J. RUDNICKI.

Funkcya nadwykładnicza $\mathcal{E}(\alpha, x)$ w zależności od parametru α.

Etude de la fonction $\mathcal{E}(\alpha, x)$ comme fonction du paramètre α.

1. Dla naszego celu wygodnie jest zamiast funkcyi $\mathcal{E}(\alpha, x)$ poddać badaniu bezpośrednio z nią związaną funkcyę

$$\mathcal{E}_1(\alpha, x) = e^{-\alpha} . \mathcal{E}(\alpha, e^{\alpha} . x),$$

Funkcya $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ czyni zadość równaniu funkcyjnemu

$$e^{\alpha} . \mathcal{E}_1(\alpha, \alpha x) = e^{\alpha \mathcal{E}_1(\alpha, x)}. \tag{1}$$

Zamiast $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ będziemy często pisali dla skrócenia wprost $\mathcal{E}_1(x)$. Jest to funkcya całkowita zmiennej x.

2. Rozwinięcie na szereg potęgowy.

Możemy otrzymać to rozwinięcie w sposób następujący; pochodna logarytmu obu stron równania (1) daje nam:

$$\mathcal{E}_1'(\alpha x) = \mathcal{E}_1'(x) . \mathcal{E}_1(\alpha x),$$

czyli

$$\mathcal{E}_1'(x) = \mathcal{E}_1(x) . \mathcal{E}_1'\left(\frac{x}{\alpha}\right). \tag{2}$$

Dalej, wiemy, iż:

$$\mathcal{E}_1(0) = 1, \qquad \mathcal{E}_1'(0) = 1.$$

Biorąc pochodną rzędu n-tego obu stron równości (2), otrzymamy:

[1]) „Badanie pewnego szczególnego typu wzrastania funkcyi". Prace mat.-fiz. 1916 r. t. XXVIII. Tam znajdzie czytelnik dowody twierdzeń, na które się powołujemy w niniejszej pracy.

$$\mathcal{E}_1^{(n+1)}(x) = \mathcal{E}_1^{(n)}(x)\,.\,\mathcal{E}_1'\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{n}{\alpha}\,\mathcal{E}_1^{(n-1)}(x)\,\mathcal{E}_1''\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \dots$$

$$+ \frac{C_k^n}{\alpha^k}\,\mathcal{E}_1^{(n-k)}(x)\,\mathcal{E}_1^{k+1}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \dots + \frac{1}{\alpha^n}\,\mathcal{E}_1(x)\,.\,\mathcal{E}_1^{(n+1)}\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Niech teraz w powyższem będzie $x = 0$; otrzymujemy wzór zwrotny:

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha^n}\right)\mathcal{E}^{(n+1)}(0) = \mathcal{E}_1^{(n)}(0) + \frac{n}{\alpha}\,\mathcal{E}_1^{(n-1)}(0) + \dots$$

$$+ C_k^n.\frac{1}{\alpha^k}.\,\mathcal{E}_1^{(n-k)}(0)\,.\,\mathcal{E}_1^{(k+1)}(0) + \dots + \frac{n}{\alpha^{n-1}}\,\mathcal{E}_1^{(n)}(0),$$

czyli:

$$\mathcal{E}_1^{(n+1)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^n \frac{\frac{1}{\alpha^k}}{1 - \frac{1}{\alpha^n}}\,.\,\mathcal{E}_1^{(n-k)}(0)\,.\,\mathcal{E}_1^{(k+1)}(0). \tag{3}$$

3. Ze wzoru (3) wnioskujemy metodą indukcyi matematycznej, że $\mathcal{E}_1^{(n)}(0) > 0$ i prócz tego że jest funkcyą malejącą zmiennej α.

