R. MEHMKE.

O uogólnieniu twierdzenia Pascala, podanem przez Buschego, i o twierdzeniach wzajemnych z tem związanych.

Ueber Busche's Verallgemeinerung des Pascalschen Satzes und die dazu dualen Sätze.

W zeszycie 6-ym tomu V-go Sprawozdań Towarzystwa matematycznego w Hamburgu, wydanym dla uczczenia pamięci poległego na polu walki uczonego hamburskiego Edmunda Buschego, ogłosił P. Riebesell interesujące, znalezione przez Buschego uogólnienie twierdzenia Pascala i naszkicował dowód tego uogólnienia. Wysłowił on to twierdzenie w sposób następujący: Trójkąty w liczbie 60, których wierzchołki znajdują się w punktach przecięcia trzech par boków przeciwległych każdego z 60 prostych sześciokątów, utworzonych z sześciu dowolnych punktów płaszczyzny, posiadają w spółrzędnych jednorodnych wyznaczniki tej samej wartości. Te trójkąty p. Riebesell nazywa trójkątami Buschego, należącemi do danych sześciu punktów; dodaje przytem, że równość wyznaczników dla tych trójkątów nie znaczy, oczywiście, iż pola tych wszystkich trójkątów są równe.

Celem niniejszego artykułu jest głównie nadanie twierdzeniu Buschego postaci metrycznej, przy której występują właśnie zawartości owych pól. Dochodzimy do tego odrazu, przedstawiając twierdzenie Buschego przy pomocy Rachunku punktów. Podobnie rzecz się ma z twierdzeniem wzajemnem do twierdzenia Buschego, odpowiadającem mu na mocy dwoistości na płaszczyźnie. To twierdzenie wzajemne może być przeto uważane za uogólnienie twierdzenia Brianchona, podobnież jak i odpowiednie twierdzenia Geometryi wiązki lub Geometryi kulistej. Do dowodów i uogólnień twierdzenia Buschego zamierzam powrócić w artykule późniejszym.

1. Forma metryczna twierdzenia Buschego.

Oznaczmy przez a, b, c, d, e, f sześć danych punktów, wziętych w porządku dowolnym. Trzy pary boków przeciwległych prostego sześciokąta $abcdef$ można wtedy przedstawić za pomocą iloczynów zewnętrznych

$$[ab] \text{ i } [de], \quad [bc] \text{ i } [ef], \quad [cd] \text{ i } [fa]$$ [1];

dalej, ich punkty przecięcia g, h i i, a więc wierzchołki trójkąta Buschego, należące do tego prostego sześciokąta, wyrażają się przez trzy iloczyny zewnętrzne

$$g = [ab \, . \, de], \quad h = [bc \, . \, ef], \quad i = [cd \, . \, fa]. \tag{1}$$

Twierdzenie Buschego orzeka tedy, że te trzy punkty dają iloczyn zewnętrzny

$$[ghi] = [ab \, . \, de \, . \, . \, bc \, . \, ef \, . \, . \, cd \, . \, fa], \tag{2}$$

którego wartość pozostaje bez zmiany, gdy zmieniamy w jakikolwiek sposób porządek sześciu punktów danych. Według teoryi Rachunku punktów iloczyn zewnętrzny $[ghi]$ trzech punktów g, h, i, gdy zakładamy, że są położone w skończoności, równa się iloczynowi ich wartości liczbowych przez podwójne pole trójkąta ghi, które oznaczmy przez $\overline{ghi}$:

$$[ghi] = \text{mod}\, g \, . \, \text{mod}\, h \, . \, \text{mod}\, i \, . \, \overline{ghi}. \tag{3}$$

