pmatrix} a\,, & b \\ a'\,, & b' \end{pmatrix}$ oraz zastępując symbole E ich wyrażeniami przez funkcyę r_0, z łatwością otrzymamy:

$$s\begin{pmatrix} a\,, & b \\ a'\,, & b' \end{pmatrix} = -\sum_{m>u}^{m\leqslant\eta}\varphi(m) - \sum_{n>\nu}^{n\leqslant z}\psi(n) + \eta z - \mu\nu + r_0(\eta)\,z + r_0(z)\,\eta$$

$$-r_0(\mu)\,\nu - r_0(\nu)\,\mu + r_0(\eta)\,r_0(z) - r_0(\mu)\,r_0(\nu) + \frac{\vartheta}{2}(\eta + z - \mu - \nu + 2)\,,$$

$$\text{gdzie } |\vartheta| \leqslant 1\,.$$

17. Wzór, któryśmy otrzymali, doprowadza nas do obliczenia sumy

$$-\sum_{m>u}^{m\leqslant\eta}\varphi(m) - \sum_{n>\nu}^{n\leqslant z}\psi(n)\,,$$

gdzie $\varphi(m)$ i $\psi(n)$ są dwie funkcye algebraiczne.

Wzór sumacyjny Eulera, uogólniony przez Sonina [1]), posłuży nam do tego.

Według wzoru Sonina suma

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} f(n)$$

wyraża się:

$$\sum_{n>a}^{n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(u)\,du + r_0(b)\,f(b) - r_0(a)\,f(a) - \int_a^b r_0(u)\,df(u)$$

dla jakichbądź dodatnich wartości granic sumowania a i b, jeżeli tylko funkcya $f(u)$ posiada pochodną ciągłą w granicach $a < u < b$.

Funkcye $\varphi(u)$ i $\psi(u)$, na mocy wzorów art. 15-go, są w zupełności określone odpowiednio w granicach

$$\mu < u < \eta \quad \text{oraz} \quad \nu < u < z$$

lecz pochodne ich stają się nieskończenie wielkie (co do wartości bezwzgl.) przy $u = \eta$ i $u = z$.

---

[1]) Sonin: „O pewnej całce określonej, zawierającej funkcyę liczbną $[x]$" (Warsz. Wiadomości Uniwersyteckie za rok 1885. № 3, po rosyjsku).

Jednakże, przedstawiając sumę $\sum\limits_{m>\mu}^{m\leqslant\eta}\varphi(m)$ w postaci:

$$\sum_{m>\mu}^{m\leqslant\eta}\varphi(m)=\sum_{m>u}^{m\leqslant\eta-\varepsilon}\varphi(m)+\sum_{m>\eta-\varepsilon}^{m\leqslant\eta}\varphi(m),$$

gdzie ε jest liczbą dowolnie małą, wyrażając pierwszą z sum strony prawej według wzoru Sonina i przechodząc następnie do granicy przy $\varepsilon=0$ (przyczem należy rozważyć oddzielnie przypadki całkowitego i niecałkowitego η), znajdziemy, iż wyrażenie na sumę $\sum\limits_{m>u}^{m\leqslant\eta}\varphi(m)$ otrzymuje się takież, jak przy bezpośredniem stosowaniu wzoru Sonina, a mianowicie:

$$\sum_{m>\mu}^{m\leqslant\eta}\varphi(m)=\int_u^\eta\varphi(u)\,du+r_0(\eta)\,\varphi(\eta)-r_0(\mu)\,\varphi(\mu)-\int_u^\eta r_0(u)\,d\varphi(u)$$

i również:

$$\sum_{n>\nu}^{n\leqslant z}\psi(n)=\int_\nu^z\psi(u)\,du+r_0(z)\,\psi(z)-r_0(\nu)\,\psi(\nu)-\int_\nu^z r_0(u)\,d\psi(u)$$

i wzór art. 16-go na $s\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ daje nam:

$$s\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}=-\int_\mu^\eta\varphi(u)\,du-\int_\nu^z\psi(u)\,du+\eta z-\mu\nu+r_0(\eta)\,[z-\varphi(\eta)]$$

$$+r_0(z)\,[\eta-\psi(z)]+r_0(\eta)\,r_0(z)-r_0(\mu)\,r_0(\nu)+\int_\mu^\eta r_0(u)\,d\varphi(u)$$

$$+\int_\nu^z r_0(u)\,d\psi(u)+\frac{\vartheta}{2}(\eta+z-\mu-\nu+2)\quad \text{gdzie}\quad |\vartheta|\leqslant 1.$$

WARTOŚĆ PRZYBLIŻONA SYMBOLU $s\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$.

18. Przypuśćmy, iż liczby całkowite dodatnie lub równe zeru a, b, a', b', związane przez równanie

$$ab'-a'b=1$$

spełniają warunki:

$$a^2+b^2\leqslant t,\quad a'^2+b'^2\leqslant t,\quad \text{oraz}\quad c^2+\partial^2>t,$$

gdzie

$$c=a+a',\quad \partial=b+b'.$$

Uskuteczniając w ostatnim wzorze artykułu poprzedzającego dwa pierwsze całkowania, znajdziemy:

$$-\int_\mu^\eta\varphi(u)\,du-\int_\nu^z\psi(u)\,du=\frac{x}{2(c^2+\partial^2)}-\frac{x}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)\,(c^2+\partial^2)}}$$

$$+\frac{x}{2(c^2+\partial^2)}-\frac{x}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{(a'^2+b'^2)\,(c^2+\partial^2)}},$$

a po redukcyi:

$$-\int_\mu^\eta\varphi(u)\,du-\int_\nu^z\psi(u)\,du=\frac{x}{c^2+\partial^2}-\frac{x}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)\,(a'^2+b'^2)}}.$$