W rzeczy samej:

$$\mathcal{E}_1''(0) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = 1 + \frac{1}{\alpha - 1},$$

$$\mathcal{E}_1'''(0) = \frac{\alpha^2(\alpha + 2)}{(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)} = \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 - 1}\right)\left(1 + \frac{3}{\alpha - 1}\right).$$

Widzimy więc, iż twierdzenie nasze, tyczące się spółczynnika $\mathcal{E}^{(n)}(0)$, jest prawdziwe dla $n = 2, 3$. Spółczynnik $\dfrac{\frac{1}{\alpha^k}}{1 - \frac{1}{\alpha^n}}$ we wzorze (3) jest (dla $k < n$) także funkcyą dodatnią i malejącą zmiennej α; stąd odrazu wynika prawdziwość naszego twierdzenia dla n całkowitego jakiegokolwiek.

4. Mam zamiar udowodnić twierdzenie następujące:

F u n k c y a $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ p r z y s t a ł e m $x\,(x \neq 0)$, j e s t f u n k c y ą m a l e j ą c ą p a r a m e t r u α.

Z samej natury zagadnienia wynika, oczywiście, iż mamy na myśli tylko rzeczywiste wartości zmiennych x i α.

Na razie udowodnimy to twierdzenie w przypadku, gdy $x > 0$; wynika to odrazu z poprzedniego wzoru (3) i z rozwinięcia

$$\mathcal{E}_1(x) = \sum_n^\infty \frac{\mathcal{E}_1^{(n)}(0)\,.\,x^n}{n!}. \tag{4}$$

Każdy składnik szeregu zbieżnego (4) maleje, gdy α rośnie; wszystkie składniki są dodatnie, a więc suma szeregu (4) czyli $\mathcal{E}_1(x)$ jest funkcyą malejącą zmiennej α.

Aby udowodnić to twierdzenie i dla przypadku $x < 0$, zajmiemy się rozwinięciem na szereg funkcyi odwrotnej, t. j. jednej gałęzi funkcyi nadlogarytmowej.

6. F u n k c y a o d w r o t n a (n a d l o g a r y t m o w a). Funkcyę odwrotną względem funkcyi $\mathcal{E}(x)$ oznaczać będziemy przez $T(x)$, a funkcyę odwrotną względem $\mathcal{E}_1(x)$ przez $T_1(x)$.

Mamy wtedy:

$$T_1(x) = e^{-\alpha}\,.\,T(x\,e^\alpha); \quad T_1(1) = 0,$$

$$T_1'(1) = T'(e^\alpha) = 1, \tag{5}$$

$$T_1^{(n)}(1) = e^{\alpha(n-1)}\,T^{(n)}(e^\alpha).$$

Funkcya $T(x)$ spełnia równanie funkcyjne

$$T(x) = \alpha\,.\,T\{\log_\alpha x\}. \tag{6}$$

6. Tworząc pochodne rzędu n-tego obu stron równości (6), znajdziemy:

$$\alpha x^{-n}\left\{\frac{T^{(n)}(u)}{\alpha^n}e^{n\alpha} - A_1^{(n)}\frac{T^{(n-2)}(u)}{\alpha^{n-1}}e^{(n-1)\alpha} + A_2^{(n)}\frac{T^{(n-2)}(u)}{\alpha^{n-2}}e^{(n-2)\alpha} - \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{n-2}A_{n-1}^{(n)}\frac{T'(u)}{\alpha}e^\alpha\right\} = T^{(n)}(x),$$

gdzie $u = \log_\alpha x$, a $A_p^{(n)}$ oznacza sumę wszystkich iloczynów po p czynników, utworzonych z liczb ciągu $1, 2, 3, \dots, n-1$.