Z drugiej strony: wartość liczbowa iloczynu dwóch prostych (nierównoległych) w płaszczyźnie jest równa iloczynowi ich wartości liczbowych przez wstawę kąta pomiędzy niemi zawartego [2]; jeżeli więc oznaczymy przez φ, ψ, χ kąty pomiędzy parami boków przeciwległych powyższego sześciokąta prostego, będzie:

$$\text{mod}\, g = \text{mod}\,[ab] \, . \, \text{mod}\,[de] \, . \, \sin\varphi,$$

$$\text{mod}\, h = \text{mod}\,[bc] \, . \, \text{mod}\,[ef] \, . \, \sin\psi,$$

$$\text{mod}\, i = \text{mod}\,[cd] \, . \, \text{mod}\,[fa] \, . \, \sin\chi.$$

Jeżeli wszystkie punkty dane leżą w skończoności i gdy każdemu z nich nadamy wartość liczbową 1, to rozumiejąc przez $\overline{ab}$, $\overline{de}$ i t. d. długości odcinków, będziemy mieli:

[1]) Porów. R. Mehmke, Vorlesungen über Punktrechnung, Teilband I („P. R. I.“), Lipsk 1913, zwłaszcza N⁰ 25 i 27.

[2]) P. R. I. s. 126 u góry.

$$\text{mod}\,[ab] = \overline{ab}, \qquad \text{mod}\,[de] = \overline{de} \quad \text{i t. d.} \tag{5}$$

Otrzymamy tedy nowe wyrażenie twierdzenia Buschego:

$$[ghi] = \overline{ab} \, . \, \overline{bc} \, . \, \overline{cd} \, . \, \overline{de} \, . \, \overline{ef} \, . \, \overline{fa} \, . \, \sin\varphi \, . \, \sin\psi \, . \, \sin\chi \, . \, \overline{ghi} = \text{const.}, \tag{6}$$

Słowami: Jeżeli sześć dowolnych punktów na płaszczyźnie wziętych w jakimkolwiek porządku, uważać będziemy za wierzchołki prostego sześciokąta, wtedy iloczyn liczb, wyrażających długości jego boków, przez iloczyn wstaw trzech kątów, pod któremi przecinają się trzy pary boków przeciwległych sześciokąta i przez pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty przecięcia tych trzech par prostych, jest niezależny od porządku, w jakim bierzemy punkty dane.

Forma metryczna twierdzenia Buschego utrzymuje się, jeżeli niektóre z punktów danych usuwają się w nieskończoność [1]. Jeżeli by np. punkt a w jakimkolwiek kierunku oddalił się w nieskończoność, wtedy, według zasad Rachunku punktów, możnaby go zastąpić przez wektor powyższego kierunku o długości równej 1 i byłoby wtedy $\text{mod}\,[ab] = 1$, $\text{mod}\,[fa] = 1$. Gdyby zaś jeden z wierzchołków trójkąta Buschego np. wierzchołek g i tylko ten znajdował się wierzchołek w nieskończoności, wtedy [1] zamiast $\sin\varphi$ należałoby wziąć odległość prostych równoległych $[ab]$ i $[de]$, zamiast zaś $[ghi]$ należałoby wziąć pole równoległoboku, którego jednym z boków jest $[hi]$, drugi zaś bok jest równoległy do $[ab]$ i ma długość 1. Gdyby dwa wierzchołki trójkąta Buschego znajdowały się w nieskończoności, np. wierzchołki g i h, wtedy $\overline{ghi}$ byłoby polem kwadratu ukośnego o długości boku równej 1 i o bokach równoległych od $[ab]$ i $[bc]$, a więc wstawą kąta tych dwóch prostych.

2. Forma metryczna twierdzenia wzajemnego do twierdzenia Buschego na płaszczyźnie.

Niechaj A, B, C, D, E i F będą bokami sześcioboku na płaszczyźnie, w tym porządku uważanemi. Proste, łączące trzy pary wierzchołków przeciwległych, oznaczmy przez G, H, J:

$$G = [AB \, . \, DE], \quad H = [BC \, . \, EF], \quad J = [CD \, . \, FA]. \tag{1}$$

Według twierdzenia wzajemnego do twierdzenia Buschego na płaszczyźnie iloczyn zewnętrzny tych trzech prostych

[1]) P. R. I., s. 359 N⁰ 9.