Podstawiając te rezultaty we wzór wspomniany i zauważywszy, iż

$$\eta z-\mu\nu=-\frac{x}{c^2+\partial^2}+x\left[\sqrt{(a^2+b^2)\,(a'^2+b'^2)}-(aa'+bb')\right],$$

$$z-\varphi(\eta)=\sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}}\left[\sqrt{(a^2+b^2)\,(a'^2+b'^2)}-(aa'+bb')\right],$$

$$\eta-\psi(z)=\sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}}\left[\sqrt{(a^2+b^2)\,(a'^2+b'^2)}-(aa'+bb')\right],$$

otrzymamy:

$$s\begin{pmatrix}a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}=-\frac{x}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)\,(a'^2+b'^2)}}$$

$$+\left[\sqrt{(a^2+b^2)\,(a'^2+b'^2)}-(aa'+bb')\right]\left[x+r_0(\eta)\sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}}+r_0(z)\sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}}\right]$$

$$+r_0(\eta)\,r_0(z)-r_0(\mu)\,r_0(\nu)+\int_\mu^\eta r_0(u)\,d\varphi(u)+\int_\nu^z r_0(u)\,d\psi(u)$$

$$+\frac{\vartheta}{2}(\eta+z-\mu-\nu+2)\quad \text{gdzie}\quad |\vartheta|\leqslant 1.$$

19. Rozważmy obecnie całkę określoną

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u)\, d\varphi(u) .$$

Na mocy wzoru na funkcyę φ (art. 15), mamy:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u)\, d\varphi(u) = \int_{\mu}^{\eta} r_0(u) \left[\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} - \frac{1}{a^2+b^2}\, \frac{u}{\sqrt{\eta^2-u^2}}\right] du .$$

Wprowadźmy funkcyę okresową

$$r_1(u) = r_1(u+1) ,$$

określoną przez wzór

$$r_1(u) = \int_{0}^{u} r_0(u)\, du - \frac{1}{12} .$$

Dla funkcyi $r_1(u)$ otrzymamy wyrażenie:

$$r_1(u) = -\frac{(u-Eu)^2}{2} + \frac{u-Eu}{2} - \frac{1}{12} .$$

Wypływa stąd, iż funkcya $r_1(u)$ jest ciągłą i czyni zadość nierówności

$$|\, r_1(u) \,| \leqslant \frac{1}{12}$$

dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej u; mamy też nierówność

$$(^1) \qquad |\, r_1(u) - r_1(v) \,| \leqslant \frac{1}{8}$$

dla wszelkich rzeczywistych wartości zmiennych u i v.

Przy pomocy funkcyi $r_1(u)$ przedstawimy naszą całkę określoną w postaci:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u)\, d\varphi(u) = \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}\Big[r_1(\eta) - r_1(\mu) \Big] - \frac{1}{a^2+b^2} \int_{\mu}^{\eta} r_0(u)\, \frac{u}{\sqrt{\eta^2-u^2}}\, du .$$

Weźmy liczbę ξ, czyniącą zadość warunkom

$$\mu < \xi < \eta .$$

Mieć będziemy oczywistą tożsamość:

$$(*) \qquad \int_{\mu}^{\eta} r_0(u)\, \frac{u\, du}{\sqrt{\eta^2-u^2}} = \int_{\mu}^{\xi} r_0(u)\, \frac{u\, du}{\sqrt{\eta^2-u^2}} + \int_{\xi}^{\eta} r_0(u)\, \frac{u\, du}{\sqrt{\eta^2-u^2}} .$$

Do całki

$$\int_{\xi}^{\eta} r_0(u)\, \frac{u\, du}{\sqrt{\eta^2-u^2}}$$

zastosować możemy pierwsze twierdzenie o wartości średniej, gdyż funkcya $\frac{u}{\sqrt{\eta^2-u^2}}$ pozostaje dodatnią w granicach całkowania; otrzymamy:

$$\int_{\xi}^{\eta} r_0(u)\, \frac{u\, du}{\sqrt{\eta^2-u^2}} = \vartheta M \int_{\xi}^{\eta} \frac{u\, du}{\sqrt{\eta^2-u^2}}, \quad \text{gdzie} \quad |\,\vartheta\,| < 1 ,$$

oraz M oznacza granicę wyższą wartości bezwzględnych funkcyi $r_0(u)$.

Ponieważ funkcya dodatnia $\frac{u}{\sqrt{\eta^2-u^2}}$ zmienia się wciąż w tym samym kierunku w granicach całki $\int_{u}^{\xi} r_0(u)\, \frac{u\, du}{\sqrt{\eta^2-u^2}}$, całka zaś $\int_{u}^{u} r_0(u)\, du$ przedstawia funkcyę ciągłą zmiennej u, mieć będziemy:

$$\int_{u}^{\xi} r_0(u)\, \frac{u\, du}{\sqrt{\eta^2-u^2}} = \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2-\mu^2}} \int_{u}^{\tau} r_0(u)\, du + \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}} \int_{\tau}^{\xi} r_0(u)\, du ,$$

$$\text{gdzie} \quad \tau = \mu + \vartheta(\xi-\mu) , \quad \text{przy} \quad 0 < \vartheta < 1$$

na mocy drugiego twierdzenia o wartości średniej.

Podstawiając wzory otrzymane w tożsamość (*) i zważywszy, iż $M \leqslant \frac{1}{2}$, znajdziemy:

$$\int_{\mu}^{\eta} r_0(u)\, \frac{u\, du}{\sqrt{\eta^2-u^2}} = \frac{\vartheta}{2} \sqrt{\eta^2-\xi^2} + \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2-\mu^2}}\, [r_1(\tau) - r_1(\mu)] + \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}\, [r_1(\xi) - r_1(\tau)]$$

Równość ta na mocy (1) może być przedstawiona tak:

$$\int_\mu^\eta r_0(u)\frac{u\,du}{\sqrt{\eta^2-u^2}} = \frac{\vartheta}{2}\left(\sqrt{\eta^2-\xi^2}+\frac14\,\frac{\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}\right)+\frac{\mu}{\sqrt{\eta^2-\mu^2}}\,[r_1(\tau)-r_1(\mu)]\,,$$

gdzie $|\vartheta|<1$.