Kładąc $x = e^\alpha$ i przechodząc do funkcyi $T_1(x)$ otrzymamy:

$$(-1)^{n-1}\,T_1^{(n)}(1)\left\{1 - \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right\} = A_{n-1}^{(n)}\,T_1'(1) - A_{n-2}^{(n)}\frac{T_1''(1)}{\alpha} + \dots$$

$$+ (-1)^n\frac{A_1^{(n)}}{\alpha^{n-2}}\,T_1^{(n-1)}(1).$$

Wprowadźmy oznaczenie następujące:

$$a_n = (-1)^{n-1}\,T_1^{(n)}(1);$$

otrzymamy wtedy wzór zwrotny:

$$a_{n+1} = \frac{\alpha}{\alpha^n - 1}A_1^{(n+1)}\,.\,a_n + \frac{\alpha^2}{\alpha^n - 1}A_2^{(n+1)}\,.\,a_{n-1} + \dots + \frac{\alpha^n}{\alpha^n - 1}A_n^{(n+1)}\,a_1, \tag{7}$$

gdzie
$$\alpha_1=1,\quad \alpha_2=\frac{\alpha}{\alpha-1},\quad \alpha_3=\frac{\alpha^2(1+2\alpha)}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)}\quad \text{i t. d.}$$

O spółczynnikach α_n, występujących we wzorze (7), zauważymy, co następuje:

1) Wszystkie α_n są dodatnie,

2) Gdy α rośnie, α_n jako funkcya zmiennej α maleje. Oczywiście zawsze $\alpha>1$.

Oba orzeczenia, wyrażone pod l. 1 i 2, można wysnuć z łatwością przy pomocy indukcyi matematycznej ze wzoru (7).

W rzeczy samej: prawdziwość twierdzenia sprawdzamy bezpośrednio dla $n=2$, 3, gdyż
$$\alpha_2=\frac{\alpha}{\alpha-1}=1+\frac{1}{\alpha-1},$$
$$\alpha_3=\frac{\alpha^2(1+2\alpha)}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)}=\left(1+\frac{1}{\alpha^2-1}\right)\left(2+\frac{3}{\alpha-1}\right),\ldots$$

We wzorze (7) zaś spółczynniki $\frac{\alpha^k}{\alpha^n-1}$, (gdzie $k<n$) są funkcyami malejącemi zmiennej α.

7. Szereg nadlogarytmowy. Przejdźmy teraz do funkcyi odwrotnej. Na zasadzie poprzedniego otrzymamy rozwinięcie formalne następujące:
$$(x-1)-\frac{\alpha}{\alpha-1}\,\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{\alpha^2(1+2\alpha)}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)}\,\frac{(x-1)^3}{3!}-\ldots$$
$$+(-1)^{n+1}\alpha_n\,.\,\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{8a}$$

Udowodnimy za chwilę, że szereg ten jest zbieżny wewnątrz pewnego koła zbieżności i przedstawia jednę z gałęzi funkcyi nadlogarytmowej, mianowicie tę, która dla wartości rzeczywistych zmiennej przyjmuje wartości rzeczywiste.

Będziemy więc mogli napisać:
$$T_1(1+x)=x-\frac{\alpha}{\alpha-1}\,\frac{x^2}{2!}+\frac{\alpha^2(2\alpha+1)}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)}\cdot\frac{x^3}{3!}-\ldots$$
$$+(-1)^{n+1}.\,\alpha_n\,\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{8b}$$

Rozwinięcie to jest analogiczne do rozwinięcia funkcyi logarytmowej:
$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}.\,\frac{x^n}{n}+\ldots$$

8. Zbieżność szeregu nadlogarytmowego. Szereg (8) jest zbieżny wewnątrz koła o promieniu $\rho=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$.

Niech η oznacza liczbę, spełniającą warunek $1>\eta>\frac{\beta}{\alpha}$, a x_0 liczbę, określoną przez nierówności $X>x_0>\eta$, gdzie X jest liczba rzeczywista dodatnia dowolnie wielka. Dalej niech y_0 oznacza liczbę rzeczywistą taką, iż $\mathcal{E}_1(y_0)=x_0$; taka liczba rzeczywista y_0 istnieje i jest określona jednoznacznie, gdyż $x_0>\frac{\beta}{\alpha}=\frac{e^\beta}{e^\alpha}$.

