W. SIERPIŃSKI.

O mierze Lebesgue'a.

(Sur la mesure de M. Lebesgue).

Podstawą teoryi całek Lebesgue'ą jest, jak wiadomo, jego teorya miary. W klasycznem dziele Lebesgue'a „Leçons sur l'intégration“ [1], jak również w jego tezie doktorskiej [2], teorya miary wyłożona jest bardzo zwięźle (na kilku stronach), miejscami niezupełnie jasno [3]. Wykładając w tym roku Całki Lebesgue'a jak kurs specyalny, byłem zmuszony teoryę miary opracować szczegółowo. Wprowadzenie pewnych prostych pojęć i symboli oraz szeregu (bardzo krótkich) twierdzeń przygotowawczych pozwoliło mi, jak sądzę, teoryę miary Lebesgue'a uczynić bardziej przejrzystą i łatwiejszą do opanowania.

Praca niniejsza składa się z trzech rozdziałów. W pierwszym podaję szereg twierdzeń przygotowawczych, dotyczących zbiorów przedziałów; niektóre z nich same już przez się przedstawiają interes. W rozdziale drugim wykładam zasadnicze twierdzenia teoryi miary; niektóre z nich są nieco ogólniejsze, niż u Lebesgue'a i de la Vallée Poussina. W końcu rozdziałn podaję (jak sądzę, nowy) dowód elementarny twierdzenia, że odcinka nie można rozbić na dwa zbiory punktów, których miary są w każdym przedziale równe. W rozdziale trzecim wyprowadzam ważniejsze twierdzenia o funkcyach mierzalnych, upraszczając, bądź uzupełniając niektóre dowody Lebesgue'a.

---

[1] H. Lebesgue, „Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives“ Paris 1904. Teorya miary znajduje sie tam na str 102—110.

[2] H. Lebesgue, „Intégrale, Longueur, Aire“. Annali di matematica S. III, T. VII.

[3] Nieco więcej miejsca poświęca teoryi miary Lebesgue'a Ch J. de la Vallé Poussin w swym „Cours d'Analyse Infinitésimale“. T. 1, Louvain et Paris 1909, p. 240 i nast.

I. Twierdzenia przygotowawcze do teoryi miary.

W rozważaniach naszych będziemy mieli do czynienia:

1) z poszczególnemi punktami prostej; będziemy je oznaczali małemi literami łacińskiemi;

2) ze zbiorami punktów prostej; będziemy je oznaczali dużemi literami łacińskiemi;

3) z poszczególnemi przedziałami (odcinkami); będziemy je oznaczali małemi literami greckiemi;

4) ze zbiorami przedziałów; będziemy je oznaczali dużemi literami greckiemi.

Punkt prostej i jego spółrzędną będziemy oznaczali tym samym symbolem.

Odcinek δ, którego końcami są punkty a i b, będziemy oznaczali przez (a, b). Długość przedziału (odcinka) $\delta = (a, b)$, czyli liczbę $b - a$, będziemy oznaczali przez δ. Jeżeli zbiór przedziałów Δ jest przeliczalny, to sumę długości wszystkich przedziałów tego zbioru będziemy oznaczali przez $\overline{\Delta}$.

Jeżeli dany punkt p spełnia nierówności

$$a < p < b,$$

to będziemy mówili, że p leży wewnątrz przedziału $\delta = (a, b)$, pisząc:

$$p \subset \delta.$$

Jeżeli punkt p leży wewnątrz jednego przynajmniej z przedziałów zbioru Δ, to będziemy mówili, że p leży wewnątrz Δ, pisząc:

$$p \subset \Delta.$$

Jeżeli każdy punkt zbioru P leży wewnątrz Δ, to będziemy mówili, że P leży wewnątrz Δ, pisząc:

$$P \subset \Delta.$$

Jeżeli każdy punkt, leżący wewnątrz Δ, leży zawsze wewnątrz Δ_1, to będziemy pisali:

$$\Delta \subset \Delta_1.$$

Względność $\subset$ jest oczywiście przechodnia (Naprz. z $p \subset \delta$, $\delta \subset \Delta$, $\Delta \subset \Delta_1$, $\Delta_1 \subset \delta_0$, wynika: $p \subset \delta_0$).

Jeżeli jednocześnie

$$\Delta \subset \Delta_1 \quad \text{oraz} \quad \Delta_1 \subset \Delta$$

(t. j., jeżeli zbiory przedziałów Δ i Δ_1 posiadają te same punkty wewnętrzne), to będziemy mówili, że zbiory Δ i Δ_1 są *równoważne*, pisząc

$$\Delta \infty \Delta_1.$$

(Więc np. zbiór, złożony z dwóch przedziałów: (0,2) i (1,3), jest równoważny przedziałowi (0,3)).

O dwóch przedziałach mówimy, że *nie zachodzą na siebie*, jeżeli nie posiadają żadnego wspólnego punktu wewnętrznego. Zbiór Δ, którego żadne dwa przedziały nie zachodzą na siebie, będziemy nazywali *normalnym*.

Twierdzenie 1. *Każdy zbiór przedziałów jest równoważny pewnemu i tylko jednemu zbiorowi normalnemu.*

Dowód. Niech Δ oznacza dany zbiór przedziałów. Oznaczmy przez P zbiór tych wszystkich punktów, które nie leżą wewnątrz Δ. Zbiór P jest zamknięty, co wynika z uwagi, że jeżeli dany punkt leży wewnątrz Δ, to i wszystkie dostatecznie blizkie do niego punkty również leżą wewnątrz Δ. Lecz, jak wiadomo, każdemu zbiorowi zamkniętemu P odpowiada pewien zbiór przedziałów, nie zachodzących na siebie, Δ_0, taki, iż każdy punkt, nie należący do P, leży wewnątrz Δ_0, i naodwrót: żaden punkt wewnętrzny dla Δ_0 nie należy do P. Z definicyi zbiorów Δ i Δ_0 wynika, że $\Delta \infty \Delta_0$. Zbiór Δ jest więc równoważny pewnemu zbiorowi normalnemu.

Uwaga. Jeżeli zbiór Δ nie leży na skończonym odcinku, to jeden lub dwa przedziały zbioru Δ_0 mogą być nieskończone, co jednak nie uchybia ogólności twierdzenia (Np. dla zbioru przedziałów (0,2), (1,3), (2,4),... $(n, n+2)$,... zbiór Δ_0 składa się z przedziału $(0, +\infty)$). Zresztą w teoryi miary będziemy mieli do czynienia tylko ze zbiorami Δ, leżącemi na skończonym odcinku; odnośne zbiory Δ_0 będą więc również zbiorami skończonych przedziałów.

Aby dalej udowodnić, że zbiór przedziałów jest równoważny jednemu tylko zbiorowi normalnemu, wystarcza oczywiście dowieść, że dwa zbiory normalne, które są równoważne, składają się z tych samych przedziałów. (Jeżeli zbiór Δ składa się z przedziałów δ_1, δ_2, $\delta_3, \ldots$, to będziemy pisali $\Delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots$). W tym celu udowodnimy przedewszystkiem następujący

Lemmat. *Jeżeli $\Delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots$ jest zbiorem normalnym i jeżeli $\delta \subset \Delta$, to przy pewnem n musi być $\delta \subset \delta_n$.*

Dowód. Niech p oznacza jakikolwiek punkt wewnętrzny przedziału δ (np. jego środek). Wobec $p \subset \delta \subset \Delta$ mamy $p \subset \Delta$; istnieje więc takie n, iż $p \subset \delta_n$. Powiadam, że $\delta \subset \delta_n$. W samej rzeczy, załóżmy, że nie każdy punkt wewnętrzny przedziału δ leży wewnątrz δ_n. Istniałby więc punkt q, wewnętrzny dla δ, ale nie leżący wewnątrz δ_n. Gdyby punkt q nie był sam jednym z końców odcinka δ_n, to między punktami p i q (z których pierwszy byłby wewnętrznym, a drugi zewnętrznym dla δ_n) leżałby niewątpliwie jeden z końców odcinka $\delta_n=(a_n, b_n)$; punkt ten, jako leżący między dwoma punktami wewnętrznemi dla δ, byłby oczywiście sam wewnętrznym dla δ. W każdym więc razie jeden końców odcinka δ_n, np. punkt a_n, leżałby wewnątrz δ. Wobec $a_n \subset \delta \subset \Delta$ byłoby $a_n \subset \Delta$, zatem, przy pewnem k mielibyśmy $a_n \subset \delta_k$. Jeden z końców przedziału δ_n leżałby więc wewnątrz przedziału δ_k, wbrew założeniu, że przedziały zbioru Δ nie zachodzą na siebie. Nasz lemmat został więc dowiedziony.

Załóżmy teraz, że zbiory

$$\Delta=\sum_n \delta_n \quad \text{oraz} \quad \Delta'=\sum_n \delta_n'$$

są oba normalne[1], oraz, że $\Delta \backsim \Delta'$. Niech n oznacza dany wskaźnik. Ponieważ $\delta_n' \subset \Delta' \subset \Delta$, przeto mamy $\delta_n' \subset \Delta$, zatem, wobec dowiedzionego lemmatu, przy pewnem m, mamy $\delta_n' \subset \delta_m$. Lecz z drugiej strony, podobnież, przy pewnem k, musi być $\delta_m \subset \delta_k'$. Ze związku

$$\delta_n' \subset \delta_m \subset \delta_k'$$

znajdujemy $\delta_n' \subset \delta_k'$, co jest możliwe tylko dla $k=n$, gdyż przedziały zbioru Δ' nie zachodzą na siebie. Jest więc jednocześnie

$$\delta_n' \subset \delta_m \quad \text{oraz} \quad \delta_m \subset \delta_n',$$

skąd oczywiście wynika, że przedziały δ_n' i δ_m są identyczne (jako dwa przedziały, mające te same punkty wewnętrzne).

Każdy z przedziałów zbioru Δ' jest więc pewnym przedziałem zbioru Δ, a że to samo da się oczywiście powiedzieć i naodwrót, więc zbiory Δ i Δ' składają się z tych samych przedziałów. Dwa zbiory normalne, które są równoważne, nie mogą więc być różne.

Twierdzenie 1 możemy więc uważać za dowiedzione w zupełności.

Zbiór normalny, równoważny danemu zbiorowi Δ, będziemy oznaczali przez $N(\Delta)$.

Twierdzenie 2. J e ż e l i $\Delta \subset \delta$, t o $\overline{N(\Delta)} \leqslant \overline{\delta}$.

