ERNESTO PASCAL.

Sur la nouvelle théorie des formes différentielles d'ordre et de degré quelconques[1].

(O NOWEJ TEORYI FORM RÓŻNICZKOWYCH JAKIEGOKOLWIEK RZĘDU I STOPNIA).

Dans cette communication je me propose d'appeler l'attention des mathématiciens sur la nouvelle théorie des formes différentielles d'un ordre et degré quelconques à laquelle je suis parvenu dans ces dernières années en généralisant la théorie des formes pfaffiennes et celle des formes différentielles quadratiques[2].

Tous les plus brillants résultats dans le domaine de dites théories particulières dus aux plus grands analystes du siècle passé: Pfaff, Jacobi, Grassmann, Riemann, Clebsch, Lie, Lipschitz, Frobenius, Christoffel, Beltrami etc. ne sont que de cas les plus simples et plus ordinaires des résultats jusqu' à ce jour inaperçus, très généraux et de nature plus vaste, et la théorie dont je veux parler, paraissant à première vue difficile par la complexité des formules auxquelles elle conduit, perd, grâce aux artifices et procédés convenables, toute complexité excessive et acquiert une symétrie et une élégance à cause desquelles je me permets de demander pour elle l'hospitalité dans les chapitres de l'Analyse moderne.

---

[1]) Komunikat, wygłoszony na IV-ym Kongresie międzynarodowym matematyków w Rzymie w kwietniu 1908 r. (Przyp. Red.).

[2]) Mes travaux se trouvent publiés dans les „Comptes Rendus de l'Acad. de Paris", 1900, 1904; dans les „Rendiconti dell' Ist. Lombardo", 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1906; dans les „Rendiconti della Accad. dei Lincei", 1902, 1903, 1906; dans les „Annali di Matematica" (3), t. VII, 1901; dans les „Mathematische Annalen", t. LIV, 1901, et enfin dans les „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo", t. XXII, 1906, t. XXIII, 1907.

Une forme différentielle d'ordre quelconque r et du premier degré est une expression formée comme la différentielle d'ordre r d'une fonction f de plusieurs variables dépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ en remplaçant dans chaque terme les dérivées de f par des fonctions quelconques de variables.

La première question qui se présente ici est celle de déterminer la forme de la différentielle r—ième d'une fonction et d'étudier la construction de ses différents termes. Un bref examen fait voir de suite qu' une pareille différentielle peut être représentée comme une somme des produits de toutes les dérivées partielles de la fonction jusqu' à l'ordre r pour certaines expressions différentielles caractéristiques, somme des produits des différentielles de variables, que je désigne par le symbole $\delta^{(r)}_{j_1, \dots, j_m}$, étant $j_1, \dots j_m$ les indices des variables x qui entrent dans la formation des δ.

L'étude des propriétés de ces δ devient donc l'étude préliminaire qu'il faut faire dans la théorie qui nous occupe. La construction définitive peut se faire en déterminant la formule générale pour les coefficients numériques qui figurent dans leur expression. Mais on peut aussi démontrer indépendamment les propriétés fondamentales de ces δ, que voici:

1-o *ils se transforment linéairement par la transformation générale des variables*;

2-o *leur différentielle s'exprime par les δ mêmes*;

3-o *en appliquant à l'un des δ une transformation infinitésimale on a une combinaison linéaire des δ.*

4-o *chacun des δ peut être composé d'une manière spéciale au moyen d'une combinaison quadratique des autres δ.*

5-o *la somme de tous les δ d'une seule variable en partant de celle d'ordre 1 jusqu' à celle d'ordre r n'est rien autre que le quotient d'une différentielle r-ième de l'exponentielle par l'exponentielle même* etc. etc.

Une forme différentielle du degré k est une expression homogène k-linéaire des δ de k ordres déterminés fixes $r_1, r_2, \dots, r_k$; la somme de tous ces ordres est l'ordre de la forme.

Les coefficients de cette forme, de terme à terme, peuvent être représentés par les symboles dépendant de k groupes d'indices et forment un système de fonctions à k groupes d'indices qui est une généralisation des systèmes covariants ordinaux du *Calcul différentiel absolu*, auxquels il se réduit quand chacun de k groupes d'indices devient un groupe d'un indice unique; nous l'appellerons pourtant un système *covariant en sens étendu*.

Une forme différentielle générale du degré k se transforme par la transformation générale des variables précisément comme le produit de k

formes différentielles d'ordres supérieurs mais du premier degré, c'est à dire des formes linéaires en les δ et peut être représentée comme le produit symbolique de k formes linéaires.

Dans l'étude des formes différentielles d'une espèce déterminée se rencontrent souvent certaines expressions formées au moyen des coefficients de la forme même, qui sont comme le noyau de toute la théorie. Dans le cas le plus simple des formes pfaffiennes ces formations se réduisent aux binômes connus, donnés par les différences des dérivées des coefficients, avec certains changements convenables des indices, et dans le cas des formes différentielles quadratiques les dites formations sont représentées par le *symbole de Christoffel* dont on connaît bien l'importance dans les problèmes appartenant à ces formes.