Gdy x_0 przybiera wartości przedziału (η, X), t. j. gdy $\eta\leqslant x_0\leqslant X$, to y_0 przyjmuje wartości, spełniające warunek $|y_0|<Y$. Niech M oznacza maximum modułu funkcyi $\mathcal{E}_1(y)$ na kole C o promieniu $\rho=Y+r$, gdzie r liczba dodatnia, zresztą dowolna, a m niech oznacza liczbę taką, iż wewnątrz i na kole C jest $\mathcal{E}'(y)>m$.

Używając metody funkcyi zwyższającej, udowodnimy w znany sposób (patrz np. Goursat, Cours d'Analyse mat., t. I l. 187 i 190), iż istnieje szereg o spółczynnikach rzeczywistych
$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \tag{9}$$
zbieżny wewnątrz pewnego koła o promieniu zbieżności r większym od pewnej liczby stałej k; (k nie zależy od x_0, zależy natomiast od η i X za pośrednictwem m i M).

Szereg ten określa funkcyę, czyniącą zadość równaniu $x=\mathcal{E}(y)$, przytem $a_0=T_1(x_0),\ldots\ a_n=\frac{T_1^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots$, gdzie $T_1(x_0)$ jest to funkcya, będąca odwróceniem funkcyi zmiennej rzeczywistej y, mianowicie funkcyi $x=\mathcal{E}(y)$ [1], a $T_1^{(n)}(x_0)$ — pochodna rzędu n-tego tejże funkcyi, tak iż możemy napisać szereg (9) w postaci:
$$y=T_1(x_0)+\frac{T_1'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{T_1''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$+\frac{T_1^{(n)}(x_0)}{n!}\,.\,(x-x_0)^n+\ldots \tag{9b}$$

Szereg ten zawiera w sobie rozszerzenie określenia funkcyi $T(x)$ dla wartości zespolonych zmiennej x wewnątrz pewnego obszaru (B). Obszar (B) otrzymamy w sposób następujący. Nadajemy w (9) zmiennej rzeczywi-

[1] Patrz l. c.

stej x_0 szereg wartości w przedziale od η do X; tworzymy dla każdego z tych punktów x_0 szereg (9) i łączymy ze sobą obszary, ograniczone kołami zbieżności tych szeregów. Z poprzedniego wyniku, iż wystarczy skończona liczba takich kół $C_1, C_2, \ldots, C_n$, które wzajemnie częściowo się pokrywają i tworzą razem obszar spójny (B), zawierający wewnątrz siebie odcinek (η, X) osi liczb rzeczywistych.

Funkcya $T(x) = e^\alpha T_1(xe^{-\alpha})$, określona w ten sposób wewnątrz obszaru (B), spełnia równanie funkcyjne

$$T(a^x) = \alpha T(x).$$

Równanie to wyraża związek między pochodnemi funkcyi $T(x)$ w punktach x_0 i a^{x_0}, w których to punktach funkcya nasza przyjmuje wartości η_0 i $\alpha\eta_0$. Jeśli $x_0 = e^\alpha$, to $a^{x_0} = e^\alpha$ także, a $\eta_0 = 0$ i $\alpha\eta_0 = 0$. Mamy więc związki między pochodnemi funkcyi $T(x)$ w tymże samym punkcie $x = e^\alpha$. Przechodząc do funkcyi $T_1(x)$, otrzymamy związki (7) między pochodnemi funkcyi $T_1(x)$ w punkcie $x = 1$.

Związki (7) określają jednoznacznie te pochodne $T_1^{(n)}(1)$. Widzimy więc, iż rozwinięcie (9) dla $x = 1$ jest identyczne z rozwinięciem (8). Udowodnimy teraz, że obszar (B) rozciąga się do punktu $x = \frac{\beta}{\alpha}$.