Dowód. Położmy

$$N(\Delta)=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots;$$

będzie więc

[1]) Zbiory normalne zawierają przeliczalną conajwyżej mnogość przedziałów, gdyż zbiór przedziałów nie zachodzących na siebie jest, jak wiadomo, conajwyżej przeliczalny.

$$\overline{N(\Delta)}=\overline{\nu}_1+\overline{\nu}_2+\overline{\nu}_3+\ldots$$

Przedziały $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ nie zachodzą na siebie i leżą (w liczbie skończonej) wszystkie na odcinkku δ: jasnem jest więc, że suma ich długości nie przenosi długości odcinka δ, czyli że

$$\overline{\nu}_1+\overline{\nu}_2+\ldots+\overline{\nu}_n \leqslant \overline{\delta}$$

(wykończenie tego dowodu, nie przedstawiające zresztą najmniejszej trudności, pozostawiamy czytelnikowi). Stąd wynika prawdziwość twierdzenia, jeżeli zbiór $N(\Delta)$ składa się ze skończonej liczby przedziałów. W przeciwnym razie, przechodząc w otrzymanej nierówności do granicy dla $n=\infty$, dostaniemy

$$\overline{N(\Delta)} \leqslant \overline{\delta}.$$

Twierdzenie 2 zostało więc dowiedzione w zupełności.

Twierdzenie 3. J e ż e l i $\delta \subset \Delta$, to $\overline{\delta} \leqslant \overline{\Delta}$.

Dowód. Połóżmy

$$\delta=(a, b)$$

oraz, przy dowolnem danem dodatniem $\varepsilon\left(<\dfrac{b-a}{2}\right)$:

$$\delta'=(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon);$$

będzie więc

$$\overline{\delta}=\overline{\delta'}+2\varepsilon.$$

Wobec $\delta \subset \Delta$ każdy punkt przedziału δ', nie wyłączając końców, będzie leżał wewnątrz Δ. W myśl znanego twierdzenia B o r e l a znajdzie się taka s k o ń c z o n a część Δ_0 zbioru Δ, że będzie dla każdego punktu p przedziału δ' również $p \subset \Delta_0$, skąd (wobec skończoności zbioru Δ_0) oczywiste jest, że

$$\overline{\delta'} \leqslant \overline{\Delta}_0.$$

Mamy więc przy wszelkiem (dostatecznie małem) dodatniem ε:

$$\overline{\delta} \leqslant \overline{\Delta}_0+2\varepsilon,$$

skąd w jednej chwili:

$$\overline{\delta} \leqslant \overline{\Delta}_0$$

i, tembardziej:

$$\overline{\delta} \leqslant \overline{\Delta}$$

(gdyż zbiór Δ_0 jest częścią zbioru Δ). Dowiedliśmy więc tw. 3.

Twierdzenie 4. J e ż e l i $\Delta \subset \Delta'$, t o $\overline{N(\Delta)} \leqslant \overline{\Delta'}$.

Twierdzenie to rozbijemy na dwa twierdzenia:

4a): Jeżeli $\Delta \subset \Delta'$, to $\overline{N(\Delta)} \leqslant \overline{N(\Delta')}$, oraz

4b). Zawsze $\overline{N(\Delta)} \leqslant \overline{\Delta}$.

(Z twierdzeń 4a i 4b wynika oczywiście natychmiast twierdzenie 4).

Dowód tw. 4a. Połóżmy:

$$N(\Delta) = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots,$$
$$N(\Delta') = \nu_1' + \nu_2' + \nu_3' + \ldots$$

Ze związków $\Delta \subset \Delta'$, $\Delta' \infty N(\Delta')$ mamy $\Delta \subset N(\Delta')$, zatem, przy wszelkiem k:

$$\nu_k \subset N(\Delta').$$

Stąd, w myśl udowodnionego wyżej lemmatu, przy pewnem n musi być

$$\nu_k \subset \nu_n'$$

i związek ten może (dla danego k) zachodzić przy jednem tylko n, gdyż przedziały ν' nie zachodzą na siebie.

Oznaczmy ogólnie, przy danem n, przez Δ_n zbiór tych wszystkich przedziałów ν_k, dla których

$$\nu_k \subset \nu_n';$$

będzie więc oczywiście

$$N(\Delta) = \sum_n \Delta_n$$

(niektóre ze zbiorów Δ_n mogą zresztą być próżne, t. j. nie zawierać żadnego przedziału), oraz

$$\Delta_n \subset \nu_n'.$$

Stąd, w myśl tw. 2:

$$\overline{N(\Delta_n)} \leqslant \overline{\nu_n'};$$

lecz przedziały zbioru Δ_n (jako należące do zbioru normalnego $N(\Delta)$) nie zachodzą na siebie, mamy więc

$$N(\Delta_n) = \Delta_n.$$

Jest więc, przy wszelkiem n:

$$\overline{\Delta}_n \leqslant \overline{\nu}_n',$$

skąd

$$\overline{N(\Delta)} = \sum_n \overline{\Delta}_n \leqslant \sum_n \overline{\nu}_n' = \overline{N(\Delta')},$$

zatem $\overline{N(\Delta)} \leqslant \overline{N(\Delta')}$, c. b. d. o.

Dowód tw. 4b. Połóżmy

$$\Delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots,$$
$$N(\Delta) = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots$$

Wobec $\delta_k \subset \Delta \subset N(\Delta)$ mamy $\delta_k \subset N(\Delta)$, zatem, w myśl wiadomego lemmatu, przy pewnem n (oznaczonem w zupełności przez k):

$$\delta_k \subset \nu_n.$$

Oznaczmy ogólnie przez Γ_n zbiór tych wszystkich przedziałów δ_k, dla których

$$\delta_k \subset \nu_n.$$

Będzie więc

$$\Delta = \sum_n \Gamma_n, \tag{1}$$

oraz

$$\Gamma_n \subset \nu_n.$$

Z drugiej strony, wobec (1), jeżeli $p \subset \nu_n$, to musi być przy jednem conajmniej k:

$$p \subset \Gamma_k, \tag{2}$$

a że

$$\Gamma_k \subset \nu_k,$$

więc mamy

$$p \subset \nu_k.$$

Musi więc być $k = n$, gdyż w przeciwnym razie przedziały ν_n i ν_k, które na siebie nie zachodzą, miałyby wspólny punkt wewnętrzny p. Jest więc, wobec (2):

$$p \subset \Gamma_n,$$

czyli, że każdy punkt wewnętrzny dla ν_n leży wewnątrz Γ_n. Jest więc

$$\nu_n \subset \Gamma_n,$$

skąd, w myśl tw. 3:

$$\overline{\nu}_n \leqslant \overline{\Gamma}_n,$$

zatem

$$\overline{N(\Delta)} = \sum_n \overline{\nu}_n \leqslant \sum_n \overline{\Gamma}_n = \overline{\Delta}.$$

skąd $\overline{N(\Delta)} \leqslant \overline{\Delta}$, c. b. d. o.

Twierdzenie 5. $\overline{N\left(\sum_n \Delta_n\right)} \leqslant \sum_n \overline{N(\Delta_n)}$.

Dowód. Niech $\sum_n \Delta_n$ oznacza dany, skończony albo nieskończony szereg zbiorów Δ_n. Połóżmy

$$\Delta = \sum_n \Delta_n, \qquad \Gamma_n = N(\Delta_n), \qquad \Gamma = \sum_n \Gamma_n; \tag{3}$$

będzie oczywiście

$$\Delta \subset \Gamma,$$

zatem, w myśl tw. 4:

$$\overline{N(\Delta)} \leqslant \overline{\Gamma} = \sum_n \overline{\Gamma}_n,$$

czyli, wobec (3):

$$\overline{N\left(\sum_n \Delta_n\right)} \leqslant \sum_n \overline{N(\Delta_n)},$$

c. b. d. o.

Twierdzenie 6. Jeżeli $\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$, to $\overline{N(\Delta)} = \lim_{n=\infty} \overline{N\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k\right)}$.

Dowód. Połóżmy

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k = \Delta_n.$$

Ponieważ zbiór Δ_n składa się ze skończonej liczby odcinków, więc i zbiór $N(\Delta_n)$ składa się ze skończonej liczby odcinków (jak łatwo widzieć, nie większej od n). Możemy więc położyć

$$N(\Delta_n) = \nu_1^{(n)} + \nu_2^{(n)} + \ldots + \nu_{k_n}^{(n)}.$$

Podobnież

$$N(\Delta_{n+1}) = \nu_1^{(n+1)} + \nu_2^{(n+1)} + \ldots + \nu_{k_{n+1}}^{(n+1)}.$$

Mamy oczywiście

$$\Delta_n \subset \Delta_{n+1},$$

zatem też

$$N(\Delta_n) \subset N(\Delta_{n+1});$$

w myśl wiadomego lemmatu wnosimy więc, że każdy z odcinków $\nu^{(n)}$ leży na pewnym odcinku $\nu^{(n+1)}$. Z każdego z odcinków $\nu^{(n+1)}$ usuńmy te odcinki $\nu^{(n)}$, które ewentualnie na nim leżą: ze zbioru odcinków (4) pozostanie przez to nowy, również skończony zbiór odcinków

$$\mu_1^{(n+1)} + \mu_2^{(n+1)} + \ldots + \mu_{l_{n+1}}^{(n+1)}$$

(zbiór ten ewentualnie może być próżny).

Połóżmy:

$$\Gamma = \nu_1' + \nu_2' + \ldots \nu_{k_1}' + \mu_1'' + \mu_2'' + \ldots + \mu_{l_2}'' + \mu_1''' + \mu_2''' + \ldots$$
$$+ \mu_{l_3}''' + \mu_1^{(4)} + \ldots,$$

$$\Gamma_n = \nu_1' + \nu_2' + \ldots + \nu_{k_1}' + \mu_1'' + \ldots + \mu_{l_n}^{(n)}.$$

Odcinki zbioru Γ_n, zestawione razem, dają oczywiście zbiór odcinków $N(\Delta_n)$ (w tem znaczeniu, w jakiem np. odcinki (0, 1) i (1, 2) zestawione razem dają odcinek (0, 2)); każdy więc punkt, leżący wewnątrz $N(\Delta_n)$, a nie będący końcem żadnego z odcinków zbioru Γ_n, jest wewnętrzny dla Γ_n. Wnosimy stąd, że każdy punkt wewnętrzny dla Δ (punkt taki musi być przy pewnem n wewnętrznym dla δ_n oraz $N(\Delta_n)$), nie będący końcem żadnego z odcinków zbioru Γ, jest wewnętrzny dla Γ.