$$[GHJ] = [AB\,.\,DE\,.\,.\,BC\,.\,EF\,.\,.\,CD\,.\,FA] \tag{2}$$

musi posiadać wartość niezależną od porządku, w jakim bierzemy trzy dane proste. Iloczyn zewnętrzmy trzech (skończonych) prostych równa się iloczynowi ich wartości liczbowych przez „wstawę“ utworzonego przez nich trójboku [1]:

$$[GHJ] = \text{mod}\, G\,.\,\text{mod}\, H\,.\,\text{mod}\, J\,.\,\sin \overline{GHJ}. \tag{3}$$

Jeżeli przez $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ oznaczymy odległości trzech par wierzchołków przeciwległych powyższego sześcioboku, będzie:

$$\begin{aligned} \text{mod}\, G &= \text{mod}\,[AB]\,.\,\text{mod}\,[DE]\,.\,\mathfrak{p} \\ \text{mod}\, H &= \text{mod}\,[BC]\,.\,\text{mod}\,[EF]\,.\,\mathfrak{q} \\ \text{mod}\, J &= \text{mod}\,[CD]\,.\,\text{mod}\,[FA]\,.\,\mathfrak{r}. \end{aligned} \tag{4}$$

Jeżeli dalej przez $\overline{AB}$ oznaczymy kąt prostych A i B (którym nadajemy zwrot określony), a prostym danym nadamy wartość liczbową 1, będzie:

$$\text{mod}\,[AB] = \sin \overline{AB}, \qquad \text{mod}\,[DE] = \sin \overline{DF}, \quad \text{i t. d.} \tag{5}$$

Będzie tedy:

$$\begin{aligned} [GHJ] = \sin \overline{AB}\,.\,\sin \overline{BC}\,.\,\sin \overline{CD}\,.\,\sin \overline{DE}\,.\,\sin \overline{EF}\,.\,\sin \overline{FA} \\ .\,\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}\,.\,\sin GHJ = \text{const.}, \end{aligned} \tag{6}$$

Słowami: Jeżeli rozważamy sześć dowolnych prostych na płaszczyźnie w jakimkolwiek porządku jako boki prostego sześcioboku, wtedy iloczyn wstaw sześciu kątów sześcioboku, trzech iloczynów odległości jego trzech par wierzchołków przeciwległych i wstawy trójboku, utworzonego przez połączenie wierzchołków przeciwległych, jest niezależny od porządku, w jakim bierzemy te sześć prostych.

3. Twierdzenia odpowiednie dla wiązki i kuli.

Na zasadzie prawa dwoistości, które ogólnie stosuje się w Rachunku punktów, w szczególności zaś do iloczynów zewnętrznych i do wielkości metrycznych przez nie uwarunkowanych, można odrazu podać, jakie twierdzenia Geometryi wiązki i Geometryi kulistej odpowiadają wyprowadzonym wyżej pod 1) i 2) twierdzeniom metrycznym.

[1]) Przez wstawę trójboku na płaszczyźnie rozumieć należy wielkość wzajemną do podwojonego pola trójkąta. Równa się ona, między innemi, iloczynowi wstawy jakiegokolwiek kąta trójboku przez odpowiednią wysokość (t. j. wysokość przechodzącą przez wierzchołek trójkąta). Porów. P. R. I., S. 360 N° 11, gdzie podano i inne wyrażenia tej wielkości.

Jeżeli sześć prostych, wychodzących z jednego punktu przestrzeni, uważać będziemy w jakimkolwiek porządku za krawędzie prostej sześciokrawędzi, to iloczyn wstawy sześciu boków [1]) (t. j. kątów pomiędzy sąsiedniemi krawędziami) sześciokrawędzi, wstawy trzech kątów dwuściennych, którą tworzą trzy pary przeciwległych ścian i wstawy (v. Staudta) trójkrawędzi utworzonej przez linie przecięcia trzech par ścian przeciwległych, jest niezależny od porządku, w jakim bierzemy te sześć prostych.

Jeżeli uważać będziemy sześć dowolnych, przez jeden punkt przechodzących, płaszczyzn za płaszczyzny boczne sześciościanu prostego, wtedy iloczyn wstawy jego kątów dwuściennych przy sześciu krawędziach, wstaw trzech kątów, które tworzą trzy pary krawędzi przeciwległych i wstawy trójścianu [2]), utworzonego przez płaszczyzny łączące trzy pary krawędzi przeciwległych, jest niezależny od porządku, w jakim uważamy te sześć płaszczyzn.