Kładąc $\xi=\sqrt{\eta^2-\frac14\eta}$ [1]), otrzymamy:

$$\sqrt{\eta^2-\xi^2}+\frac14\,\frac{\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}=\frac12\left(\sqrt{\eta}+\sqrt{\eta-\frac14}\right)<\sqrt{\eta}\,.$$

A więc:

$$\int_\mu^\eta r_0(u)\frac{u\,du}{\sqrt{\eta^2-u^2}}=\frac{\vartheta}{2}\sqrt{\eta}+\frac{\mu}{\sqrt{\eta^2-\mu^2}}\,[r_1(\tau)-r_1(\mu)]\,,\quad \text{gdzie } |\vartheta|<1\,.$$

Podstawiając znaleziony rezultat we wzór na $\int_\mu^\eta r_0(u)\,d\varphi(u)$, któryśmy otrzymali wyżej, i zważywszy, iż

$$\frac{\mu}{\sqrt{\eta^2-\mu^2}}=ac+b\partial\,,$$

po zredukowaniu otrzymamy:

$$\int_\mu^\eta r_0(u)\,d\varphi(u)=\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}\,r_1(\eta)+r_1(\mu)-\frac{ac+b\partial}{a^2+b^2}\,r_1(\tau)+\frac{\vartheta}{2}\sqrt[4]{\frac{x}{(a^2+b^2)^3}}\,,$$

lub też:

$$\int_\mu^\eta r_0(u)\,d\varphi(u)=\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}\,r_1(\eta)+r_1(\mu)-r_1(\tau)-\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}\,r_1(\tau)+\frac{\vartheta}{2}\sqrt[4]{\frac{x}{(a^2+b^2)^3}}$$

co ostatecznie doprowadza do wzoru:

$$\int_\mu^\eta r_0(u)\,d\varphi(u)=\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}\,r_1(\eta)+\vartheta\left[\frac18+\frac1{12}\,\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}+\frac12\sqrt[4]{\frac{x}{(a^2+b^2)^3}}\right],$$

gdzie $|\vartheta|<1$.

[1]) Przypomnijmy, iż $\eta=\sqrt{x(a^2+b^2)}$, a więc przy $x\geqslant 1$ i całkowitych nie równych jednocześnie zeru a i b, będzie $\eta\geqslant 1$.

Ponieważ:

$$(aa'+bb')^2+(ab'-a'b)^2=(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$$

oraz

$$a'^2+b'^2\leqslant t\,,$$

mieć będziemy:

$$\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}<\sqrt{\frac{a'^2+b'^2}{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{\frac{t}{a^2+b^2}}\,,$$

a więc:

$$\int_\mu^\eta r_0(u)\,d\varphi(u)=\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}\,r_1(\eta)+\vartheta\left[\frac18+\frac1{12}\sqrt{\frac{t}{a^2+b^2}}+\frac12\sqrt[4]{\frac{x}{(a^2+b^2)^3}}\right],$$

gdzie $|\vartheta|<1$.

Również otrzymamy wzór:

$$\int_\nu^z r_0(u)\,d\psi(u)=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}\,r_1(z)+\vartheta'\left[\frac18+\frac1{12}\sqrt{\frac{t}{a'^2+b'^2}}+\frac12\sqrt[4]{\frac{x}{(a'^2+b'^2)^3}}\right],$$

gdzie $|\vartheta'|<1$.

20. Zbadajmy obecnie sumę $\eta+z-\mu-\nu$. Na mocy wzorów artykułu 15-go otrzymamy:

$$\eta+z-\mu-\nu=\sqrt{x(a^2+b^2)}+\sqrt{x(a'^2+b'^2)}-(ac+b\partial)\sqrt{\frac{x}{c^2+\partial^2}}-(a'c+b'\partial)\sqrt{\frac{x}{c^2+\partial^2}}$$

lub też:

$$\eta+z-\mu-\nu=\sqrt{x}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}-\sqrt{c^2+\partial^2}\right).$$

Lecz:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}-\sqrt{c^2+\partial^2}$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}-aa'-bb'\right)}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}+\sqrt{c^2+\partial^2}}<\frac{2\left(\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}-aa'-bb'\right)}{\sqrt{c^2+\partial^2}}\,,$$

$$\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}-(aa'+bb')$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}+aa'+bb'}\leqslant\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}}\,.$$

Tożsamość zaś:

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+\partial^2)}} \sqrt{1-\frac{1}{(a'^2+b'^2)(c^2+\partial^2)}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{(a'^2+b'^2)(c^2+\partial^2)}} \sqrt{1-\frac{1}{(a^2+b^2)(c^2+\partial^2)}},$$

daje nam

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}} < \frac{1}{\sqrt{c^2+\partial^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2}}\right],$$

a więc:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a'^2+b'^2} - \sqrt{c^2+\partial^2} < \frac{2}{c^2+\partial^2} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2}}\right]$$

i ponieważ z założenia

$$c^2+\partial^2 > t,$$

możemy ostatecznie napisać:

$$\eta + z - \mu - \nu = 2\vartheta \frac{\sqrt{x}}{t} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2}}\right), \quad \text{gdzie } |\vartheta| < 1.$$

Podstawiając to wyrażenie we wzór na $s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ z art. 18-go i zważywszy, iż $|r_0(\mu)\, r_0(\nu)| \leqslant \frac{1}{4}$, dojdziemy do następującego ważnego wzoru:

$$s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = -\frac{x}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}}$$

$$+\left[\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)} - (aa'+bb')\right] \left[x + r_0(\eta) \sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}} + r_0(z) \sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}}\right]$$

$$+ r_0(\eta)\, r_0(z) + \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} r_1(\eta) + \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} r_1(z) + \vartheta\left[R(a^2+b^2) + R(a'^2+b'^2)\right],$$

$$\text{gdzie } |\vartheta| < 1,$$

funkcya zaś $R(u)$ określa się przez równanie:

$$R(u) = \frac{5}{8} + \left(\frac{\sqrt{x}}{t} + \frac{\sqrt{t}}{12}\right) \frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{x}{u^3}}.$$

PRZEKSZTAŁCENIE SYMBOLU $\sigma\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$.