Co się zaś tyczy końców odcinków zbioru Γ, to mnogość ich jest conajwyżej przeliczalna: możemy je więc ustawić w pewien ciąg (skończony lub nieskończony):

$$c_1, \quad c_2, \quad c_3, \ldots. \tag{5}$$

Połóżmy, przy danem $\varepsilon > 0$:

$$\lambda_n = \left(c_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \quad c_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right).$$

Każdy punkt zbioru (5) będzie więc leżał wewnątrz zbioru przedziałów

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots,$$

przyczem oczywiście

$$\overline{\Lambda} = \sum_n \overline{\lambda}_n = \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \varepsilon. \tag{6}$$

Możemy więc teraz napisać:

$$\Delta \subset (\Gamma + \Lambda),$$

skąd, w myśl tw. 4 i 5:

$$\overline{N(\Delta)} \leqslant \overline{N(\Gamma + \Lambda)} \leqslant \overline{\Gamma} + \overline{\Lambda},$$

zatem, wobec (6):

$$\overline{N(\Delta)} \leqslant \overline{\Gamma} + \varepsilon,$$

a że jest to prawdą przy wszelkiem dodatniem ε, więc:

$$\overline{N(\Delta)} \leqslant \overline{\Gamma}. \tag{7}$$

Z drugiej strony oczywiście

$$\overline{\Gamma}_n = \overline{N(\Delta_n)},$$

zatem:

$$\overline{\Gamma} = \lim_{n=\infty} \overline{\Gamma}_n = \lim_{n=\infty} \overline{N(\Delta_n)}$$

(ciąg $\overline{\Gamma}_n$, jako monotoniczny zmierza w każdym razie do oznaczonej granicy skończonej lub nieskończonej). Jest więc, wobec (7):

$$\overline{N(\Delta)} \leqslant \lim_{n=\infty} \overline{N(\Delta_n)}. \tag{8}$$

Ale, wobec

$$\Delta_n \subset \Delta,$$

oraz, w myśl tw. 4a, mamy:

$$\overline{N(\Delta_n)} \leqslant \overline{N(\Delta)},$$

skąd

$$\lim_{n=\infty} \overline{N(\Delta_n)} \leqslant \overline{N(\Delta)}. \tag{9}$$

Wzory (8) i (9) dają .

$$\overline{N(\Delta)} = \lim_{n=\infty} \overline{N(\Delta_n)},$$

c. b. d. o. Twierdzenia 6 dowiedliśmy zatem w zupełności.

Twierdzenie 7. Istnieje i tylko jeden zbiór normalny, którego punkty wewnętrzne są wspólnemi punktami wewnętrznemi dwóch danych zbiorów Δ' i Δ'', oraz naodwrót.

Dowód. Że zbiór normalny, spełniający warunki naszego twierdzenia, może być tylko jeden, wynika natychmiast z twierdzenia 1. Wystarczy więc okazać tylko, że istnieje conajmniej jeden zbiór normalny, spełniający warunki naszego twierdzenia.

Oznaczmy przez Q zbiór tych wszystkich punktów, które bądź nie leżą wewnątrz Δ', bądź nie leżą wewnątrz Δ'' (bądź wreszcie nie leżą ani wewnątrz Δ', ani wewnątrz Δ''). Zbiór Q jest, jak łatwo widzieć, zamknięty (jeżeli bowiem punkt p nie należy do Q, to musi leżeć jednocześnie wewnątrz Δ' i wewnątrz Δ'', a w takim razie i punkty, dostatecznie blizkie punktu p leżą wewnątrz Δ' i Δ'' jednocześnie, zatem nie należą do Q). Zbiór Q, jako zamknięty, wyznacza zatem pewien zbiór normalny Δ, taki, iż każdy punkt, nie należący do Q — czyli leżący jednocześnie wewnątrz Δ' i Δ'' — leży wewnątrz Δ, i naodwrót. Zbiór Δ jest więc żądany.

Zbiór normalny Δ, spełniający warunki naszego twierdzenia, będziemy oznaczali przez $\Delta'\Delta''$. Oczywiście $\Delta'\Delta'' = \Delta''\Delta'$.

Udowodnione twierdzenie daje się z łatwością uogólnić na dowolną skończoną liczbę zbiorów $\Delta', \Delta'', \ldots, \Delta^{(n)}$, przestaje jednak wogóle być prawdziwem dla nieskończonego ciągu zbiorów $\left(\text{np. jeżeli zbiór } \Delta^{(k)} \text{ składa się z jednego tylko przedziału } \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right), \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots\right)$.

Twierdzenie 8. $(\Delta_1 + \Delta_2)\Delta_3 \backsim (\Delta_1\Delta_3 + \Delta_2\Delta_3)$.

Dowód. Połóżmy

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

Jeżeli $p \subset \Delta\Delta_3$, to musi być jednocześnie $p \subset \Delta$ oraz $p \subset \Delta_3$. Ale skoro $p \subset \Delta$, to albo $p \subset \Delta_1$, albo $p \subset \Delta_2$ (nie wyłączając, że obie względności zachodzą jednocześnie). W każdym więc razie jest albo $p \subset \Delta_1$ i $p \subset \Delta_3$ — zatem $p \subset \Delta_1\Delta_3$ — albo też $p \subset \Delta_2$ i $p \subset \Delta_3$ — zatem $p \subset \Delta_2\Delta_3$. Jest przeto w każdym razie $p \subset (\Delta_1\Delta_3 + \Delta_2\Delta_3)$. Dowiedliśmy zatem, że

$$\Delta\Delta_3 \subset (\Delta_1\Delta_3 + \Delta_2\Delta_3). \tag{10}$$

Załóżmy teraz, że $p \subset (\Delta_1\Delta_3 + \Delta_2\Delta_3)$. Mamy więc albo $p \subset \Delta_1\Delta_3$, albo też $p \subset \Delta_2\Delta_3$, w każdym więc razie $p \subset \Delta_3$ oraz $p \subset (\Delta_1 + \Delta_2)$, czyli $p \subset (\Delta_1 + \Delta_2)\Delta_3$.

Dowiedliśmy więc też, że

$$\Delta_1\Delta_3 + \Delta_2\Delta_3 = (\Delta_1 + \Delta_2)\Delta_3, \tag{11}$$

a wzory (10) i (11) dają

$$(\Delta_1 + \Delta_2)\Delta_3 \backsim \Delta_1\Delta_3 + \Delta_2\Delta_3, \tag{12}$$

c. b. d. o.

Wniosek. $(\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta' + \Delta'') \backsim (\Delta_1\Delta' + \Delta_1\Delta'' + \Delta_2\Delta' + \Delta_2\Delta'')$.

Dowód. Połóżmy

$$\Delta' + \Delta'' = \Delta_3; \tag{13}$$

w myśl twierdzenia (8) będziemy mieli wzór (12). Lecz, wobec (13) i w myśl tw. (8) możemy napisać:

$$\Delta_1\Delta_3 = \Delta_1(\Delta' + \Delta'') \backsim \Delta_1\Delta' + \Delta_1\Delta'',$$

$$\Delta_2\Delta_3 = \Delta_2(\Delta' + \Delta'') \backsim \Delta_2\Delta' + \Delta_2\Delta'',$$

skąd

$$\Delta_1\Delta_3 + \Delta_2\Delta_3 \backsim (\Delta_1\Delta' + \Delta_1\Delta'' + \Delta_2\Delta' + \Delta_2\Delta''),$$

co, wobec (12) i (13), daje wniosek, który chcieliśmy wyprowadzić.

Twierdzenie 9. $\overline{\Delta'\Delta''} \leqslant \overline{N(\Delta')}$.

Dowód. Mamy oczywiście

$$\Delta'\Delta'' \subset \Delta',$$

zatem, w myśl twierdzenia 4a:

$$\overline{N(\Delta'\Delta'')} \leqslant \overline{N(\Delta')}. \tag{14}$$

Lecz zbiór $\Delta'\Delta''$ sam jest normalny, mamy więc

$$\Delta'\Delta'' = N(\Delta'\Delta'')$$

i nierówność (14) daje:

$$\overline{\Delta'\Delta''} \leqslant \overline{N(\Delta')},$$

c. b. d. o. Stąd, tembardziej (w myśl tw. 4b):

$$\overline{\Delta'\Delta''} \leqslant \overline{\Delta'}.$$

Twierdzenie 10. $\overline{N(\Delta)} + \overline{N(\Delta')} = \overline{N(\Delta + \Delta')} + \overline{\Delta\Delta'}$.

Dowód. Połóżmy

$$\Gamma = N(\Delta) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \ldots,$$

$$\Gamma_n = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n,$$

$$\Gamma' = N(\Delta') = \gamma_1' + \gamma_2' + \gamma_3' + \ldots,$$

$$\Gamma_n' = \gamma_1' + \gamma_2' + \ldots + \gamma_n'.$$

$$\Lambda = \Gamma + \Gamma' = \gamma_1 + \gamma_1' + \gamma_2 + \gamma_2' + \gamma_3 + \ldots,$$

$$\Lambda_{2n} = \gamma_1 + \gamma_1' + \gamma_2 + \gamma_2' + \ldots + \gamma_n + \gamma_n' = \Gamma_n + \Gamma_n'.$$

Mamy oczywiście:

$$N(\Delta + \Delta') = N(N(\Delta) + N(\Delta')) = N(\Gamma + \Gamma'),$$

$$\Delta\Delta' = N(\Delta)\, N(\Delta') = \Gamma \,.\, \Gamma';$$

twierdzenie 10 przybiera więc postać:

$$\overline{\Gamma} + \overline{\Gamma'} = \overline{N(\Gamma + \Gamma')} + \overline{\Gamma \,.\, \Gamma'}. \tag{15}$$

Gdyby zbiory Γ i Γ' były oba skończone, wzór (15) zachodziłby oczywiście (czego bliższy dowód pozostawiamy czytelnikowi). Zajmiemy się przypadkiem, kiedy oba zbiory Γ i Γ' są nieskończone (gdyby jeden z tych zbiorów był skończony, drugi zaś nieskończony, należałoby w dowodzie poczynić pewne oczywiste modyfikacye).

Mamy oczywiście:

$$\overline{\Gamma} = \lim_{n=\infty} \overline{\Gamma_n}, \qquad \overline{\Gamma'} = \lim_{n=\infty} \overline{\Gamma_n'}.$$

Wystarczy oczywiście przeprowadzić dowód tylko w założeniu, że obie wypisane granice są skończone (w przeciwnym bowiem razie, jak łatwo widzieć, obie strony wzoru (15) byłyby $= +\infty$ i twierdzenie 10 byłoby prawdziwe).

Mamy, dalej, w myśl tw. 6:

$$\overline{N(\Lambda)} = \lim_{n=\infty} \overline{N(\Lambda_{2n})} = \lim_{n=\infty} \overline{N(\Gamma_n + \Gamma_n')}. \tag{17}$$

Ponieważ zbiory Γ_n i Γ_n' są skończone, więc mamy, jak łatwo widzieć:

$$\overline{\Gamma_n} + \overline{\Gamma_n'} = \overline{N(\Gamma_n + \Gamma_n')} + \overline{\Gamma_n\Gamma_n'},$$

skąd, wobec (16) i (17), w granicy, dla $n = \infty$:

$$\overline{\Gamma} + \overline{\Gamma'} = \overline{N(\Gamma + \Gamma')} + \lim_{n=\infty} \overline{\Gamma_n\Gamma_n'}$$

(istnienie granicy $\lim\limits_{n=\infty} \overline{\Gamma_n\Gamma_n'}$ jest zapewnione przez istnienie trzech pozostałych granic, zresztą wynika bezpośrednio z uwagi, że ciąg $\overline{\Gamma_n\Gamma_n'}$ jest niemalejący).