Te dwa twierdzenia można łatwym sposobem przemienić na twierdzenia Geometryi kulistej, przecinając uważane sześć prostych lub sześć płaszczyzn kulą o promieniu 1, której środkiem jest punkt wspólny tych prostych lub płaszczyzn. Należy tylko przy tem zauważyć, że wstawa trójkrawędzi przechodzi na wielkość, którą można nazwać wstawą trójkąta kulistego, mianowicie na iloczyn jakiegokolwiek boku trójboku kulistego przez wstawę należącej do tego boku wysokości kulistej, oraz że z wstawy trójścianu powstaje wstawa trójboku kulistego, która jest wielkością wzajemną lub biegunową do wstawy trójkąta kulistego.

In Heft 6 von Band V der Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg, das zum Gedächtnis an den auf dem Felde der Ehre gefallenen Hamburger Gelehrten Edmund Busche ausgegeben worden ist, hat Herr P. Riebesell eine merkwürdige, von Busche gefundene Verallgemeinerung des Pascalschen Satzes bekannt gegeben und einen Beweis dafür ange-

[1]) Porów. P. R. I. N° 34, w szczególności S. 130—132.
[2]) P. R. I. S. 362, N° 13.

deutet. Fraglicher Satz wird dort etwa so eingekleidet: Die 60 Dreiecke, deren Ecken in den Schnittpunkten der drei Paar Gegenseiten eines jeden der 60 einfachen Sechsecke bestehen, die aus sechs beliebigen Punkten einer Ebene gebildet werden können, haben in homogenen Koordinaten Determinanten von demselben Wert. Diese Dreiecke nennt Herr Riebesell die zu den gegebenen sechs Punkten gehörigen Dreiecke von Busche. Er fügt hinzu, dass die Gleichheit der Determinanten für jene Dreiecke natürlich nicht bedeute, dass der Flächeninhalt bei allen derselbe sei. Der Zweck der nachstehenden Mitteilung ist vornehmlich, dem Satz von Busche eine metrische Gestalt zu geben, bei der gerade jene Flächeninhalte in Erscheinung treten. Man kommt hierauf sofort, wenn man den Satz von Busche mit Hilfe der Punktrechnung darstellt. Ebenso ist es mit dem Satze, der dem Satz von Busche vermöge der Dualität in der Ebene entspricht, der somit als eine Verallgemeinerung des Satzes von Brianchon angesehen werden kann, und mit den entsprechenden Sätzen in der Geometrie des Bündels oder in der sphärischen Geometrie. Auf Beweise und Verallgemeinerungen des Satzes von Busche denke ich in einer späteren Mitteilung zurückzukommen.

1. Metrische Form des Satzes von Busche.

In beliebiger Reihenfolge genommen seien die sechs gegebenen Punkte mit den Buchstaben a, b, c, d, e und f bezeichnet. Die drei Paar Gegenseiten des einfachen Sechsecks $abcdef$ sind alsdann durch die äufseren Produkte [1]

$$[ab] \text{ und } [de], \quad [bc] \text{ und } [ef], \quad [cd] \text{ und } [fa]$$

dargestellt, ferner ihre Schnittpunkte g, h und i, also die Ecken des zu jenem einfachen Sechseck gehörigen Dreiecks von Busche durch die drei äusseren Produkte

$$g=[ab.de], \quad h=[bc.ef], \quad i=[cd.fa]. \tag{1}$$

Der Satz von Busche besagt nun, dass diese drei Punkte ein äusseres Produkt liefern:

$$[ghi]=[ab.de..bc.ef..cd.fa], \tag{2}$$

dessen Wert unverändert bleibt, wenn man die Reihenfolge der sechs gegebenen Punkte irgendwie ändert. Nach den Lehren der Punktrechnung ist aber das äussere Produkt $[ghi]$ der drei Punkte g, h und i, diese als im Endlichen