Zauważmy teraz, iż dla szeregu (8) punkt rzeczywisty, leżący na kole zbieżności z lewej strony, jest punktem nieregularnym; wynika to stąd, iż jeśli x jest liczbą ujemną ($x = -\xi$, gdzie $\xi > 0$), wszystkie wyrazy szeregu (8) są tego samego znaku

$$-T_1(1-\xi) = \xi + \frac{\alpha}{\alpha-1}\,\frac{\xi^2}{2!} + \frac{\alpha^2(2\alpha+1)}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)}\,\frac{\xi^3}{3!} + \cdots + \alpha_n\frac{\xi^n}{n!} + \cdots$$

Teraz łatwo udowodnić, że koło zbieżności szeregu (8) przechodzi przez punkt $\frac{\beta}{\alpha}$. W rzeczy samej, gdyby tak nie było, t. j. gdyby koło o promieniu naprzykład mniejszym $\rho_0 < \rho = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}$ było kołem zbieżności, to punkt x_0 tego koła na osi liczb rzeczywistych, położony między punktami $\frac{\beta}{\alpha}$ i 1, byłby środkiem koła zbieżności szeregu (9) i mielibyśmy odpowiednie przedłużenie funkcyi $T(x)$, a więc i szeregu (8), gdyż wewnątrz koła o promieniu ρ_0 oba rozwinięcia (8) i (9) są identyczne. Punkt x_0 byłby więc punktem regularnym; z drugiej strony wiemy, iż to być nie może. Stąd wniosek, iż promień zbieżności ρ_0 nie może być mniejszy od $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$.

Z drugiej strony punkt $\frac{\beta}{\alpha}$ nie może być regularny dla rozważanej gałęzi funkcyi $T_1(x)$; w rzeczy samej, gdyby promień zbieżności ρ_0 szeregu (8) był większy od $\rho = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}$, to funkcya $\mathcal{E}_1(y)$ miałaby wartość skończoną $= \frac{\beta}{\alpha}$ dla pewnej wartości rzeczywistej $y = \lambda$, co — jak wiadomo[1] — niema miejsca.

Twierdzenie o zbieżności szeregu (8) zostało więc udowodnione.

9. Teraz udowodnimy następujący wniosek:

F u n k c y a $T_1(x)$ jest funkcyą rosnącą zmiennej α, gdy x spełnia warunek

$$\frac{\beta}{\alpha} < x < 1.$$

W rzeczy samej, wtedy w szeregu (8) $x-1$ ma wartość ujemną, przytem szereg jest zbieżny dla tej wartości zmiennej w rozwinięciu funkcyi $-T_1(x)$ każdy wyraz jest dodatni i malejący. Gdy α rośnie, każdy wyraz, jak wiemy (l. 6), maleje, a więc $-T_1(x)$ maleje, czyli $T_1(x)$ rośnie.

10. Streścimy teraz wyniki, otrzymane w poprzednich ustępach.

Poprzednio (l. 4) udowodniliśmy, że $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ jest funkcyą malejącą parametru α dla $x > 0$. Teraz zaś (l. 9), iż $T_1(\alpha, x)$ jest funkcyą rosnącą parametru α dla

$$\frac{\beta}{\alpha} < x < 1.$$

Te dwa wyniki dopełniają się wzajem. Wynika to stąd, iż $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ i $T_1(\alpha, x)$ są funkcyami odwrotnemi. Jeśli $T_1(\alpha, x)$ rośnie, gdy α rośnie, to $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ musi maleć. Tak więc $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ jest funkcyą malejącą zmiennej α dla wszystkich wartości $x \neq 0$. Tak samo funkcya $T_1(\alpha, x)$ jest funkcyą rosnącą parametru α dla wszystkich wartości x, spełniających warunek

$$x > \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{i} \quad x \neq 1.$$

Funkcya $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ przy $x = 0$ i funkcya $T_1(\alpha, x)$ przy $x = 1$ nie zależą od α.

11. G r a n i c a f u n k c y i $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$, g d y p a r a m e t r α r o ś n i e n i e o g r a n i c z e n i e.

[1]) Patrz l. cit. §§ 16, 17, 18.