Widzimy więc, że dla dowodu wzoru (15) wystarczy okazać, że

$$\lim_{n=\infty} \overline{\Gamma_n\Gamma_n'} = \overline{\Gamma\Gamma'}. \tag{18}$$

Połóżmy

$$H_n = \gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} + \ldots.$$

$$H'_n = \gamma'_{n+1} + \gamma'_{n+2} + \ldots.$$

Będzie więc

$$N(\Delta) = \Gamma = \Gamma_n + H_n, \qquad N(\Delta') = \Gamma' = \Gamma_n' + H_n',$$

skąd

$$\Delta\Delta' \infty \Gamma\Gamma' = (\Gamma_n + H_n)(\Gamma_n' + H_n'),$$

zatem, w myśl wniosku z tw. 8-go:

$$\Delta\Delta' \infty \Gamma_n\Gamma_n' + \Gamma_n H_n' + H_n\Gamma_n' + H_n H_n'.$$

Stąd, w myśl tw. 4a i 5:

$$\overline{\Delta\Delta'} \leqslant \overline{\Gamma_n\Gamma_n'} + \overline{\Gamma_n H_n'} + \overline{H_n\Gamma_n'} + \overline{H_n H_n'},$$

a że, w myśl tw. 9:

$$\overline{\Gamma_n H_n'} \leqslant \overline{H_n'}, \quad \overline{H_n\Gamma_n'} \leqslant \overline{H_n}, \quad \overline{H_n H_n'} \leqslant \overline{H_n},$$

więc

$$\overline{\Delta\Delta'} \leqslant \overline{\Gamma_n\Gamma_n'} + \overline{H_n'} + 2 \,.\, \overline{H_n}.$$

Lecz, wobec zbieżności szeregów $\overline{\Gamma}$ i $\overline{\Gamma'}$, mamy oczywiście

$$\lim_{n=\infty} \overline{H_n} = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n=\infty} \overline{H_n'} = 0,$$

ostatnia nierówność daje więc, w granicy dla $n = \infty$:

$$\overline{\Delta\Delta'} \leqslant \lim_{n=\infty} \overline{\Gamma_n\Gamma_n'}. \tag{19}$$

Z drugiej strony, wobec

$$\Gamma_n \subset \Delta, \quad \Gamma_n' \subset \Delta',$$

mamy oczywiście

$$\Gamma_n\Gamma_n' \subset \Delta\Delta',$$

skąd, w myśl tw. 4a:

$$\overline{\Gamma_n\Gamma_n'} \leqslant \overline{\Delta\Delta'}$$

i przeto, w granicy dla $n = \infty$:

$$\lim_{n=\infty} \overline{\Gamma_n\Gamma_n'} \leqslant \overline{\Delta\Delta'}. \tag{20}$$

Nierówności (19) i (20) dają wzór (18), który, jak wiemy, pociąga za sobą prawdziwość wzoru (15) oraz twierdzenia 10.

II. Zasadnicze twierdzenia teoryi miary.

Niech P oznacza dany zbiór punktów, leżący wewnątrz skończonego odcinka δ_0. Weźmy pod rozwagę wszystkie możliwe zbiory przedziałów Δ, takie iż

$$P \subset \Delta.$$

Dolną granicę wszystkich (odpowiadających tym zbiorom Δ) liczb $\overline{\Delta}$ nazywamy, według Lebesgue'a, miarą zewnętrzną zbioru P i oznaczamy przez

$$m_e(P).$$

Miara zewnętrzna (w znaczeniu Lebesgue'a) danego zbioru P (punktów, leżących wewnątrz skończonego odcinka), jest to więc liczba rzeczywista (oczywiście nieujemna) $m_e(P)$, posiadająca następujące dwie, charakterystyczne dla niej własności:

1) Warunek $P \subset \Delta$ pociąga za sobą zawsze nierówność

$$m_e(P) \leqslant \overline{\Delta}.$$

2) Do każdego dodatniego ε można dobrać taki zbiór Δ, iż

$$P \subset \Delta \quad \text{oraz} \quad \overline{\Delta} < m_e(P) + \varepsilon.$$

Możemy przytem założyć, że $\Delta \subset \delta_0$, gdyż w przeciwnym razie, jak łatwo widzieć, wystarczyłoby zastąpić zbiór Δ przez zbiór $\Delta\delta_0$.

Oznaczmy przez $C_{\delta_0}(P)$ zbiór wszystkich tych punktów wewnętrznych odcinka δ_0, które nie należą do zbioru P. Liczbę

$$\overline{\delta}_0 - m_e(C_{\delta_0}(P))$$

nazywamy, według Lebesgue'a, miarą wewnętrzną zbioru P i oznaczamy przez

$$m_i(P);$$

jest to więc też pewna liczba rzeczywista nieujemna (gdyż, jak łatwo widzieć, $m_e(C_{\delta_0}(P)) \leqslant \overline{\delta}_0$).

Każdy zbiór punktów, leżących wewnątrz skończonego odcinka posiada więc oznaczoną miarę zewnętrzną oraz oznaczoną miarę wewnętrzną (z definicyi miary wewnętrznej sądzićby można, że zależy ona nietylko od zbioru P, ale i od odcinka δ_0; że tak nie jest, okażemy później).

Twierdzenie I. Mamy stale:

$$m_e(P) \geqslant m_i(P). \tag{1}$$

Dowód. Niech P oznacza dany zbiór punktów, leżący wewnątrz odcinka δ_0. Połóżmy

$$Q = C_{\delta_0}(P);$$

zbiór $P+Q$ będzie więc zbiorem wszystkich punktów wewnętrznych odcinka δ_0.

Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Istnieją takie Δ i Γ (w myśl definicyi miary zewnętrznej), iż

$$P \subset \Delta, \quad \overline{\Delta} < m_e(P) + \varepsilon,$$

$$Q \subset \Gamma, \quad \overline{\Gamma} < m_e(Q) + \varepsilon.$$

Stąd:

$$(P+Q) \subset (\Delta + \Gamma) \tag{2}$$

oraz

$$\overline{\Delta} + \overline{\Gamma} < m_e(P) + m_e(Q) + 2\varepsilon = m_e(P) + \overline{\delta}_0 - m_i(P) + 2\varepsilon. \tag{3}$$

Lecz każdy punkt wewnętrzny odcinka δ_0 jest punktem zbioru $P+Q$, mamy więc, wobec (2):

$$\delta_0 \subset (\Delta + \Gamma),$$

skąd, w myśl tw. 3:

$$\overline{\delta}_0 \leqslant \overline{\Delta} + \overline{\Gamma},$$

zatem, wobec (3):

$$\overline{\delta}_0 < m_e(P) + \overline{\delta}_0 - m_i(P) + 2\varepsilon,$$

skąd:

$$m_e(P) - m_i(P) > -2\varepsilon,$$

a że nierówność ta pozostaje prawdziwą przy wszelkiem dodatniem ε, więc mamy

$$m_e(P) - m_i(P) \geqslant 0,$$

czyli nierówność (1), c. b. d. o.

Jeżeli, w szczególności, we wzorze (1) zachodzi znak równości, t. j. jeżeli

$$m_e(P) = m_i(P),$$

to zbiór P nazywamy mierzalnym w sensie Lebesgue'a (lub krócej: mierzalnym (L)), a wspólną wartość miar $m_e(P)$ i $m_i(P)$ nazywamy miarą (L) zbioru P i oznaczamy przez

$$m(P).$$

Z definicyi mierzalności wynika, że jeżeli zbiór P jest mierzalny, to i zbiór $Q = C_{\delta_0}(P)$ jest mierzalny oraz

$$m(Q) = \overline{\delta}_0 - m(P).$$

W samej rzeczy, wobec $Q = C_{\delta_0}(P)$, mamy również, jak łatwo widzieć: $P = C_{\delta_0}(Q)$; jest więc:

$$m_i(P) = \bar{\delta}_0 - m_e(Q),$$

oraz

$$m_i(Q) = \delta_0 - m_e(P),$$

zatem, wobec $m_e(P) = m_i(P) = m(P)$:

$$m_e(Q) = \bar{\delta}_0 - m_i(P) = \bar{\delta}_0 - m(P),$$

$$m_i(Q) = \bar{\delta}_0 - m_e(P) = \bar{\delta}_0 - m(P),$$

czyli

$$m_e(Q) = m_i(Q) = \bar{\delta}_0 - m(P).$$

Zbiór Q jest więc mierzalny, oraz

$$m(Q) = \bar{\delta}_0 - m(P),$$

c. b. d. o.

Twierdzenie II. Jeżeli zbiór P jest mierzalny, to dla każdej danej liczby dodatniej ε istnieją takie Δ oraz Γ, iż

$$P \subset \Delta, \quad C_{\delta_0}(P) \subset \Gamma, \quad \text{oraz} \quad \overline{\Delta\Gamma} < \varepsilon.$$

Dowód. Niech ε oznacza daną liczbę dodatnią. Z definicyi miary zewnętrznej wynika, że istnieją takie Δ i Γ, iż

$$P \subset \Delta, \quad C_{\delta_0}(P) \subset \Gamma, \quad \bar{\Delta} < m_e(P) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \bar{\Gamma} < m_e(C_{\delta_0}(P)) + \frac{\varepsilon}{2},$$

skąd

$$\bar{\Delta} + \bar{\Gamma} < m_e(P) + m_e(C_\delta(P)) + \varepsilon. \tag{4}$$

Lecz zbiór P jest, jak zakładamy, mierzalny; jest więc

$$m_e(P) + m_e(C_\delta(P)) = m_e(P) + \bar{\delta}_0 - m_i(P) = \bar{\delta}_0,$$

nierówność (4) daje więc, w myśl tw. 4b:

$$\overline{N(\Delta)} + \overline{N(\Gamma)} \leqslant \bar{\Delta} + \bar{\Gamma} < \bar{\delta}_0 + \varepsilon.$$

Stąd, w myśl tw. 10:

$$\overline{\Delta\Gamma} = \overline{N(\Delta)} + \overline{N(\Gamma)} - \overline{N(\Delta + \Gamma)} < \delta_0 + \varepsilon - \overline{N(\Delta + \Gamma)};$$

lecz, jak łatwo widzieć:

$$\overline{N(\Delta + \Gamma)} = \delta_0$$

(możemy bowiem założyć, że $\Delta \subset \delta_0$ oraz $\Gamma \subset \delta_0$, a z drugiej strony oczywiście $\delta_0 \subset (\Delta + \Gamma)$); mamy wfęc:

$$\overline{\Delta\Gamma} < \varepsilon,$$

c. b. d. o.

Twierdzenie III. Jeżeli

$$P \subset \Delta, \quad C_{\delta_0}(P) \subset \Gamma,$$

to

$$m_e(P) - m_i(P) \leqslant \overline{\Delta\Gamma}. \tag{5}$$

Dowód. Wobec założeń (5), mamy również

$$P \subset N(\Delta), \quad C_{\delta_0}(P) \subset N(\Gamma),$$

a zatem, wobec definicyi miary zewnętrznej:

$$m_e(P) \leqslant \overline{N(\Delta)}, \quad m_e(C_{\delta_0}(P)) \leqslant \overline{N(\Gamma)},$$

skąd, w myśl tw. 10:

$$m_e(P) - m_i(P) = m_e(P) - \bar{\delta}_0 + m_e(C_{\delta_0}(P))$$

$$\leqslant \overline{N(\Delta)} + \overline{N(\Gamma)} - \bar{\delta}_0 = \overline{N(\Delta + \Gamma)} + \overline{\Delta\Gamma} - \delta_0 = \overline{\Delta\Gamma},$$

skąd

$$m_e(P) - m_i(P) \leqslant \overline{\Delta\Gamma},$$

c. b. d. o.