[1] Vgl. wegen des Folgenden meine Vorlesungen über Punktrechnung, Teilband I („P. R. I."), Leipzig 1913, besonders N⁰ 25 und 27.

liegend vorausgesetzt, gleich dem Produkt aus ihren Zahlwerten und dem doppelten Inhalt des Dreiecks ghi, der mit $\overline{ghi}$ bezeichnet werden möge:

$$[ghi]=\operatorname{mod} g \,.\, \operatorname{mod} h \,.\, \operatorname{mod} i \,.\, \overline{ghi}. \tag{3}$$

Anderseits ist der Zahlwert des Produktes zweier (nicht parallelen) Geraden in der Ebene gleich dem Produkt aus ihren Zahlwerten und dem sin des von ihnen gebildeten Winkels [1], also, wenn man die Winkel der drei Paar Gegenseiten des obigen einfachen Sechsecks der Reihe nach mit φ, ψ, χ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} g &= \operatorname{mod}[ab] \,.\, \operatorname{mod}[de] \,.\, \sin\varphi, \\ \operatorname{mod} h &= \operatorname{mod}[bc] \,.\, \operatorname{mod}[ef] \,.\, \sin\psi, \\ \operatorname{mod} i &= \operatorname{mod}[cd] \,.\, \operatorname{mod}[fa] \,.\, \sin\psi. \end{aligned} \tag{4}$$

Wenn ferner die gegebenen Punkte alle im Endlichen liegen und man ihnen je den Zahlwert eins beilegt, so ist, unter $\overline{ab}$, $\overline{de}$ usw. die Länge der Strecken ab, de usw. verstanden:

$$\operatorname{mod}[ab]=\overline{ab}, \qquad \operatorname{mod}[de]=\overline{de} \quad \text{usw.} \tag{5}$$

Folglich erhält man als neuen Ausdruck für den Satz von Busche:

$$[ghi]=\overline{ab}\,.\,\overline{bc}\,.\,\overline{cd}\,.\,\overline{de}\,.\,\overline{ef}\,.\,\overline{fa}\,.\sin\varphi\,.\sin\psi\,.\sin\varphi\,.\,\overline{ghi}=\text{const.}, \tag{6}$$

in Worten: Betrachtet man sechs beliebige Punkte einer Ebene, in irgendeiner Reihenfolge genommen, als Ecken eines einfachen Sechsecks, dann ist das Produkt aus den Längenzahlen seiner sechs Seiten sowie den sin der drei Winkel, unter denen sich die drei Paar Gegenseiten des Sechsecks schneiden, und der Flächenzahl des Dreiecks, das die Schnittpunkte dieser drei Geradenpaare zu Ecken hat, unabhängig von der Reihenfolge der sechs gegebenen Punkte.

Die metrische Form des Satzes von Busche lässt sich auch aufrecht erhalten, wenn einzelne der vorkommenden Punkte ins Unendliche fallen. Läge z. B. der Punkt a in irgendeiner Richtung unendlich fern, so könnte man ihn, wie es in der Punktrechnung üblich ist, durch einen Vektor von der Länge eins parallel mit jener Richtung ersetzen und es würde $\operatorname{mod}[ab]=1$, $\operatorname{mod}[fa]=1$. Befände sich aber eine Ecke des Dreiecks von Busche,

[1] P. R. I, S. 126 oben.

[2] P R. I. S. 359 N⁰ 9

z. B. g, im Unendlichen, und nur diese, dann träte[1] an die Stelle von $\sin\varphi$ der Abstand der nun parallelen Geraden $[ab]$ und $[de]$, und statt $[ghi]$ hätte man den Inhalt des Parallelogramms zu nehmen, von welchem $[hi]$ eine Seite vorstellt, während eine zweite Seite parallel mit $[ab]$ ist und die Länge eins hat. Wären zwei Ecken des Dreiecks von Busche unendlich fern, z. B. g und h, so würde aus $\overline{ghi}$ der Inhalt des Rhombus von der Seitenlänge eins mit den Seiten parallel mit $[ab]$ und $[bc]$ sind, also der sin des Winkels dieser beiden Geraden.