21. Według określenia z art. 14-go symbol $\sigma\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ przedstawia liczbę układów liczb całkowitych m i n, czyniących zadość nierównościom:

$$m \leqslant \sqrt{x(a^2+b^2)}, \quad n \leqslant \sqrt{x(a'^2+b'^2)}, \quad m+n > \sqrt{x(c^2+\partial^2)},$$

gdzie

$$c = a + a' \quad \text{oraz} \quad \partial = b + b'.$$

Oznaczając przez skrócenie:

$$\eta = \sqrt{x(a^2+b^2)}, \quad z = \sqrt{x(a'^2+b'^2)}, \quad \xi = \sqrt{x(c^2+\partial^2)},$$

mieć będziemy nierówności:

$$m \leqslant \eta, \quad n \leqslant z, \quad m+n > \xi$$

i z łatwością znajdziemy:

$$\sigma\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(E\eta + Ez - E\xi)(E\eta + Ez - E\xi + 1).$$

Przy pomocy funkcyi okresowej $r_0(u)$, wprowadzonej w art. 16-ym, przedstawimy ten wzór w postaci:

$$\sigma\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\eta + z - \xi)^2 + (\eta + z - \xi)\left[r_0(\eta) + r_0(z) - r_0(\xi)\right]$$

$$+ r_0(\eta)\, r_0(z) - r_0(z)\, r_0(\xi) - r_0(\xi)\, r_0(\eta) + \frac{1}{2} r_0^2(\eta) + \frac{1}{2} r_0^2(z) + \frac{1}{2} r_0^2(\xi) - \frac{1}{8}.$$

Wprowadzając funkcyę okresową $r_1(u)$ (art. 19) i zważywszy, iż

$$r_0^2(u) = -2\, r_1(u) + \frac{1}{12},$$

otrzymamy wzór:

$$\sigma\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\eta + z - \xi)^2 + (\eta + z - \xi)\left[r_0(\eta) + r_0(z) - r_0(\xi)\right]$$

$$+ r_0(\eta)\, r_0(z) - r_0(z)\, r_0(\xi) - r_0(\xi)\, r_0(\eta) - r_1(\eta) - r_1(z) - r_1(\xi).$$

22. Twierdzenie. Niech symbol $\tau\begin{pmatrix} a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix}$ będzie określony przez równanie:

$$\tau\begin{pmatrix} a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} = -\frac{x}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}}$$
$$+\left[\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}-(aa'+bb')\right]\left[x+r_0(\eta)\sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}}+r_0(\eta)\sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}}\right]$$
$$+r_0(\eta)\,r_0(z)+\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}\,r_1(\eta)+\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}\,r_1(z).$$

Będziemy mieli tożsamość:

$$\sigma\begin{pmatrix} a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} a, & b\\ a', & b'\end{pmatrix} - \tau\begin{pmatrix} a, & b\\ c, & \partial\end{pmatrix} - \tau\begin{pmatrix} c, & \partial\\ a', & b'\end{pmatrix}$$

przy wszelkich całkowitych $\geqslant 0$ wartościach liczb a, b, a', b', związanych warunkiem

$$ab'-a'b=1.$$

Aby dowieść tego twierdzenia, należy tylko zwrócić uwagę na tożsamości:

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+\partial^2)}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{(a'^2+b'^2)(c^2+\partial^2)}}$$

(na mocy tożsamości art. 20-go).

Następnie:

$$\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}-\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+\partial^2)}-\sqrt{(c^2+\partial^2)(a'^2+b'^2)}$$
$$-(aa'+bb')+(ac+b\partial)+(ca'+\partial b')=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}-\sqrt{c^2+\partial^2}\right)^2$$

(spółczynnik przy x),

$$\sqrt{a'^2+b'^2}-\frac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}}-\sqrt{c^2+\partial^2}+\frac{ac+b\partial}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}-\sqrt{c^2+\partial^2}$$

(spółczynnik przy $\sqrt{x}\,r_0(\eta)$),

$$\sqrt{a^2+b^2}-\frac{aa'+bb'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}-\sqrt{c^2+\partial^2}+\frac{ca'+\partial b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}-\sqrt{c^2+\partial^2}$$

(spółczynnik przy $\sqrt{x}\,r_0(z)$),

$$-\sqrt{a'^2+b'^2}+\frac{ca'+\partial b'}{\sqrt{c^2+\partial^2}}-\sqrt{a^2+b^2}+\frac{ac+b\partial}{\sqrt{c^2+\partial^2}}=-\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a'^2+b'^2}+\sqrt{c^2+\partial^2}$$

(spółczynnik przy $\sqrt{x}\,r_0(\xi)$),

$$\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}-\frac{ac+b\partial}{a^2+b^2}=-1;\qquad \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}-\frac{ca'+\partial b'}{a'^2+b'^2}=-1$$

(spółcz. przy $r_1(\eta)$) (spółcz przy $r_1(z)$)

oraz

$$-\frac{a'c+b'\partial}{c^2+\partial^2}-\frac{ac+b\partial}{c^2+\partial^2}=-1$$

(spółcz. przy $r_1(\xi)$).

WARTOŚĆ PRZYBLIŻONA SUMY $1+4\sum\limits_{n\geqslant 0}^{n<\sqrt{x}}E\sqrt{x-n^2}$.