Wniosek. Jeżeli do każdego dodatniego ε można dobrać takie Δ i Γ, iż

$$P \subset \Delta, \quad C_{\delta_0}(P) \subset \Gamma, \quad \overline{\Delta\Gamma} < \varepsilon,$$

to zbiór P jest mierzalny.

W samej rzeczy, mamy wówczas, w myśl t. III:

$$m_e(P) - m_i(P) < \varepsilon$$

przy wszelkiem dodatniem ε, skąd:

$$m_e(P) - m_i(P) \leqslant 0,$$

czyli $m_e(P) \leqslant m_i(P)$, a że, z drugiej strony, w myśl tw. I mamy

$$m_e(P) \geqslant m_i(P),$$

musi więc być:

$$m_e(P) = m_i(P),$$

co dowodzi, że zbiór P jest mierzalny.

Twierdzenie IV. Jeżeli $P' \subset P$, to

$$m_e(P') \leqslant m_e(P) \quad \text{oraz} \quad m_i(P') \leqslant m_i(P).$$

Dowód. Do danego dodatniego ε można dobrać takie Δ, iż

$$P \subset \Delta \quad \text{oraz} \quad \overline{\Delta} < m_e(P) + \varepsilon,$$

a że, wobec $P' \subset P \subset \Delta$, mamy $P' \subset \Delta$, więc:

$$m_e(P') \leqslant \overline{\Delta} < m_e(P) + \varepsilon,$$

czyli

$$m_e(P') < m_e(P) + \varepsilon.$$

Nierówność ta zachodzi przy wszelkiem dodatniem ε, mamy tedy

$$m_e(P') \leqslant m_e(P);$$

dowiedliśmy więc pierwszej części naszego twierdzenia.

Połóżmy dalej $C_{\delta_0}(P) = Q$, $C_{\delta_0}(P') = Q'$; wobec $P' \subset P$, będziemy mieli oczywiście $Q \subset Q'$, zatem, wobec prawdziwości pierwszej części naszego twierdzenia,

$$m_e(Q) \leqslant m_e(Q').$$

Lecz

$$m_e(Q) = \overline{\delta}_0 - m_i(P), \qquad m_e(Q') = \overline{\delta}_0 - m_i(P');$$

otrzymana nierówność daje więc:

$$m_i(P) \geqslant m_i(P'),$$

co dowodzi, że i druga część naszego twierdzenia jest prawdziwa.

Twierdzenie V. Mamy zawsze $m_e\left(\sum\limits_n P_n\right) \leqslant \sum\limits_n m_e(P_n)$.

Dowód. Niech ε oznacza daną liczbę dodatnią. Wobec definicyi miary zewnętrznej, istnieje (dla danego ε i danego n) takie Δ_n, iż

$$P_n \subset \Delta_n \quad \text{oraz} \quad \overline{\Delta}_n < m_e(P_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

skąd, kładąc

$$\Delta = \sum_n \Delta_n,$$

będziemy mieli

$$\sum_n P_n \subset \Delta,$$

oraz

$$\overline{\Delta} = \sum_n \overline{\Delta}_n < \sum_n \left(m_e(P_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_n m_e(P_n) + \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \sum_n m_e(P_n) + \varepsilon.$$

Jest zatem

$$m_e\left(\sum_n P_n\right) < \overline{\Delta} < \sum_n m_e(P_n) + \varepsilon,$$

czyli

$$m_e\left(\sum_n P_n\right) < \sum_n m_e(P_n) + \varepsilon,$$

skąd, wobec dowolności liczby dodatniej ε:

$$m_e\left(\sum_n P_n\right) \leqslant \sum_n m_e(P_n),$$

c. b. d. o.

Twierdzenie VI. Jeżeli zbiory P_n leżą wszystkie wewnątrz skończonego odcinka δ_0 i nie posiadają elementów wspólnych, to $m_i\left(\sum\limits_n P_n\right) \geqslant \sum\limits_n m_i(P_n)$.

Udowodnimy twierdzenie nasze przedewszystkiem dla dwóch zbiorów. Załóżmy więc, że zbiory P_1 i P_2 leżą wewnątrz δ_0 i nie posiadają elementów wspólnych.

Mamy
$$m_i(P_1 + P_2) = \overline{\delta}_0 - m_e(C_{\delta_0}(P_1 + P_2)). \tag{6}$$

Wobec definicyi miary zewnętrznej, istnieją takie Γ_1 i Γ_2, iż

$$C_{\delta_0}(P_1) \subset \Gamma_1, \quad \overline{\Gamma}_1 < m_e(C_{\delta_0}(P_1)) + \varepsilon = \overline{\delta}_0 - m_i(P_1) + \varepsilon,$$

$$C_{\delta_0}(P_2) \subset \Gamma_2, \quad \overline{\Gamma}_2 < m_e(C_{\delta_0}(P_2)) + \varepsilon = \overline{\delta}_0 - m_i(P_2) + \varepsilon,$$

skąd (w myśl tw. 4 b):

$$\overline{N(\Gamma_1)} + \overline{N(\Gamma_2)} \leqslant \overline{\Gamma}_1 + \overline{\Gamma}_2 < 2\overline{\delta}_0 - m_i(P_1) - m_i(P_2) + 2\varepsilon. \tag{7}$$

Lecz oczywiście:

$$C_{\delta_0}(P_1 + P_2) = C_{\delta_0}(P_1) \,.\, C_{\delta_0}(P_2) \subset \Gamma_1\Gamma_2,$$

skąd

$$m_e C_{\delta_0}(P_1 + P_2) < \overline{\Gamma_1\Gamma_2}. \tag{8}$$

Mamy, w myśl tw. 10:

$$\overline{\Gamma_1\Gamma_2} = \overline{N(\Gamma_1)} + \overline{N(\Gamma_2)} - \overline{N(\Gamma_1 + \Gamma_2)}. \tag{9}$$

Niech p oznacza punkt wewnętrzny odcinka δ_0; jeżeli p należy do P_1, to nie może należeć do P_2 (gdyż P_1 i P_2 nie posiadają, jak zakładamy, elementów wspólnych), musi zatem należeć do $C_{\delta_0}(P)$, a więc leżeć wewnątrz Γ_2; jeżeli zaś p nie należy do P_1, to należy do $C_{\delta_0}(P_1)$ i wewnątrz Γ_1. W każdym więc razie każdy punkt wewnętrzny odcinka δ_0 leży wewnątrz jednego conajmniej ze zbiorów Γ_1 i Γ_2, czyli:

$$\delta_0 \subset N(\Gamma_1 + \Gamma_2),$$

skąd, w myśl tw. 3.

$$\bar{\delta}_0 \leqslant \overline{N(\Gamma_1 + \Gamma_2)}. \tag{10}$$

Wobec (8), (9), (7) i (10), mamy tedy:

$$m_e\, C_{\delta_0}(P_1 + P_2) < \bar{\delta}_0 - m_i(P_1) - m_i(P_2) + 2\varepsilon,$$

skąd, w myśl (6):

$$m_i(P_1 + P_2) > m_i(P_1) + m_i(P_2) - 2\varepsilon,$$

a że nierówność ta pozostaje prawdziwą przy wszelkiem $\varepsilon > 0$, mamy więc:

$$m_i(P_1 + P_2) \geqslant m_i(P_1) + m_i(P_2),$$

co dowodzi prawdziwości twierdzenia VI dla dwóch składników. Przez indukcyę wnosimy dalej o prawdziwości tw. VI dla dowolnej skończonej liczby składników.

Okażemy wreszcie, że tw. VI pozostaje prawdziwem nawet wtedy, kiedy szereg $\sum\limits_n P_n$ jest nieskończony.

Załóżmy więc, że zbiory P_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ leżą wszystkie wewnątrz odcinka δ_0 i nie posiadają elementów wspólnych. Ponieważ, jak dowiedliśmy, twierdzenie VI jest prawdziwe dla skończonej liczby składników, więc mamy przy wszelkiem n:

$$m_i(P_1) + m_i(P_2) + \ldots + m_i(P_n) \leqslant m_i(P_1 + P_2 + \ldots + P_n). \tag{11}$$

Lecz, oczywiście:

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_n) \subset P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n;$$

w myśl tw. IV mamy więc:

$$m_i(P_1 + P_2 + \ldots + P_n) \leqslant m_i(P). \tag{12}$$

Nierówności (11) dają tedy przy wszelkiem n:

$$m_i(P_1) + m_i(P_2) + \ldots + m_i(P_n) \leqslant m_i(P),$$

co dowodzi, że szereg (o składnikach nieujemnych) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_i(P_n)$ jest zbieżny, oraz że

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_i(P_n) \leqslant m_i(P),$$

c. b. d. o. Twierdzenia VI dowiedliśmy zatem w zupełności.

Wniosek. Jeżeli zbiory P_n, nie posiadające punktów wspólnych, są wszystkie mierzalne i leżą wewnątrz skończonego odcinka δ_0, to zbiór $P = \sum\limits_n P_n$ też jest mierzalny i mamy:

$$m(P) = \sum_n m(P_n).$$

Dowód. W myśl tw. V, mamy:

$$m_e(P) \leqslant \sum_n m_e(P_n),$$

zaś, w myśl tw. VI:

$$m_i(P) \geqslant \sum_n m_i(P_n),$$

wreszcie, w myśl tw. I:

$$m_e(P) \geqslant m_i(P);$$

mamy więc

$$\sum_n m_e(P_n) \geqslant m_e(P) \geqslant m_i(P) \geqslant \sum_n m_i(P_n). \tag{14}$$

Lecz, wobec założenia, że zbiory P_n są wszystkie mierzalne, jest:

$$\sum_n m_e(P_n) = \sum_n m_i(P_n) = \sum_n m(P_n);$$

nierówności (14) dają więc:

$$m_e(P) = m_i(P) = \sum_n m(P_n),$$

co dowodzi, że zbiór $P = \sum\limits_n m(P_n)$ jest mierzalny i że:

$$m(P) = \sum_n m(P_n),$$

c. b. d. o.