Or, ces deux formations distinctes ont une origine commune et découlent d'une source commune, beacoup plus simple qu' on n'aurait pu croire d'abord, et douée de propriétés générales les plus élégantes.

La construction d'une telle expression fondamentale qui est le noyau de toute la théorie des formes différentielles se fait d'une manière la plus simple et générale en introduisant une opération d'un *caractère invariant* que j'appelle *opération de déduction*.

Voici en quoi consiste cette opération. Étant donné un système de fonctions dépendant de k groupes d'indices, la *déduite* d'une de ces fonctions par rapport à un indice déterminé ω s'obtient en prenant la dérivée de la fonction par rapport à x_ω, et en soustrayant de cette dérivée les autres k fonctions dont les groupes d'indices sont ceux de la fonction donnée, mais séparément et consécutivement augmentés de l'indice ω.

Cette opération s'applique à une somme et à un produit par les mêmes règles de dérivation.

En répétant q fois consécutivement la même opération par rapport à q indices distincts on obtient une expression dépendant de $k+1$ groupes d'indices et qui est précisément la *formation fondamentale* qu' on peut nommer le *symbole fondamental* de toute la théorie des formes différentielles.

Ces symboles fondamentaux forment un système de fonctions à $k+1$ groupes d'indices qui par la transformation des variables se transforment de la même manière comme les coefficients de la fonction; ils forment ainsi un *système covariant* et à cause de cette propriété les déduites peuvent être nommées *déduites covariantes*.

Si de ce système regardé comme un système de $k+1$ groupes d'indices on forme le système déduit, on obtient un système identiquement nul; ainsi se trouve fermée la série de systèmes déduits d'un système donné.

En considérant le cas $k=1$, c'est à dire, le cas des formes différentielles d'ordre quelconque mais du premier degré la somme ou la différence de deux déduites qui ne diffèrent que par le changement de deux groupes d'indices, on a les dits symboles principaux qui se divisent en ceux de la première et seconde espèce, selon que dans leur construction entrent seulement les dérivées des coefficients de la forme ou si, outre les dérivées, entrent encore les coefficients mêmes non assujettis aux dérivations.

Les symboles de Christoffel ne sont que des cas très particuliers de ces symboles principaux au moyen desquels s'expriment aussi les symboles bien connus de Riemann qui sont, comme on sait, d'une grande importance dans la théorie des formes différentielles quadratiques.

On peut démontrer quelques propriétés fondamentales de ces symboles principaux, par exemple, que la dérivée d'un symbole de première ou de seconde espèce est égale toujours à la somme de deux symboles respectivement de seconde ou de première espèce (propriété qui contient comme un cas particulier la propriété connue des symboles de Christoffel); que chaque symbole de première espèce peut toujours s'exprimer par une combinaison linéaire des dérivées des symboles de seconde espèce, et finalement, que les matrices formées de ces symboles principaux d'après une loi bien facile ont une caractéristique invariante pour chacune de transformation des variables—propriété qui contient comme un cas particulier une propriété singulière, jusque là méconnue, des symboles de Christoffel, nommément que la matrice formée avec les coefficients de la forme différentielle quadratique, disposés d'une manière convenable, a une carastéristique invariante pour chacune des transformations des variables.

D'où on déduit que la condition nécessaire pour l'équivalence de deux formes différentielles générales est l'égalité des caractéristiques de deux matrices dont les éléments sont les symboles principaux construits avec les coefficients de l'une et de l'autre.

Mais la considération de ces matrices à caractéristique invariante n'est nullement transitoire: nous verrons tout de suite qu' elle se présente dans tous les problèmes sur les formes différentielles et domine toute la théorie en attribuant à plusieurs résultats une apparence singulièrement simple.

On peut étudier le changement subi par les carastéristiques de ces matrices quand on multiplie la forme fondamentale par un facteur, ou quand on y adjoint une différentielle exacte, et on est conduit ainsi à l'extension des théorèmes trouvés, il y'a depuis longtemps, par Frobenius pour les formes pfaffiennes ordinaires; on peut aussi étudier une autre classe de matrices à caractéristique invariante, c'est à dire la classe formée avec des éléments d'un système invariant en sens étendu, et particulièrement avec des formations que nous avons nommées déduites d'un système covariant. En particularisant la recherche en une autre direction on parvient à un théorème intéressant sur les matrices formées avec des éléments d'un système covariant en sens ancien du Calcul différentiel absolu.

En passant à l'étude des invariants d'une forme différentielle on a tout d'abord les formes différentielles dont les coefficients sont précisément les déduites covariantes du système de coefficients de la forme donnée. Il faut remarquer la forme simple à laquelle satisfont ces expressions, savoir la différentielle d'une de ces expressions dépendant de $k+1$ groupes d'indices s'exprime par la somme de $k+1$ autres d'elles mêmes. Puis on considère les invariants et covariants simultanés pour la forme différentielle donnée et le premier membre d'une équation aux dérivées partielles, et en particulier, pour la forme donnée et le symbole d'une transformation infinitésimale ordinaire.