23. Widzieliśmy w art. 14-ym, iż funkcya $F(x)$, przedstawiona przez sumę

$$1+4\sum_{n\geqslant 0}^{n<\sqrt{x}}E\sqrt{x-n^2},$$

może być napisana w postaci:

$$(*)\qquad F(x)=(2E\sqrt{x}+1)^2-4\sum_{i=0}^{i=k}s\begin{pmatrix}a_i, & b_i\\ a_{i+1}, & b_{i+1}\end{pmatrix}-4\sum_{i=1}^{i=k}\sigma\begin{pmatrix}\alpha_i', & \beta_i'\\ \alpha_i'', & \beta_i''\end{pmatrix}.$$

Na mocy twierdzenia art. poprzedzającego mieć będziemy:

$$(1)\ \sum_{i=1}^{i=k}\sigma\begin{pmatrix}\alpha_i', & \beta_i'\\ \alpha_i'', & \beta_i''\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{i=k}\tau\begin{pmatrix}\alpha_i', & \beta_i'\\ \alpha_i'', & \beta_i''\end{pmatrix}-\sum_{i=1}^{i=k}\left[\tau\begin{pmatrix}\alpha_i', & \beta_i'\\ \alpha_i, & \beta_i\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}\alpha_i, & \beta_i\\ \alpha_i'', & \beta_i''\end{pmatrix}\right],$$

gdzie

$$\alpha_i=\alpha_i'+\alpha_i'' \quad\text{oraz}\quad \beta_i=\beta_i'+\beta_i''. \qquad (i=1,2,\dots k)$$

Zajmiemy się przekształceniem strony drugiej tego równania. W tym celu przypomnijmy sobie w jaki sposób utworzyliśmy w art. 3-im szereg Fareya

$$(2)\qquad \frac{a_0}{b_0},\ \frac{a_1}{b_1},\dots\frac{a_k}{b_k},\ \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}},$$

gdzie

$$a_0=1,\ b_0=0 \quad\text{oraz}\quad a_{k+1}=0,\ b_{k+1}=1.$$

Oznaczając $\alpha_1'=1$, $\beta_1'=0$ oraz $\alpha_1''=0$, $\beta_1''=1$, wstawiliśmy między liczbami $\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}$ i $\frac{\alpha_1''}{\beta_1''}$ ułamek $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, następnie wybraliśmy jednę z dwóch par ułamków

$$\frac{\alpha_1'}{\beta_1'},\ \frac{\alpha_1}{\beta_1}\quad\text{oraz}\quad\frac{\alpha_1}{\beta_1},\ \frac{\alpha_1''}{\beta_1''}$$

i oznaczając ją przez $\frac{\alpha_2'}{\beta_2'}$, $\frac{\alpha_1''}{\beta_2''}$ wstawiliśmy między temi ułamkami ułamek $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ i t. d.

W ten sposób uskutecznilišmy k następujących po sobie wstawień:

1) pomiędzy ułamkami $\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}$ oraz $\frac{\alpha_1''}{\beta_1''}$ wstawiliśmy $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$,

2) " " $\frac{\alpha_2'}{\beta_2'}$ " $\frac{\alpha_2''}{\beta_2''}$ " $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$,

. . . .

k) " " $\frac{\alpha_k'}{\beta_k'}$ " $\frac{\alpha_k''}{\beta_k''}$ " $\frac{\alpha_k}{\beta_k}$.

Utwórzmy szereg:

$$(3) \qquad \left(\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}, \frac{\alpha_1''}{\beta_1''}\right), \left(\frac{\alpha_2'}{\beta_2'}, \frac{\alpha_2''}{\beta_2''}\right), \ldots \left(\frac{\alpha_k'}{\beta_k'}, \frac{\alpha_k''}{\beta_k''}\right)$$

i rozważmy parę

$$\frac{\alpha_\nu'}{\beta_\nu'} \text{ i } \frac{\alpha_\nu''}{\beta_\nu''}$$

ułamków, zawartych w tym szeregu.

Pomiędzy wybranemi ułamkami wstawiliśmy, według założenia ułamek $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ i otrzymaliśmy w ten sposób dwie pary sąsiednich ułamków

$$(4) \qquad \frac{\alpha_\nu'}{\beta_\nu'}, \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \text{ oraz } \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}, \frac{\alpha_\nu''}{\beta_\nu''}.$$

Jeżeli, wstawiając dalej, wstawiliśmy nowy ułamek między $\frac{\alpha_\nu'}{\beta_\nu'}$ i $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, para ta musi należeć do szeregu (3) i możemy założyć:

$$\frac{\alpha_\nu'}{\beta_\nu'} = \frac{\alpha_i'}{\beta_i'} \text{ oraz } \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\alpha_i''}{\beta_i''}.$$

Jeżeli zaś, przeciwnie, nie wstawiliśmy między ułamkami $\frac{\alpha_\nu'}{\beta_\nu'}$ i $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ ułamku $\frac{\alpha_\nu'+\alpha_\nu}{\beta_\nu'+\beta_\nu}$, wówczas para $\frac{\alpha_\nu'}{\beta_\nu'}$, $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ nie będzie należała do szeregu (3); znajdzie się ona w szeregu Fareya i możemy w tym razie przyjąć:

$$\frac{\alpha_\nu'}{\beta_\nu'} = \frac{a_i}{b_i}, \quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}.$$

W ten sam sposób zbadamy drugą parę ułamków (4). Ponieważ szereg Fareya (2) utworzony jest przy pomocy następujących po sobie wstawiań, przeto wszystkie $k+1$ ułamki sąsiednie

$$(5) \qquad \left(\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}\right), \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right), \ldots \left(\frac{a_k}{b_k}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)$$

znajdą się pomiędzy $2k$ parami ułamków:

$$(6) \quad \left(\frac{\alpha_1'}{\beta_1'}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right), \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_1''}{\beta_1''}\right), \left(\frac{\alpha_2'}{\beta_2'}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right), \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_2''}{\beta_2''}\right), \ldots \left(\frac{\alpha_k'}{\beta_k'}, \frac{\alpha_k}{\beta_k}\right), \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}, \frac{\alpha_k''}{\beta_k''}\right).$$

Wnioskujemy stąd, iż w ostatnim szeregu znajduje się $k-1$ par ułamków, nie należących do szeregu (5); na zasadzie tego, cośmy rzekli wyżej, te $k-1$ par ułamków będą należały do szeregu (3). Lecz pierwsza para ułamków szeregu (3) jest niczem innem, jak parą $\left(\frac{1}{0}, \frac{0}{1}\right)$, która nie należy do szeregu (6), przeto wszystkie $k-1$ par ułamków

$$(7) \qquad \left(\frac{\alpha_2'}{\beta_2'}, \frac{\alpha_2''}{\beta_2''}\right), \left(\frac{\alpha_3'}{\beta_3'}, \frac{\alpha_3''}{\beta_3''}\right), \ldots \left(\frac{\alpha_k'}{\beta_k'}, \frac{\alpha_k''}{\beta_k''}\right)$$

szeregu (3) znajdują się wśród par szeregu (6).