Twierdzenie VII. Jeżeli $P = P_1 + P_2$, gdzie zbiory P_1 i P_2 nie posiadają elementów wspólnych i jeżeli zbiór P_1 jest mierzalny, to:

$$m_e(P) = m(P_1) + m_e(P_2)$$

oraz

$$m_i(P) = m(P_1) + m_i(P_2)$$

Dowód. Niech δ_0 oznacza odcinek, wewnątrz którego leży P. Mamy, jak łatwo widzieć:

$$C_{\delta_0}(P) = C_{\delta_0}(P) + P_1,$$

skąd, w myśl twierdzeń V i VI:

$$m_e(C_{\delta_0}(P_2)) \leqslant m_e(C_{\delta_0}(P)) + m_e(P_1),$$

$$m_i(C_{\delta_0}(P_2)) \geqslant m_i(C_{\delta_0}(P)) + m_i(P_1),$$

czyli:

$$\overline{\delta}_0 - m_i(P_2) \leqslant \overline{\delta}_0 - m_i(P) + m_e(P_1),$$

$$\overline{\delta}_0 - m_e(P_2) \geqslant \overline{\delta}_0 - m_e(P) + m_i(P_1).$$

Jest zatem:

$$\begin{aligned} m_i(P) &\leqslant m_e(P_1) + m_i(P_2), \\ m_e(P) &\geqslant m_i(P_1) + m_e(P_2). \end{aligned} \tag{15}$$

Z drugiej strony, w myśl tw. V i VI:

$$\begin{aligned} m_e(P) &\leqslant m_e(P_1) + m_e(P_2), \\ m_i(P) &\geqslant m_i(P_1) + m_i(P_2). \end{aligned} \tag{16}$$

Wobec $m_e(P_1) = m_i(P_1) = m(P_1)$ (gdyż, jak zakładamy, zbiór P_1 jest mierzalny), nierówności (15) i (16) dają w jednej chwili:

$$\begin{aligned} m_e(P) &= m(P_1) + m_e(P_2), \\ m_i(P) &= m(P_1) + m_i(P_2). \end{aligned} \tag{17}$$

Wniosek. Jeżeli zbiory P i $P_1 \subset P$ są mierzalne, to zbiór $P_2 = P - P_1$ (utworzony ze wszystkich tych elementów zbioru P, które nie należą do P_1) jest również mierzalny oraz

$$m(P_2) = m(P) - m(P_1).$$

Dowód. Mamy oczywiście $P = P_1 + P_2$, przyczem zbiory P_1 i P_2 nie posiadają elementów wspólnych, a zbiór P_1 jest, w myśl założenia, mierzalny. Zachodzi więc twierdzenie VII, czyli zachodzą wzory (17). Wobec $m_e(P) = m_i(P) = m(P)$ (gdyż zbiór P jest, jak zakładamy, mierzalny) wzory te dają:

$$m_e(P_2) = m_e(P) - m(P_1) = m(P) - m(P_1),$$

$$m_i(P_2) = m_i(P) - m(P_1) = m(P) - m(P_1),$$

co dowodzi, że zbiór P_2 jest mierzalny, oraz że

$$m(P_2) = m(P) - m(P_1),$$

c. b. d. o.

Udowodnimy obecnie, że miara wewnętrzna zbioru nie zależy od poszczególnego obioru odcinka δ_0, wewnątrz którego zbiór ten leży.

Załóżmy więc, że $P \subset \delta_0$ oraz $P \subset \delta_1$ i oznaczmy przez $m_i(P)_{\delta_0}$ oraz $m_i(P)_{\delta_1}$ liczb

$$m_i(P)_{\delta_0} = \overline{\delta}_0 - m_e(C_{\delta_0}(P)),$$

$$m_i(P)_{\delta_1} = \overline{\delta}_1 - m_e(C_{\delta_1}(P)).$$

Chcemy więc dowieść, że

$$m_i(P)_{\delta_0} = m_i(P)_{\delta_1}. \tag{18}$$

Obierzmy odcinek δ taki, iżby było $\delta_0 \subset \delta$ oraz $\delta_1 \subset \delta$. Jeżeli udowodnimy, że $m_i(P)_{\delta_0} = m_i(P)_{\delta}$, to, wobec symetryi warunków co do δ_0 i δ_1, będzie stąd też wynikało, że $m_i(P)_{\delta_1} = m_i(P)_{\delta}$, skąd w jednej chwili wynika równość (18).

Oznaczmy odpowiednio przez S_0 i S zbiory punktów wewnętrznych dla δ_0 i δ; będzie, jak łatwo widzieć:

$$\overline{\delta}_0 = m_e(S_0) \quad \text{oraz} \quad \overline{\delta} = m_e(S). \tag{19}$$

Mamy oczywiście $S_0 \subset S$; możemy więc położyć

$$S = S_0 + T. \tag{20}$$

Zbiory S i S_0 są, jak łatwo widzieć, mierzalne (np. w odniesieniu do odcinka δ_0); takim też jest więc i zbiór T, w myśl wniosku z tw. VII-go. Mamy tedy, w myśl wniosku z tw. VI-go:

$$m_e(S) = m_e(S_0) + m_e(T),$$

zatem, wobec (19):

$$\overline{\delta} = \overline{\delta}_0 + m_e(T). \tag{21}$$

Oznaczmy

$$C_{\delta_0}(P) = Q; \tag{22}$$

będzie więc:

$$S_0 = P + Q$$

oraz, w myśl (20):

$$S = P + Q + T,$$

zatem:

$$C_{\delta}(P) = Q + T.$$

Wobec mierzalności zbioru T i na podstawie tw. VII-go, mamy więc:

$$m_e(C_{\delta}(P)) = m_e(Q + T) = m_e(Q) + m_e(T). \tag{23}$$

Lecz, w myśl (22), jest:

$$m_i(P)_{\delta_0} = \overline{\delta}_0 - m_e(C_{\delta_0}(P)) = \overline{\delta}_0 - m_e(Q),$$

zaś, w myśl (23):

$$m_i(P)_\delta = \overline{\delta} - m_e(C_\delta(P)) = \overline{\delta} - m_e(Q) - m_e(T),$$

skąd, wobec (21), znajdujemy:

$$m_i(P)_{\delta_0} = m_i(P)_\delta,$$

c. b. d. o. Dowiedliśmy więc, że miara wewnętrzna zbioru nie zależy od odcinka, wewnątrz którego zbiór leży.

Twierdzenie VIII. Jeżeli zbiory P_1 i P_2 (mogące posiadać punkty wspólne) są mierzalne, to zbiór $P = P_1 + P_2$ jest również mierzalny.

Dowód. Zbiory P_1 i P_2, jako mierzalne, leżą wewnątrz skończonych odcinków. Niech δ_0 oznacza odcinek, wewnątrz którego leży zarówno P_1, jak i P_2. Niech ε oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. W myśl tw. II istnieją takie Δ_1, Γ_1 oraz takie Δ_2, Γ_2, iż:

$$\begin{aligned} &P_1 \subset \Delta_1, \quad C_{\delta_0}(P_1) \subset \Gamma, \quad \overline{\Delta_1 \Gamma_1} < \frac{\varepsilon}{2}, \\ &P_2 \subset \Delta_2, \quad C_{\delta_0}(P_2) \subset \Gamma, \quad \overline{\Delta_2 \Gamma_2} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Mamy, jak łatwo widzieć:

$$P = P_1 + P_2 \cdot C_{\delta_0}(P_1)$$

(gdyż, z jednej strony, każdy punkt należący do P_1 lub do $P_2 \cdot C_{\delta_0}(P_1)$, a więc do P_2, należy do P, z drugiej zaś, każdy punkt zbioru P, nie należący do P_1, należy jednocześnie do P_2 oraz $C_{\delta_0}(P_1)$). Stąd, wobec (24):

$$P \subset \Delta_1 + \Delta_2 \Gamma_1 = \Delta, \tag{25}$$

Z drugiej strony, jest oczywiście:

$$C_{\delta_0}(P) = C_{\delta_0}(P_1) \cdot C_{\delta_0}(P_2),$$

zatem, w myśl (24):

$$C_{\delta_0}(P) \subset \Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma. \tag{26}$$

Wobec (25) i (26) mamy więc:

$$P \subset \Delta, \quad C_{\delta_0}(P) \subset \Gamma,$$

oraz, w myśl tw. 8 i 9:

$$\overline{\Delta\Gamma} = \overline{(\Delta_1 + \Delta_2\Gamma_1)\Gamma_1\Gamma_2} \leqslant \overline{\Delta_1\Gamma_1\Gamma_2} + \overline{\Delta_2\Gamma_1\Gamma_2} \leqslant \overline{\Delta_1\Gamma_1} + \overline{\Delta_2\Gamma_2},$$

skąd, według (24):

$$\overline{\Delta\Gamma} < \varepsilon.$$

W myśl wniosku z tw. III-go zbiór P jest więc mierzalny, c. b. d. o.

Oznaczmy według Lebesgue'a przez $P - P'$ zbiór tych wszystkich

punktów zbioru P, które nie należą do P' (nawet gdyby zbiór P' nie był częścią zbioru P)[1].

Z twierdzenia VIII otrzymujemy następujący

Wniosek. Jeżeli zbiory P i P' są mierzalne, to i zbiór $P - P'$ jest mierzalny.

Dowód. Połóżmy $P + P' = P_1$; będzie oczywiście:

$$P - P' = P_1 - P',$$

przyczem $P' \subset P_1$. W myśl tw. VIII, zbiór P_1 jest mierzalny; zbiór P' również jest mierzalny; wniosek z twierdzenia VII-go dowodzi więc, że i zbiór $P_1 - P' = P - P'$ jest mierzalny, c. b. d. o.

Twierdzenie IX. Jeżeli zbiory P_n (mogące posiadać elementy wspólne) leżą wszystkie wewnątrz skończonego odcinka δ_0 i są mierzalne, to zbiór $P = \sum_n P_n$ też jest mierzalny.

Dowód. Mamy oczywiście

$$P = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_1 - P_2) + \ldots$$

Zbiory

$$P_1, \quad P_2 - P_1, \quad P_3 - P_1 - P_2$$

nie posiadają oczywiście elementów wspólnych i są wszystkie, w myśl wniosku z tw. VIII, mierzalne. W myśl wniosku z tw. VI, jest więc mierzalny i zbiór P, c. b. d. o.

Wniosek. Jeżeli zbiory P_n są wszystkie mierzalne, to zbiór $P = P_1 P_2 P_3 \ldots$, utworzony ze wszystkich punktów wspólnych wszystkim zbiorom P_n, też jest mierzalny.

Dowód. Załóżmy, że wszystkie zbiory P_n leżą wewnątrz odcinka δ_0. (Twierdzenie pozostaje jednak prawdziwem i bez tego założenia, byleby każdy ze zbiorów P_n był mierzalny — jak to czytelnik sam zechce bliżej zbadać). Mamy, jak łatwo widzieć:

$$C_{\delta_0}(P) = \sum_n C_{\delta_0}(P_n).$$

[1]) Zauważymy, że nie zawsze $(P_1 + P_2) - P_3 = P_1 + (P_2 - P_3)$. Np. jeżeli zbiór P_1 składa się z punktów a i b, zbiór P_2 — z punktów a i c, wreszcie zbiór P_3 — z jednego tylko punktu a (przyczem punkty a, b, c są różne), to zbiór $P_1 + P_2$ będzie się składał z punktów a, b i c, zbiór więc $(P_1 + P_2) - P_3$ z punktów b i c, zaś zbiór $P_2 - P_3$ z jednego punktu c, zatem zbiór $P_1 + (P_2 - P_3)$, z punktów a, b i c.

Natomiast, jak łatwo widzieć, mamy zawsze $(P_1 - P_2) - P_3 = P_1 - (P_2 + P_3)$.