On a ainsi une classe de covariants qui interviennent dans la formule donnant le résultat de l'application d'une transformation infinitésimale à une forme différentielle, résultat qui, comme on peut le démontrer, est à son tour une autre forme différentielle du même type duquel on est parti.

Cela posé, il s'en suit naturellement l'introduction de la notion de transformations infinitésimales appartenant à une forme différentielle ou à une équation qu' on obtient en égalant à zéro la forme donnée, c'est à dire de transformations qui étant appliquées à la forme, donnent pour résultat zéro, ou reproduisent la forme donnée multipliée par un facteur.

Cette recherche est nécessaire pour la solution d'un des principaux problèmes de la théorie qui nous occupe, cela veut dire, pour l'extension du problème de réduction de Pfaff. Le résultat qu'on trouve est un des plus simples et constitue le lien avec d'autres recherches antérieures. On trouve ainsi que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de dites transformations infinitésimales, pour lesquelles certains covariants et invariants simultanés pour eux et pour la forme donnée sont égaux à zéro, est simplement que s'annulle une de ces matrices à caractéristiques invariantes dont nous avons parlé précédemment, c'est à dire qu' une de ces matrices ait une caractéristique inférieure à la plus grande.

On parvient au même résultat en posant le problème de réduction.

Comme extension du problème célèbre de la théorie ordinaire des équations pfaffiennes, problème avec lequel sont liés les noms de Pfaff et de Jacobi, nous pouvons poser la question d'existence et de détermination des transformations finies des variables par lesquelles la forme différentielle donnée d'ordre quelconque se transforme, à moins d'un facteur, en une forme contenant un moindre nombre de variables.

On trouve que les conditions pour l'existence des transformations finies coincident avec celles d'existence des transformations infinitésimales appartenant à la forme donnée, et en conséquence se réduisent, en dernière analyse, à ce qu' une de ces matrices à caractéristique invariante ait sa caractéristique inférieure à la plus grande; et nous pouvons diminuer le nombre de variables de la forme donnée de tant d'unités, que d'unités contient la différence entre la plus grande caractéristique que cette matrice pourrait avoir et celle qu' elle a effectivement.

C'est ainsi que se trouve résolu de manière la plus générale, et, en même temps, la plus simple, le problème de réduction lequel au premier coup d'oeil semblait être hérissé de difficultés et de complications.

Un autre problème de la théorie des systèmes de formes différentielles est celui de l'intégrabilité complète des équations qu' on obtient en égalant les formes à zéro. Dans le cas simple des formes du premier degré (formes pfaffiennes), on sait, que la condition nécessaire et suffisante pour cette intégrabilité complète est que les équations admettent les transformations de son système adjoint. Pour le cas général, le système adjoint est formé non seulement avec les équations du premier ordre, mais aussi avec d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. Pour étendre ce théorème dans toute son intégrité on aurait besoin de considérer, outre les opérations de premier ordre (transformations infinitésimales), aussi les opérations d'ordre supérieur. Et on peut le faire en se bornant, pour simplicité, au seul cas du second ordre; j'ai démontré

comme on peut généraliser le théorème mentionné en conservant inaltérée sa forme.

En se bornant à une condition nécessaire pour l'intégrabilité complète et ommettant la seconde partie du théorème, on peut limiter les considérations aux transformations infinitésimales (opérations du premier ordre) et montrer aisément—comme je l'ai fait—que chaque système complètement intégrable d'équations aux différentielles totales d'ordre quelconque admet toujours toutes les transformations infinitésimales de son système adjoint; mais cette condition n'est pas évidemment une condition suffisante.

L'étude de l'intégrabilité complète conduit naturellement à celle de la réductibilité des formes à types spéciaux; ici le domaine est très varié et étendu, et j'ai trouvé quelques résultats simples pour les cas des formes du second ordre. Ici interviennent aussi les matrices à caractéristiques invariantes qui se présentaient déjà au commencement de ces études, et on trouve qu' en fixant d'une manière particulière les caractéristiques de ces matrices, c'est à dire en posant qu'elles aient la caractéristique 1 ou 2, on a, sous une apparence simple et parfaitement symétrique, les conditions pour que la forme différentielle soit réductible à quelques types spéciaux, entre lesquels est compris celui qui correspond à l'intégrabilité complète.

Voilà les points principaux de l'état actuel de la théorie des formes différentielles d'ordre supérieur, à la formation de laquelle je me flatte d'avoir coopéré. Je ne sais, si je ne me trompe par un sentiment analogue à celui d'amour paternel, mais il me semble que ce nouveau chapitre de l'Analyse est destiné à un avenir.

Mais cet avenir ne pourra pas être très prochain, parce que, en Mathématiques—on le sait—l'impatience n'est pas permise.