Niech α_0 oznacza dowolną liczbę większą od jedności. Ponieważ szereg

$$\mathcal{E}_1(\alpha, x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}\,\frac{\alpha}{\alpha-1} + \frac{x^3}{3!}\,\frac{\alpha^2(\alpha+2)}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)} + \dots \qquad (10)$$

jest zbieżny dla każdej wartości x, więc istnieje liczba n_0 taka, że $n > n_0$ pociąga za sobą

$$|R_n(\alpha_0, x)| < \varepsilon \qquad (11)$$

dla każdej wartości x, spełniającej nierówność

$$|x| < r$$

i gdzie $R_n(\alpha_0, x)$ jest resztą szeregu (10) przy $\alpha = \alpha_0$, tak iż

$$\mathcal{E}_1(\alpha_0, x) = s_n(\alpha_0, x) + R_n(\alpha_0, x).$$

Przy każdej wartości $\alpha > \alpha_0$ będziemy wtedy mieli:

$$|R_n(\alpha, x)| < |R_n(\alpha_0, |x|)| < \varepsilon.$$

Z drugiej strony

$$\lim_{\alpha=\infty} s_n(\alpha, x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sigma_n(x).$$

Z (11) wynika, iż

$$|e^x - \sigma_n| < \varepsilon. \qquad (12)$$

Z drugiej strony istnieje taka liczba $l > \alpha_0$, iż $\alpha > l$ pociąga nierówność

$$0 < s_n(\alpha, x) - \sigma_n(x) < \varepsilon. \qquad (13)$$

Kombinując nierówności (11), (12) i (13), otrzymamy:

$$|e^x - \mathcal{E}_1(\alpha, x)| < |e^x - \sigma_n| + |s_n - \sigma_n| + |R_n(\alpha_0, |x|)| < 3\varepsilon,$$

czyli:

$$|e^x - \mathcal{E}_1(\alpha, x)| < 3\varepsilon$$

o ile

$$\alpha > l \quad \text{i} \quad |x| < r,$$

co dowodzi, iż

$$\lim_{\alpha=\infty} \mathcal{E}_1(\alpha, x) = e^x$$

przy każdej wartości x.

12. Pęk krzywych $y = \mathcal{E}_1(\alpha, x)$. W tych wszystkich rozważaniach zmienne α i x przyjmują, oczywiście, tylko wartości rzeczywiste, przytem α rośnie od 1 do ∞.

Wszystkie krzywe pęku przechodzą przez wspólny punkt M o spółrzędnych $x = 0$, $y = 1$. Wszystkie są styczne do siebie w tym punkcie. Po za tem nie mają żadnego punktu wspólnego.

O ile $x \neq 0$, to $\mathcal{E}_1(\alpha, x) > e^x$, przyczem, gdy α rośnie nieograniczenie, to $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ dąży do funkcyi e^x. Zbieżność, oczywiście, nie jest jednostajna. Wynika to stąd, iż $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ rośnie prędzej od $e_n(x)$, gdy x rośnie nieograniczenie. [1]

Tak więc, gdy α rośnie nieograniczenie, krzywa $y = \mathcal{E}_1(\alpha, x)$ zbliża się do krzywej wykładniczej $y = e^x$.

Gdy zaś α dąży do jedności, to $y = \mathcal{E}_1(\alpha, x)$ zbliża się do linii łamanej, utworzonej z dwóch półprostych, prostopadłych do siebie w punkcie M jako wierzchołku, przytem jeden z promieni jest równoległy do osi liczb rzeczywistych, a drugi jest częścią osi liczb urojonych, przyczem zwrot jest w pierwszym przypadku ujemny, a w drugim dodatni.

Wynika to stąd, iż $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ jest funkcyą rosnącą zmiennej x i że $\lim_{x=-\infty} \mathcal{E}_1(\alpha, x) = \frac{\beta}{\alpha}$, przyczem gdy α dąży do jedności, to i β dąży do tej samej granicy 1. Tak więc przy x ujemnem $\frac{\beta}{\alpha} < \mathcal{E}_1(\alpha, x) < 1$, t. j. krzywa $y = \mathcal{E}_1(\alpha, x)$ jest całkowicie położona między dwiema równoległemi $y = \frac{\beta}{\alpha}$ i $y = 1$, przyczem $\lim_{\alpha=1} \frac{\beta}{\alpha} = 1$. Dla x dodatniego wystarczy zaważyć, iż $\mathcal{E}_1(x) > \frac{\alpha}{\alpha-1}\,x$.