Każdy ze zbiorów $C_{\delta_0}(P^n)$ jest, wobec mierzalności zbiorów P_n, zbiorem mierzalnym. W myśl tw. IX-go, jest więc $C_{\delta^0}(P)$, a więc i P zbiorem mierzalnym, c. b. d. o.

Twierdzenie X. Jeżeli miara wewnętrzna zbioru P, leżącego wewnątrz odcinka δ_0, jest dodatnia, to dla każdej liczby dodatniej ε istnieje taki odcinek δ, iż część mnogości P, leżąca wewnątrz δ, ma miarę wewnętrzną $>(1-\varepsilon)\overline{\delta}$.

Dowód. Połóżmy $Q = C_{\delta_0}(P)$. Wobec założenia

$$m_i(P) > 0,$$

mamy

$$m_e(Q) = \overline{\delta}_0 - m_i(P) < \overline{\delta}_0;$$

możemy więc wyznaczyć taki zbiór normalny Γ, iżby było $Q \subset \Gamma \subset \delta_0$, oraz

$$\overline{\Gamma} < \overline{\delta}_0. \qquad (*)$$

Połóżmy

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots$$

Gdyby szereg ten był skończony, to—jak łatwo widzieć—istniałby odcinek δ, którego wszystkie punkty należą do P i twierdzenie nasze byłoby prawdziwe. Załóżmy więc, że szereg Γ jest nieskończony.

Połóżmy, przy danem $\varepsilon > 0$:

$$\eta = \varepsilon(\overline{\delta}_0 - \overline{\Gamma});$$

wobec związku (*) będzie to liczba dodatnia. Ponieważ

$$\overline{\Gamma} = \overline{\gamma}_1 + \overline{\gamma}_2 + \overline{\gamma}_3 + \ldots,$$

więc można dobrać takie n, iżby było

$$\overline{\Gamma} - \overline{\Gamma}_n < \eta, \qquad (**)$$

gdzie $\Gamma_n = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$. Wszystkie odcinki zbioru Γ_n będą oczywiście leżały na odcinku δ_0 oraz będzie

$$\overline{\Gamma}_n < \overline{\Gamma} < \overline{\delta}_0.$$

Usuńmy z odcinka δ_0 odcinki

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_n;$$

z odcinka δ_0 pozostanie przez to skończona liczba odcinków

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_m,$$

które nie będą zachodziły na siebie (ani nawet stykały się), przyczem będzie oczywiście

$$\overline{\delta}_0 = \overline{\gamma}_1 + \overline{\gamma}_2 + \ldots + \overline{\gamma}_n + \overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2 + \ldots + \overline{\mu}_m,$$

zatem:

$$\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2 + \ldots + \overline{\mu}_m = \overline{\delta}_0 - \overline{\Gamma}_n > \overline{\delta}_0 - \overline{\Gamma}. \qquad (***)$$

Połóżmy

$$\Gamma = \Gamma_n + H_n$$

oraz

$$H_n \mu_i = \Lambda_i \qquad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots m.$$

Zbiory Λ_i będą normalne (gdyż zbiór H_n jest normalny), przytem zbiory Λ_i i Λ_j, dla $i \neq j$, nie posiadają wspólnych punktów wewnętrznych (gdyż nie posiadają ich odcinki μ_i i μ_j). Zbiór

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_m$$

jest więc zbiorem normalnym.

Mamy oczywiście:

$$\Lambda \subset H_n,$$

zatem (z uwagi, że zbiór Λ jest normalny), w myśl tw. 4:

$$\overline{\Lambda} \leqslant \overline{H}_n = \overline{\Gamma} - \overline{\Gamma}_n,$$

czyli, w myśl związku (**):

$$\overline{\Lambda} < \eta. \qquad (****)$$

Załóżmy, że przy wszelkiem $i = 1, 2, \ldots m$ jest:

$$\overline{\Lambda}_i \geqslant \varepsilon \overline{\mu}_i;$$

byłoby, w myśl związku (****) oraz związku (***):

$$\eta > \overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}_1 + \overline{\Lambda}_2 + \ldots + \overline{\Lambda}_m \geqslant \varepsilon(\overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2 + \ldots + \overline{\mu}_m) > \varepsilon(\overline{\delta}_0 - \overline{\Gamma}),$$

wbrew definicyi liczby η.

Jest więc dla jednego przynajmniej z przedziałów μ_i, np. dla przedziału μ_k:

$$\overline{\Lambda}_k < \varepsilon \overline{\mu}_k. \qquad (\dagger)$$

Ze sposobu otrzymania odcinków μ wynika, że każdy punkt zbioru Q, leżący wewnątrz μ_k, leży wewnątrz H_n, zatem też wewnątrz $H_n \mu_k = \Lambda_k$; miara zewnętrzna części zbioru Q, leżącej wewnątrz μ_k, jest więc $\leqslant \overline{\Lambda}_k$, czyli, w myśl związku ($\dagger$), $< \varepsilon \overline{\mu}_k$. Zatem miara wewnętrzna części zbioru P, leżącej wewnątrz μ_k, jest $> \overline{\mu}_k - \varepsilon \overline{\mu}_k$, czyli $> (1-\varepsilon)\overline{\mu}_k$, co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Wniosek. Przedziału nie można rozbić na dwie mnogości mierzalne, mające równą miarę w każdym dowolnym odcinku.

Dowód. Załóżmy, że zbiór wszystkich punktów odcinka δ_0 można rozbić na dwie mnogości

$$P+Q$$

(nie posiadające punktów wspólnych), mające równą miarę w każdym odcinku. Miary ich w odcinku δ_0 będą oczywiście dodatnie $\left(\text{jak łatwo widzieć, każda} = \frac{\overline{\delta}_0}{2}\right)$. W myśl dowiedzionego twierdzenia, kładąc w niem $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (i z uwagi, że część zbioru mierzalnego, zawarta w dowolnym przedziale, jest zbiorem mierzalnym), będziemy jako miarę zbioru P w pewnym (stosownie do ε dobranym) odcinku δ mieli liczbę

$$m > (1-\varepsilon)\,\overline{\delta}, \qquad \text{czyli} \qquad m > \frac{\overline{\delta}}{2}.$$

Lecz, w myśl założenia, m jest też miarą zbioru Q w odcinku δ. Ponieważ zaś części zbiorów P i Q, leżące w odcinku δ, dają w sumie cały odcinek δ, więc musi być

$$2m = \overline{\delta},$$

wbrew otrzymanej wyżej nierówności na m. Stąd sprzeczność. Wniosek nasz został więc dowiedziony.

III. Kilka twierdzeń o funkcyach mierzalnych.

Niech $f(x)$ oznacza daną funkcyę zmiennej rzeczywistej x, określoną w pewnym przedziale δ_0. Oznaczamy według Lebesgue'a symbolem

$$\mathrm{E}(f > A)$$

zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x przedziału δ_0, dla których zachodzi nierówność:

$$f(x) > A.$$

Podobnież określamy symbole

$$\mathrm{E}(f < B), \quad \mathrm{E}(A < f < B), \quad \mathrm{E}(f = A), \quad \mathrm{E}(f \geqslant A) \quad \text{i t. p.}$$

Funkcyę $f(x)$ nazywamy mierzalną (w przedziale δ_0), jeżeli, przy wszelkiem A, zbiór

$$\mathrm{E}(f > A)$$

jest mierzalny.

Mamy oczywiście

$$\mathrm{E}(f \leqslant A) = \overline{\delta}_0 - \mathrm{E}(f > A),$$

jeżeli więc funkcya $f(x)$ jest w przedziale δ_0 mierzalna, to przy wszelkiem A zbiór

$$\mathrm{E}(f \leqslant A)$$

jest mierzalny.

Na podstawie oczywistego wzoru

$$\mathrm{E}(f < A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(f \leqslant A - \frac{1}{n}\right)$$

oraz twierdzenia o szeregu zbiorów mierzalnych, wnosimy, że dla funkcyi mierzalnej $f(x)$ zbiór

$$\mathrm{E}(f < A)$$

jest, przy wszelkiem A, mierzalny. Wobec wzorów:

$$\mathrm{E}(f = A) = \mathrm{E}(f \leqslant A) - \mathrm{E}(f < A),$$

$$\mathrm{E}(A \leqslant f \leqslant B) = \mathrm{E}(f \leqslant B) - \mathrm{E}(f < A),$$

$$\mathrm{E}(A < f < B) = \mathrm{E}(f < B) - \mathrm{E}(f \leqslant A),$$

wnosimy o mierzalności zbiorów

$$\mathrm{E}(f = A), \quad \mathrm{E}(A \leqslant f \leqslant B), \quad \mathrm{E}(A < f < B),$$

przy wszelkich A i $B > A$.

Udowodnimy obecnie, że suma dwóch funkcyj mierzalnych jest funkcyą mierzalną. Chcemy więc dowieść, że jeżeli funkcye $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są mierzalne, to zbiór

$$\mathrm{E}(f_1 + f_2) > A)$$

jest mierzalny przy wszelkiem A.

Załóżmy, że przy pewnem x i danem A mamy:

$$f_1(x) + f_2(x) > A; \tag{1}$$

powiadamy, że przy pewnem wymiernem w będzie:

$$f_1(x) \geqslant w \quad \text{oraz} \quad f_2(x) \geqslant A - w.$$

W samej rzeczy, gdyby takie wymierne w nie istniało, to przy wszelkiem wymiernem w nierówność

$$w \leqslant f_1(x)$$

pociągałaby za sobą nierówność

$$f_2(x) < A - w.$$

Obierzmy, w szczególności, ciąg nieskończony liczb wymiernych $u_n \leqslant f_1(x)$, zmierzający do $f_1(x)$. Będzie więc przy wszelkiem n.

$$u_n \leqslant f_1(x),$$

zatem:

$$f_2(x) < A - u_n,$$

skąd, w granicy dla $n = \infty$, z uwagi, że $\lim_{n=\infty} u_n = f_1(x)$:

$$f_2(x) \leqslant A - f_1(x),$$

wbrew nierówności (1).

Oznaczmy przez w_n ciąg nieskończony, utworzony ze wszystkich liczb wymiernych. Z tego, czegośmy przed chwilą dowiedli, wynika, że jeżeli (przy pewnem x i pewnem A)

$$f_1(x) + f_2(x) > A, \tag{1}$$

to mamy przy pewnem n jednocześnie:

$$f_1(x) \geqslant w_n \quad \text{oraz} \quad f_2(x) \geqslant A - w_n, \tag{2}$$

a jasnem jest też, że naodwrót, nierówności (2) pociągają za sobą nierówność (1). Stąd łatwy wniosek, że

$$\mathrm{E}(f_1 + f_2 > A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}(f_1 \geqslant w_n) \,.\, \mathrm{E}(f_2 \geqslant A - w_n)$$

(gdzie $\mathrm{E}(f_1 \geqslant w_n) \,.\, \mathrm{E}(f_2 \geqslant A - w_n)$ oznacza zbiór wszystkich punktów wspólnych zbiorom $\mathrm{E}(f_1 \geqslant w_n)$, $\mathrm{E}(f_2 \geqslant A - w_n)$). Na mocy twierdzeń o iloczynie i szeregu zbiorów mierzalnych wnosimy stąd, że zbiór

$$\mathrm{E}(f_1 + f_2 > A)$$

jest mierzalny.