2. Metrische Form des zum Satz von Busche dualen Satzes in der Ebene.

Sechs beliebige Geraden A, B, C, D, E und F in der Ebene mögen in dieser Ordnung als die Seiten eines einfachen Sechsseits betrachtet werden. Die Verbindungslinien der drei Paar Gegenecken bezeichnen wir mit G, H und J:

$$G=[AB\,.\,DE],\qquad H=[BC\,.\,EF],\qquad J=[CD\,.\,FA]. \tag{1}$$

Nach dem Satze, der zu dem von Busche in der Ebene dual ist, muss das äussere Produkt dieser drei Geraden:

$$[GHJ]=[AB\,.\,DE\,.\,.\,BC\,.\,EF\,.\,.\,CD\,.\,FA] \tag{2}$$

einen von der Reihenfolge der sechs gegebenen Geraden unabhängigen Wert haben. Das äussere Produkt dreier (endlichen) Geraden ist aber gleich dem Produkt ihrer Zahlwerte und dem „Sinus“ des von ihnen gebildeten Dreiseits:[1]

$$[GHJ]=\operatorname{mod}G\,.\operatorname{mod}H\,.\operatorname{mod}J\,.\sin\overline{GHJ}. \tag{3}$$

Nennt man jedoch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ die Abstände der drei Paare von Gegenecken des obigen Sechsseits, so ist

$$\begin{aligned}\operatorname{mod}G&=\operatorname{mod}[AB]\,.\operatorname{mod}[DE]\,.\,\mathfrak{p}\\ \operatorname{mod}H&=\operatorname{mod}[BC]\,.\operatorname{mod}[EF]\,.\,\mathfrak{q}\\ \operatorname{mod}J&=\operatorname{mod}[CD]\,.\operatorname{mod}[AF]\,.\,\mathfrak{r}.\end{aligned} \tag{4}$$

[1]) Unter dem Sinus eines Dreiseits in der Ebene hat man die zum doppelten Inhalt eines Dreiecks duale Grösse zu verstehen. Er ist unter anderm gleich dem Produkt aus dem sin irgendeines Winkels des Dreiseits und der zugehörigen (d. h. durch den Scheitel dieses Winkels gehenden) Höhe, vgl. P. R. I, S. 360 N° 11, wo auch andere Ausdrücke dafür entwickelt sind.

Ueberdies hat man, wenn $\overline{AB}$ den Winkel der (je mit einem bestimmten Sinn versehenen oder „orientierten“) Geraden A und B bezeichnet und wenn man den gegebenen Geraden je den Zahlwert eins beilegt:

$$\operatorname{mod}[AB]=\sin\overline{AB},\qquad \operatorname{mod}[DE]=\sin\overline{DE},\qquad \text{usw.} \tag{5}$$

Mithin ergibt sich

$$\begin{aligned}[GHJ]=\sin\overline{AB}\,.\sin\overline{BC}\,.\sin\overline{CD}\,.\sin\overline{DE}\,.\sin\overline{EF}\,.\sin\overline{FA}\\ .\,\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}\,.\sin\overline{GHJ}=\text{const.},\end{aligned} \tag{6}$$

d. h.: Werden sechs beliebige Geraden einer Ebene in irgendeiner Reihenfolge als Seiten eines einfachen Sechsseits betrachtet, so ist das Produkt aus den sin der sechs Winkel des Sechsseits, den drei Abständen seiner drei Paar Gegenecken und dem Sinus des Dreiseits, das von den Verbindungslinien der Gegenecken gebildet wird, unabhängig von der Reihenfolge jener sechs Geraden.

3. Die entsprechenden Sätze im Bündel und auf der Kugel.

Auf Grund des Gesetzes der Dualität, das in der Punktrechnung, insbesondere bei den äusseren Produkten und den durch sie bedingten metrischen Grössen, allgemeine Gültigkeit hat[1], lässt sich ohneweiteres angeben, welche Sätze in der Geometrie des Bündels und in der sphärischen Geometrie den unter 1) und 2) hergeleiteten metrischen Sätzen entsprechen. Es sind folgende.