A więc dowiedliśmy, iż zbiór par ułamków, należących do szeregów (5) i (7) różni się od szeregu (6) tylko porządkiem wyrazów.

Wyprowadzamy stąd następującą ważną tożsamość:

$$\sum_{i=1}^{i=k}\left[\tau\begin{pmatrix}\alpha_i', & \beta_i'\\ \alpha_i, & \beta_i\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}\alpha_i, & \beta_i\\ \alpha_i'', & \beta_i''\end{pmatrix}\right] = \sum_{i=2}^{i=k}\tau\begin{pmatrix}\alpha_i', & \beta_i'\\ \alpha_i'', & \beta_i''\end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{i=k}\tau\begin{pmatrix}a_i, & b_i\\ a_{i+1}, & b_{i+1}\end{pmatrix}.$$

Podstawiając ten rezultat do wzoru (1), znajdziemy:

$$\sum_{i=1}^{i=k}\sigma\begin{pmatrix}\alpha_i', & \beta_i'\\ \alpha_i'', & \beta_i''\end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} - \sum_{i=0}^{i=k}\tau\begin{pmatrix}a_i, & b_i\\ a_{i+1}, & b_{i+1}\end{pmatrix}$$

i wzór (*) przyjmuje postać:

$$F(x) = (2E\sqrt{x}+1)^2 - 4\tau\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} - 4\sum_{i=0}^{i=k}\left[s\begin{pmatrix}a_i, & b_i\\ a_{i+1}, & b_{i+1}\end{pmatrix} - \tau\begin{pmatrix}a_i, & b_i\\ a_{i+1}, & b_{i+1}\end{pmatrix}\right]$$

24. Na mocy wzoru, wyprowadzonego w art. 20-ym na funkcyę s oraz określenia funkcyi τ (art. 22) mieć będziemy:

$$s\begin{pmatrix} a_i \,, & b_i \\ a_{i+1} \,, & b_{i+1} \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} a_i \,, & b_i \\ a_{i+1} \,, & b_{i+1} \end{pmatrix} = \vartheta \left[R\,(a_i{}^2 + b_i{}^2) + R\,(a_{i+1}{}^2 + b_{i+1}{}^2) \right],$$

gdzie $|\vartheta| < 1$ oraz $i = 0, 1, 2, \ldots k$.

Na mocy wzoru na $\tau\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ (art. 22) będzie:

$$\tau \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = -\frac{\pi}{4}\,x + x + 2\sqrt{x}\, r_0(\sqrt{x}) + r_0^2(\sqrt{x}),$$

a więc po zredukowaniu:

$$F(x) = \pi x - 4\vartheta \sum_{i=0}^{i=k} \left[R(a_i{}^2 + b_i{}^2) + R(a_{i+1}{}^2 + b_{i+1}{}^2) \right].$$

Zważywszy, iż $a_{k+1}{}^2 + b_{k+1}{}^2 = a_0{}^2 + b_0{}^2$, możemy jeszcze napisać:

$$F(x) = \pi x - 8\vartheta \sum_{i=0}^{i=k} R\,(a_i{}^2 + b_i{}^2), \quad \text{gdzie } |\vartheta| < 1.$$

25. Zbadajmy teraz sumę:

$$\sum_{i=0}^{i=k} R\,(a_i{}^2 + b_i{}^2).$$

Na mocy założenia z art. 3-go liczby całkowite dodatnie a_i i b_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ nie mają wspólnego dzielnika i czynią zadość nierówności:

$$a_i{}^2 + b_i{}^2 \leqslant t. \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

Ponieważ funkcya $R(u)$ jest dodatnia, wnioskujemy stąd, iż suma

$$\sum_{i=1}^{i=k} R\,(a_i{}^2 + b_i{}^2)$$

nie przewyższa sumy podwójnej

$$\sum_{(\tau)} R\,(m^2 + n^2),$$

gdzie obszar sumowania (τ) jest wyznaczony przez nierówności

(τ) $\qquad m > 0\,,\; n > 0 \;$ oraz $\; m^2 + n^2 \leqslant t.$

Wprowadzając funkcyę liczebną $\tau(n)$, oznaczającą liczbę rozkładów liczby n na sumę kwadratów dwóch liczb całkowitych, będziemy mieli:

$$\sum_{(\tau)} R\,(m^2 + n^2) \leqslant \frac{1}{4} \sum_{n>1}^{n \leqslant t} \tau(n)\; R(n)$$

skąd, zważywszy, iż $R\,(a_0{}^2 + b_0{}^2) = R(1)$ oraz $\tau(1) = 4$, z łatwością wnioskujemy:

$$\sum_{i=0}^{i=k} R(a_i{}^2 + b_i{}^2) \leqslant \frac{1}{4} \sum_{n>0}^{n \leqslant t} \tau(n)\; R(n).$$

W ten sposób otrzymujemy na zasadzie wzoru na $F(x)$ z art. poprzedzającego:

$$F(x) = \pi x + 2\vartheta \sum_{n>0}^{n \leqslant t} \tau(n)\; R(n), \quad \text{gdzie } |\vartheta| < 1.$$

26. Zbadajmy obecnie sumę

$$\sum_{n>0}^{n \leqslant t} \tau(n)\; R(n)$$

czyli, na mocy równania na $R(u)$ z art. 20-go:

$$\frac{5}{8} \sum_{n>0}^{n \leqslant t} \tau(n) + \left(\frac{\sqrt{x}}{t} + \frac{\sqrt{x}}{12} \right) \sum_{n>0}^{n \leqslant t} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt[4]{x}}{2} \sum_{n>0}^{n \leqslant t} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}}.$$

Wystarcza dla nas określić rząd względem t każdej z tych trzech sum dla wielkich wartości t.