Słowem, przy α rzeczywistem jest zawsze:

gdy $x < 0$, $\mathcal{E}_1(\alpha, x) < 1$ i jednocześnie $\mathcal{E}_1(\alpha, x) > e^x$;

gdy $x > 0$, $\mathcal{E}_1(\alpha, x) > e^x$

Krzywe pęku $y = \mathcal{E}_1(\alpha, x)$ wypełniają obszar, wyrażony tylko co napisanemi nierównościami.

Możemy jeszcze rzecz przedstawić inaczej. Niech w równaniu

$$y = \mathcal{E}_1(\alpha, x)$$

dane będą liczby rzeczywiste x i y, należy zaś wyznaczyć liczbę rzeczywistą α. Zadanie jest możliwe tylko wtedy, gdy $x < 0$ i $e^x < y < 1$, lub gdy $x > 0$ i $y > e^x$, lub wreszcie gdy $x = 0$, $y = 1$. W pierwszym i drugim przypadku α jest wyznaczone jednoznacznie, w trzecim zaś α jest liczbą dowolną, większą od jedności. Wynika to z rozważań poprzednich i z ciągłości funkcyi $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ względem parametru $\alpha > 1$.

---

[1]) Patrz l. c. l. 18.

Łatwo teraz przejść do pęku krzywych $y = T_1(\alpha, x)$. Wystarczy zauważyć, iż pod względem geometrycznym ten drugi pęk otrzymamy z pierwszego przez odbicie symetryczne względem dwusiecznej $y = x$.

Możemy z łatwością udowodnić, że granicą, gdy α rośnie nieograniczenie przy x stałem, jest tu funkcya logarytmowa, czyli

$$\lim_{\alpha=\infty} T_1(\alpha, x) = \log_e x.$$

Gdy $x > 1$, można wynik ten otrzymać wprost z tylko co wzmiankowanej zależności geometrycznej między obu pękami. Gdy zaś $x < 1$, można wyprowadzić ten sam wynik z szeregu (8a) zapomocą rozważań zupełnie podobnych do tych, które rozwinęliśmy w ustępie pod l. 11.

Wyżej zakładaliśmy, iż α i x przyjmują wartości rzeczywiste. Otrzymany jednak wynik, iż $\lim\limits_{\alpha=\infty} \mathcal{E}_1(\alpha, x) = e^x$ jest natury ogólnej i pozostaje prawdziwym nawet wtedy, gdy α i x są liczbami zespolonemi, pod warunkiem, że $|\alpha|$ czyli moduł liczby zespolonej α rośnie nieograniczenie. Udowodnimy więc, iż jest ogólnie

$$\lim_{|\alpha|=\infty} \mathcal{E}_1(\alpha, x) = e^x.$$

13. Zaczniemy od pewnego twierdzenia pomocniczego. W tym celu wróćmy do rozwinięcia funkcyi $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(\alpha, x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}\,\frac{\alpha}{\alpha-1} + \dots \\ + \frac{x^n}{n!}\cdot\frac{U_n(\alpha)}{(\alpha^{n-1}-1)(\alpha^{n-2}-1)\dots(\alpha-1)} + \dots;\end{aligned} \tag{14}$$

$U_n(\alpha)$ oznacza wielomian względem α stopnia $\frac{n(n-1)}{2}$.[1]

Wielomiany te są związane wzorem zwrotnym:

$$\begin{aligned}U_{n+1}(\alpha) = n\alpha U_n(\alpha) + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^2 U_{n-1}(\alpha)\, U_2(\alpha)\frac{\alpha^{n-1}-1}{\alpha-1} \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha^3 \frac{(\alpha^{n-1}-1)(\alpha^{n-2}-1)}{(\alpha^2-1)(\alpha-1)} U_{n-2}(\alpha)\, U_3(\alpha) \\ + \dots + \alpha^n U_n(\alpha).\end{aligned} \tag{15}$$

---

[1]) Patrz l. c. l. 4.