Dowiedzione twierdzenie o sumie dwóch funkcyj mierzalnych uogólniamy natychmiast przez indukcyę na dowolną skończoną liczbę składników. Udowodnimy, że zachodzi ono i dla nieskończonego szeregu funkcyj mierzalnych.

Niech więc

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots$$

oznacza szereg zbieżny funkcyj mierzalnych. Połóżmy

$$F_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x).$$

Oznaczmy dalej, przy danem rzeczywistem A oraz naturalnych n i k:

$$\mathrm{E}_{n,k} = \mathrm{E}\left(F_{n+1} > A + \frac{1}{k}\right) \,.\, \mathrm{E}\left(F_{n+2} > A + \frac{1}{k}\right) \,.\, \mathrm{E}\left(F_{n+3} > A + \frac{1}{k}\right) \dots$$

Powiadam, że

$$\mathrm{E}(F > A) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_{n,k}. \tag{3}$$

W samej rzeczy, jeżeli przy pewnych n oraz k mamy

$$x \subset \mathrm{E}_{n,k},$$

to, na mocy definicyi zbioru $\mathrm{E}_{n,k}$, będzie:

$$F_{n+p}(x) > A + \frac{1}{k}, \quad \text{dla} \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

a zatem, w granicy dla $p = \infty$:

$$F(x) = \lim_{p=\infty} F_{n+p}(x) \geqslant A + \frac{1}{k} > A,$$

skąd

$$F(x) > A,$$

co dowodzi, że

$$x \subset \mathrm{E}(F > A).$$

Z drugiej strony, jeżeli przy pewnem x i pewnem A jest

$$F(x) > A,$$

to, obierając liczbę naturalną $k > \dfrac{2}{F(x) - A}$, będziemy, wobec

$$\lim_{n=\infty} F_n(x) = F(x),$$

mieli dla dostatecznie wielkiego n:

$$F_{n+p}(x) > F(x) - \frac{1}{k} > A + \frac{1}{k},$$

dla $p = 1, 2, 3, \dots,$ co dowodzi, że

$$x \subset \mathrm{E}\left(F_{n+p} > A + \frac{1}{k}\right) \quad \text{dla} \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

czyli, że

$$x \subset \mathrm{E}_{n,k}.$$

Dowiedliśmy więc wzoru (3). Na mocy dowiedzionego twierdzenia o skończonym szeregu funkcyj mierzalnych, każda z funkcyj $F_n(x)$ jest mierzalna, mierzalnym jest więc przy naturalnych n, k i p każdy ze zbiorów

$$\mathrm{E}\left(F_{n+p} > A + \frac{1}{k}\right),$$

zatem i każdy ze zbiorów $\mathrm{E}_{n,k}$, stąd zaś wnosimy o mierzalności zbioru $\mathrm{E}(F > A)$. Funkcya $F(x)$ jest więc mierzalna, c. b. d. o.[1]

Dowiedliśmy tedy, że suma szeregu nieskończonego (zbieżnego) funkcyj mierzalnych jest funkcyą mierzalną.

Na podstawie oczywistej tożsamości

$$\mathrm{E}(-f > A) = \mathrm{E}(f < -A)$$

wnosimy, że jeżeli funkcya $f(x)$ jest mierzalna, to jest mierzalną też funkcya $-f(x)$. Wynika stąd natychmiast (wobec twierdzenia o sumie dwóch funkcyj mierzalnych), że różnica dwóch funkcyj mierzalnych jest funkcyą mierzalną.

Udowodnimy teraz, że funkcya ciągła jest zawsze mierzalna.

Jeżeli $f(x)$ jest funkcyą ciągłą, to—jak łatwo widzieć—zbiór

$$\mathrm{E}(f \geqslant A)$$

jest przy wszelkiem danem A zbiorem zamkniętym[2]. Lecz każdy (ograniczony) zbiór zamknięty jest mierzalny (gdyż jego zbiór dopełniający składa się z przeliczalnej conajwyżej liczby zbiorów mierzalnych: punktów wewnętrznych pewnych odcinków), zbiór $\mathrm{E}(f \geqslant A)$ jest więc mierzalny przy wszelkiem A. Mierzalne więc będą i zbiory

$$\mathrm{E}\left(f \geqslant A + \frac{1}{n}\right)$$

[1]) Zauważymy, że u Lebesgue'a (Leçons sur l'intégration, p. 111) dowód odnośnego twierdzenia nie jest poprawny. Lebesgue opiera swój dowód na tożsamości

$$\mathrm{E}(F > A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}_n,$$

gdzie

$$\mathrm{E}_n = \mathrm{E}(F_n > A) \,.\, \mathrm{E}(F_{n+1} > A) \,.\, \mathrm{E}(F_{n+2} > A) \ldots$$

Tożsamość ta może jednak nie być prawdziwa: np. jeżeli $F_k(x) = A + \frac{x^2}{k}$, to dla $x > 0$ mamy stale $x \subset \mathrm{E}_n$, ale $F(x) = A$, więc już nie jest $x \subset \mathrm{E}(F > A)$.

[2]) Własność tę posiadają też funkcye nawpół-ciągłe zgóry (jest ona dla nich charakterystyczna), tak iż dowód nasz stosuje się i do nich; każda więc funkcya nawpół ciągła zgóry jest mierzalna.

przy wszelkiem naturalnem n. Stąd, wobec oczywistej tożsamości

$$\mathrm{E}(f > A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(f \geqslant A + \frac{1}{n}\right),$$

wnosimy natychmiast o mierzalności zbioru

$$\mathrm{E}(f > A)$$

przy wszelkiem A. Funkcya $f(x)$ jest więc mierzalna, c. b. d. o.

Zauważymy, że twierdzenia o mierzalności funkcyj ciągłych dowodzi Lebesgue przy pomocy twierdzenia Weierstrassa (o rozwijalności funkcyi ciągłej na szereg wielomianów).

Twierdzenie.[1]) Jeżeli $f_n(x)$ jest w pewnym skończonym przedziale ciągiem zbieżnym funkcyj mierzalnych, to do każdego dodatniego ε można dobrać zbiór miary $< \varepsilon$, po usunięciu którego z uważanego przedziału, funkcya będzie w pozostałym zbiorze ciągła jednostajnie.

Niech X oznacza zbiór wszystkich liczb uważanego przedziału. Oznaczmy, przy danem naturalnem p i danem x, należącem do zbioru X, przez $k(p, x)$ najmniejszą liczbę naturalną k taką, iż

$$| f_n(x) - f(x) | \leqslant \frac{1}{p}, \quad \text{dla} \quad n \geqslant k,$$

gdzie $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$.

(Z założenia, że ciąg $f_n(x)$ zmierza przy wszelkiem x w zbiorze X do granicy $f(x)$, wynika, że taka liczba k istnieje).

Oznaczmy, dalej, przez $X_{k,p}$ zbiór tych wszystkich liczb x zbioru X, dla których (przy danem naturalnem k):

$$k(p, x) = k.$$

Powiadam, że zbiory $X_{k,p}$ są wszystkie mierzalne. W samej rzeczy, zbiór $X_{k,p}$ jest zbiorem tych wszystkich punktów x uważanego przedziału, dla których

$$| f_{k-1}(x) - f(x) | > \frac{1}{p}, \quad \text{(warunek ten odpada dla } k = 1\text{)},$$

[1]) Twierdzenie to po raz pierwszy wypowiedział i udowodnił D.-Th. Egoroff, „Sur les suites de fonctions mesurables" Comptes Rendus T. **152** (1911) p. 244–246. Dowód, który podaję, różni się od dowodu Egoroffa.

oraz jednocześnie

$$|f_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{p},$$

$$|f_{k+1}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{p}.$$

. . . .

. . . .

Jest to więc zbiór wszystkich punktów wspólnych pewnemu ciągowi nieskończonemu zbiorów, z których każdy jest mierzalny (gdyż, jak dowiedliśmy, suma nieskończonego szeregu funkcyj mierzalnych, a więc i granica ciągu takich funkcyj, jest funkcyą mierzalną, a różnica dwóch funkcyj mierzalnych jest znowu funkcyą mierzalną. Jeżeli zaś $\varphi(x)$ jest funkcyą mierzalną, to zbiór $E\left(|\varphi(x)| > \frac{1}{p}\right)$ jako też zbiór $E\left(|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{p}\right)$ jest oczywiście mierzalny przy wszelkiem nuturalnem p).

Mamy, przy wszelkiem naturalnem p, oczywistą tożsamość:

$$\overline{X} = \overline{X}_{1,p} + \overline{X}_{2,p} + \overline{X}_{3,p} + \dots, \tag{4}$$

przyczem składniki prawej strony nie posiadają elementów wspólnych.

Wobec mierzalności zbiorów $X_{k,p}$, mamy stąd równość:

$$m(X) = m(X_{1,p}) + m(X_{2,p}) + m(X_{3,p}) + \dots;$$

szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(\overline{X}_{k,p})$$

jest więc zbieżny.

Niech ε oznacza daną liczbę dodatnią. Możemy więc wyznaczyć dla danego p liczbę k_p tak, iżby było:

$$\sum_{k=k_p}^{\infty} m(\overline{X}_{k,p}) < \frac{\varepsilon}{2^p},$$

zatem

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=k_p}^{\infty} m(\overline{X}_{k,p}) < \varepsilon. \tag{5}$$

Połóżmy

$$S = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=k_p}^{\infty} \overline{X}_{k,p}; \tag{6}$$

będzie więc (w myśl twierdzenia o mierze sumy przeliczalnej mnogości zbiorów mierzalnych):

$$m(S) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=k_p}^{\infty} m(\overline{X}_{k,p}),$$

zatem, w myśl (5):

$$m(S) < \varepsilon.$$

Powiadam, że w zbiorze $\overline{X} - S$ ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie. W samej rzeczy, niech σ oznacza dowolną daną liczbę dodatnią. Obierzmy p tak wielkie, aby było

$$\frac{1}{p} < \sigma.$$

Niech x oznacza dowolny punkt zbioru $\overline{X} - S$. Skoro x nie należy do S, to, wobec (6), x nie należy tembardziej do żadnego ze zbiorów

$$X_{k_p,p}, \quad X_{k_p+1,p}, \quad X_{k_p+2,p}, \dots,$$

zatem, według (4), x musi należeć do zbioru

$$\overline{X}_{1,p} + \overline{X}_{2,p} + \dots + \overline{X}_{k_p-1,p},$$

co dowodzi, że

$$k(p, x) < k_p,$$

a więc, że

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{p} < \sigma, \quad \text{dla} \quad n \geqslant k_p.$$

Jest więc dla $n \geqslant k_p$, gdzie p, a więc też k_p, zależy jedynie od σ i od ε (ale nie zależy od x):

$$|f_n(x) - f(x)| < \sigma,$$

dla każdego punktu x zbioru $\overline{X} - S$. Dowiedliśmy więc, że ciąg $f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie w zbiorze $\overline{X} - S$.