Co się tyczy sumy $\sum\limits_{n>0}^{n \leqslant t} \tau(n)$, to na zasadzie oczywistej tożsamości

$$\sum_{n \geqslant 0}^{n \leqslant t} \tau(n) = F(t),$$

oraz wzoru

$$F(t) = \pi t + r(t),$$

w którym $r(t)$ jest rzędu nie przewyższającego rzędu wielkości $\sqrt{t}$ (patrz Wstęp), znajdziemy, iż jest ona funkcyą rzędu wielkości t.

Dla obrachowania dwóch pozostałych sum użyjemy tożsamości

$$\sum_{n>1}^{n\leqslant t} \tau(n)\, f(n) = \pi \int_1^t f(u)\, du + r(t)\, f(t) - r(1)\, f(1) - \int_1^t r(u)\, f'(u)\, du\,,$$

którą z łatwością sprawdzić możemy, zastępując w ostatniej całce $r(u)$ przez $F(u) - \pi u$, rozkładając całkę

$$\int_1^t F(u)\, f'(u)\, du$$

na szereg całek

$$\int_1^2 + \int_2^3 + \ldots + \int_{Et-1}^{Et} + \int_{Et}^t$$

i zważywszy, iż w granicach każdej z nich $F(u)$ pozostaje stałem.

W ten sposób znajdziemy, iż suma $\sum\limits_{n>0}^{n\leqslant t} \frac{\tau(n)}{\sqrt{n}}$ jest względem t rzędu równego rzędowi wielkości $\sqrt{t}$, suma zaś $\sum\limits_{n>0}^{n\leqslant t} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}}$ — rzędu wielkości $\sqrt[4]{t}$.
A więc, oznaczając przez ξ wielkość skończoną dla wszelkich wartości t większych od pewnej stałej granicy, możemy napisać:

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant t} \tau(n)\;R(n) = \xi\left(t + \sqrt{\frac{x}{t}} + \sqrt[4]{tx}\right).$$

Kładąc $t = \sqrt[3]{x}$ i przyjmując pod uwagę wzór na $F(x)$ z art. poprzedzającego, dochodzimy do następującego twierdzenia:

Funkcya πx przedstawia funkcyę liczebną $F(x)$, a więc i sumę $4\sum\limits_{n\geqslant 0}^{n\leqslant\sqrt{x}} \sqrt{x-n^2}$ z błędem, którego rząd nie przewyższa rzędu funkcyi $\sqrt[3]{x}$.

SUR UN PROBLÈME DU CALCUL DES FONCTIONS ASYMPTOTIQUES

(RÉSUMÉ).

Nous nous proposons de calculer la valeur asymptotique de la somme

$$\sum_{n\geqslant 0}^{n<\sqrt{x}} E\sqrt{x-n^2}$$

en désignant par Ex l'entier le plus grand, ne dépassant pas x. La méthode de M. Voronoï [1]) nous sert à ce but.

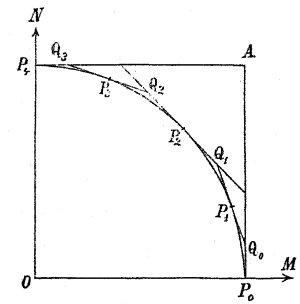
Désignons par $F(x)$ le nombre des systèmes des nombres entiers m et n vérifiant l'inégalité

$$m^2 + n^2 \leqslant x \quad \text{où} \quad x \geqslant 1\,.$$

Nous aurons l'égalité évidente

$$F(x) = 1 + 4\sum_{n\geqslant 0}^{n<\sqrt{x}} E\sqrt{x-n^2}\,.$$

Géométriquement $F(x)$ représente le nombre des points, ayant les coordonnées entières m et n et se trouvant à l'intérieur et sur la circonférence du cercle, défini par l'équation $m^2 + n^2 = x$.



Pour le calculer il suffit de trouver le nombre des points ayant les coordonnées entières et appartenant au triangle curviligne MAN, formé par l'arc MN du cercle et par les tangentes MA et NA, parallèles aux axes des coordonnées. Le triangle MAN nous partagerons en $2k+1$ triangles curvilignes et rectilignes par des tangentes au cercle, menées aux k points P_i choisis sur l'arc MN. Pour le choix de ces points nous sert l'algorithme suivant:

---

[1]) Voronoï. Sur un problème du calc. des fonct. asympt. Journ. f. r. und ang. Math. Bd. 126, h. 4.

Soit t un paramètre arbitraire $\geqslant 2$. Supposons que tous les systèmes des nombres entiers positifs a et b, vérifiant l'inégalité

$$a^2+b^2 \leqslant t .$$

et n'ayant pas de diviseur commun, forment une suite des fractions

$$\frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2} > \ldots > \frac{a_k}{b_k} .$$

Les points $P_i(\mu_i, \nu_i)$ sur le cercle nous choisissons, en posant

$$\mu_i = \frac{a_i \sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} \quad \text{et} \quad \nu_i = \frac{b_i \sqrt{x}}{\sqrt{a_i^2+b_i^2}} , \qquad (i=1,2,\ldots k)$$

Nous calculons ensuite les triangles obtenus. Pour chaque triangle nous exécutons un changement des variables m et n après lequel ses deux côtés sont parallèles aux axes des coordonnées. Pour calculer ces nouveaux triangles curvilignes et rectilignes nous introduisons deux symboles $s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ et $\sigma\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ en les définissant comme suit:

Le symbole $s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ représente le nombre des systèmes des nombres entiers m et n vérifiant les inégalités

$$(aa'+bb')\sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}} < m \leqslant \sqrt{x(a^2+b^2)} ,$$

$$(aa'+bb')\sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}} < n \leqslant \sqrt{x(a'^2+b'^2)} ,$$

$$(mb'-nb)^2+(-ma'+na)^2 > x ,$$

où a, b, a', b' sont des nombres entiers non négatifs liés par la relation

$$ab'-a'b=1 .$$

Le symbole $\sigma\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ représente le nombre des systèmes des valeurs entières des variables m et n, vérifiant les inégalités:

$$m \leqslant \sqrt{x(a^2+b^2)} , \quad n \leqslant \sqrt{x(a'^2+b'^2)} , \quad m+n > \sqrt{x(c^2+\partial^2)}$$

où $c=a+a'$, $\partial=b+b'$.