Werden sechs beliebige, von einem und demselben Punkt ausgehende Geraden des Raumes in irgendeiner Reihenfolge als Kanten eines einfachen Sechskants betrachtet, so ist das Produkt aus den sin der sechs „Seiten“ (d. h. Winkel zwischen benachbarten Kanten) des Sechskants, den sin der drei Flächenwinkel, welche die drei Paare von gegenüberliegenden Seitenflächen mit einander bilden, und dem (v. Staudt'schen) Sinus[2] des Dreikants, das von den Schnittlinien der drei Paare gegenüberliegender Seitenflächen gebildet wird, unabhängig von der Reihenfolge jener sechs Geraden.

[1]) Vgl. P. R. I N° 34, insb. S. 130—132.
[2]) Vgl. P. R. I, S. 361 N° 12.

Betrachtet man sechs beliebige, durch einen und denselben Punkt gehende Ebenen, in beliebiger Reihenfolge genommen, als Seitenebenen eines einfachen Sechsflachs, dann ist das Produkt aus den sin der Flächenwinkel an seinen sechs Kanten, den sin der drei Winkel, welche die drei Paar Gegenkanten einschliessen, und dem Sinus des Dreiflachs [1], welches die Verbindungsebenen der drei Paar Gegenkanten bilden, unabhängig von der Reihenfolge jener sechs Ebenen.

Diese beiden Sätze können leicht auf bekannte Weise in Sätze der sphärischen Geometrie verwandelt werden, indem man die fraglichen sechs Geraden oder Ebenen mit einer Kugel vom Halbmesser eins schneidet, die deren gemeinsamen Punkt als Mittelpunkt hat. Es ist dabei nur zu bemerken, dass aus dem Sinus eines Dreikants die Grösse wird, die sich als der Sinus eines sphärischen Dreiecks bezeichnen lässt, nämlich das Produkt aus dem sin irgendeiner Seite des sphärischen Dreiecks und dem sin der zugehörigen sphärischen Höhe, ferner aus dem Sinus eines Dreiflachs der Sinus eines sphärischen Dreiseits, welches die duale oder polare Grösse zu dem Sinus eines sphärischen Dreiecks ist.

[1]) Vgl. P. R. I, S. 362 N° 13.

A. HOBORSKI.

Z podstaw Geometryi rzutowej.

Ueber die Grundlagen der projektiven Geometrie.

§ 1. Na innem miejscu [1]) odróżniłem między Geometryą rzutową specyalną a ogólną, o ile chodzi o Geometryę rzutową, uzyskaną na drodze syntetycznej. Specyalną dali nam v. Staudt (Geometrie der Lage 1847) i M. Pasch (Vorlesungen über neuere Geometrie 1882, drug. wyd z r. 1912). Kiedy pierwszy z nich przyjął aksyomat o równoległych w postaci następującej: „przez każdy punkt płaszczyzny, nie leżący na prostej (l) tej płaszczyzny, można poprowadzić jedną i tylko jedną prostą, współpłaszczyznową z prostą (l) i prostej (l) nie przecinającą", i przez to rozważania swoje znacznie uprościł, M. Pasch zbudował Geometryę rzutową wolną od wszelkiego aksyomatu o równoległych (pogląd, że Geometrya rzutowa daje się rozwinąć bez aksyomatów o równoległych—zdaje się—wypowiedział pierwszy F. Klein (Über die sog. Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Annalen, tom 6-ty, 1873); obydwaj, tak v. Staudt, jak i Pasch są zmuszeni do odróżnienia punktów, prostych i płaszczyzn t. zw. właściwych od niewłaściwych (Pasch), czy nieskończenie odległych (v. Staudt). Ogólna Geometrya rzutowa (Pieri: I principii della geometria di posizione, composti in sistema logico deduttivo druk. w Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, tom **48**, r. 1899; K. Th. Vahlen: Abstrakte Geometrie, 1905) przyjmuje zaś swe podstawowe zdania i pojęcia w ten sposób, że mówi o punktach, prostych i płaszczyznach, nie dzieląc ich na dwie klasy, nadto czyni to w ten sposób, że

[1]) A. Hoborski, Bemerkungen über die Grundlagen der Geometrie. Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau, Styczeń r. 1917.