Pour le symbole $s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ nous trouvons l'expression:

$$s\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = -\frac{x}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}}$$

$$+\left[\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}-(aa'+bb')\right]\left[x+r_0(\eta)\sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}}+r_0(z)\sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}}\right]$$

$$+r_0(\eta)\,r_0(z)+\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}r_1(\eta)+\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}r_1(z)+\vartheta\,[R(a^2+b^2)+R(a'^2+b'^2)] ,$$

$$\text{où} \quad |\vartheta| < 1 ,$$

en désignant pour abréger

$$\eta=\sqrt{x(a^2+b^2)} , \quad z=\sqrt{x(a'^2+b'^2)} , \quad r_0(u)=Eu-u+\frac{1}{2} , \quad r_1(u)=\int_0^u r_0(u)\,du-\frac{1}{12} ,$$

$$R(u)=\frac{5}{8}+\left(\frac{\sqrt{t}}{t}+\frac{\sqrt{t}}{12}\right)\frac{1}{\sqrt{u}}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{x}{u^3}} .$$

Pour le symbole $\sigma\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix}$ nous trouvons la formule:

$$\sigma\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\eta+z-\xi)^2+(\eta+z-\xi)\,[r_0(\eta)+r_0(z)-r_0(\xi)]$$

$$+r_0(\eta)\,r_0(z)-r_0(z)\,r_0(\xi)-r_0(\xi)\,r_0(\eta)-r_1(\eta)-r_1(z)-r_1(\xi)$$

$$\text{où} \quad \xi=\sqrt{x(c^2+\partial^2)} .$$

Cette expression nous permet de démontrer l'égalité:

$$\sigma\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} - \tau\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & \partial \end{pmatrix} - \tau\begin{pmatrix} c, & \partial \\ a', & b' \end{pmatrix}$$

où

$$\tau\begin{pmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{pmatrix} = -\frac{x}{2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}}$$

$$+\left[\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}-(aa'+bb')\right]\left[x+r_0(\eta)\sqrt{\frac{x}{a^2+b^2}}+r_0(\eta)\sqrt{\frac{x}{a'^2+b'^2}}\right]$$

$$+r_0(\eta)\,r_0(z)+\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}r_1(\eta)+\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}r_1(z) .$$

A l'aide des symboles introduits nous représentons le nombre des systèmes des nombres entiers m et n, vérifiant les inégalités:

$$0 < m \leqslant \sqrt{x}\,, \quad 0 < n \leqslant \sqrt{x}\,, \quad m^2 + n^2 > x\,,$$

c'est à dire le nombre des points du triangle MAN, sous la forme

$$\tau\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} - \sum_{i=0}^{i=k}\left[s\begin{pmatrix}a_i & , b_i\\ a_{i+1} & , b_{i+1}\end{pmatrix} - \tau\begin{pmatrix}a_i & , b_i\\ a_{i+1} & , b_{i+1}\end{pmatrix}\right]$$

ce qui donne:

$$F(x) = \pi x - 4\vartheta\sum_{i=0}^{i=k}\left[R\,(a_i^2 + b_i^2) + R\,a_{i+1}{}^2 + b_{i+1}{}^2)\right], \quad \text{où } |\vartheta| < 1\,.$$

En posant le paramètre t, qui entre dans l'éxpression $R(u)$, et qui restait arbitraire jusqu' ici, égal à $\sqrt[3]{x}$, nous trouvons:

$$F(x) = \pi x + O(\sqrt[3]{x})\,.$$

Ainsi, en appliquant la méthode de M. Voronoï noùs avons démontré le théorème suivant:

„La fonction πx représente la fonction numérique $F(x)$ avec une erreur dont l'ordre ne surpasse pas celui de la fonction $\sqrt[3]{x}$".

G. A. MILLER,

GROUPS GENERATED BY TWO OPERATORS WHICH TRANSFORM EACH OTHER INTO THE SAME POWER.

(O GRUPACH UTWORZONYCH PRZEZ DWA OPERATORY PRZEKSZTAŁCAJĄCE SIĘ WZAJEMNIE NA TĘ SAMĄ POTĘGĘ).

If a group is generated by a single operator it is cyclic and its properties are comparatively elementary, but the groups generated by two operators include an infinite number of different types and their structures are so different that very little has been done towards a useful classification. When the orders of the two generators and that of their product are represented by l, m, n respectively, the group is completely determined by these numbers provided two of them are equal to 2; or one is 2, the other 3 while the third is one of the three numbers 3, 4, 5 [1]). Several other special cases have been discussed quite recently [2]). The present article is devoted to the special case noted in the heading, which presents several results of unusual interest.

Let t_1, t_2 be any two operators such that

$$t_1^{-1}\, t_2\, t_1 = t_2^{\alpha} \quad \text{and} \quad t_2^{-1}\, t_1\, t_2 = t_1^{\alpha}\,.$$

From these conditions it follows that the commutator of these operators $t_1^{-1}\, t_2^{-1}\, t_1\, t_2 = t_1^{\alpha-1} = t_2^{1-\alpha}$, is commutative with t_1, t_2 and hence the commutator subgroup of the group (G), generated by t_1, t_2 is composed of invariant operators under G. The number of the operators generated by t_1 which are invariant under t_2 divides α—1. Since the order of the quotient group of the group generated by t_1 with respect to these invariant operators

[1]) American Journal of Mathematica, vol. 24 (1902), p. 96; American Mathematical Monthly, vol 11 (1904), p 184. It should be obsewed that the conditions $a^3=1$, $b^3=1$, $ba=a^2b^2$; Netto. Journal für reine und angewandte Mathematik, vol. 128 (1904), p. 255, are equivalent to $l=3$, $m=3$, $n=2$. Several other groups discussed by Netto in this article are well know but the author fails to give any references.

[2]) Archiv der Mathematik und Physik, vol. 9 (1905), p. 6; Netto, loc. cit.