Zajmijmy się na razie spółczynnikami rozwinięcia (14). Wyraz ogólny, z pominięciem czynnika $\frac{1}{n!}$, jest

$$\mathcal{E}^{(n)}(\alpha, 0) = \frac{U_n(\alpha)}{(\alpha^{n-1}-1)(\alpha^{n-2}-1)\dots(\alpha-1)};$$

przy $|\alpha| > 1$ możemy przedstawić ten wyraz w postaci szeregu zbieżnego:

$$\mathcal{E}_1^{(n)}(\alpha, 0) = 1 + \frac{A_1^n}{\alpha} + \frac{A_2^n}{\alpha^2} + \dots + \frac{A_p^n}{\alpha^p} + \dots \tag{16}$$

O spółczynniku A_p^n udowodnimy co następuje:

A_p^n jest liczbą dodatnią i jako funkcya zmienna n jest wielomianem stopnia $2p$ względem tej zmiennej.

Dowód. Wyrażenia $\mathcal{E}_1^{(n)}(\alpha, 0)$ czynią zadość wzorowi zwrotnemu (3). Podstawiając rozwinięcie (16), otrzymamy:

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{\alpha^n}\right)\left\{1 + \frac{A_1^{n+1}}{\alpha} + \frac{A_2^{n+1}}{\alpha^2} + \dots + \frac{A_p^{n+1}}{\alpha^p} + \dots\right\} \\ &= 1 + \frac{A_1^n}{\alpha} + \frac{A_2^n}{\alpha^2} + \frac{A_3^n}{\alpha^2} + \dots + \frac{A_p^n}{\alpha^p} + \dots \\ &+ \frac{n}{\alpha}\left\{1 + \frac{A_1^{n-1}}{\alpha} + \frac{A_2^{n-1}}{\alpha^2} + \dots + \frac{A_p^{n-1}}{\alpha^p} + \dots\right\}\left\{1 + \frac{A_1^2}{\alpha} + \frac{A_2^2}{\alpha^2} + \dots \right. \\ &\left. + \frac{A_p^2}{\alpha^p} + \dots\right\} + \frac{n(n-1)}{2\alpha^2}\left\{1 + \frac{A_1^{n-2}}{\alpha} + \frac{A_2^{n-2}}{\alpha^2} + \dots + \frac{A_p^{n-2}}{\alpha^p} + \dots\right\} \\ &\left\{1 + \frac{A_1^3}{\alpha} + \frac{A_2^3}{\alpha^2} + \dots + \frac{A_p^3}{\alpha^p} + \dots\right\} + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{C_k^n}{\alpha^k}\left\{1 + \frac{A_1^{n-k}}{\alpha} + \frac{A_2^{n-k}}{\alpha^2} + \dots + \frac{A_p^{n-k}}{\alpha^p} + \dots\right\} \\ &\left\{1 + \frac{A_1^{k+1}}{\alpha} + \frac{A_2^{k+1}}{\alpha^2} + \dots + \frac{A_p^{k+1}}{\alpha^p} + \dots\right\} + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{n}{\alpha^{n-1}}\left\{1 + \frac{A_1^n}{\alpha} + \frac{A_2^n}{\alpha^2} + \dots + \frac{A_p^n}{\alpha^p} + \dots\right\}.\end{aligned}$$

Utożsamiając spółczynniki przy $\frac{1}{\alpha^p}$, otrzymamy, przy $p > n$:

$$A_p^{n+1} - A_{p-n}^{n+1} = A_p^n + n \sum_k A_k^{n-1} A_{p-k-1}^2 + \frac{n(n-2)}{1\,.\,2} \sum_k A_k^{n-2} A_{p-k-2}^3 + \dots$$

$$\dots + C_s^n \sum_k A_k^{n-s} A_{p-k-s}^{s+1} + \dots + n A_{p-n+1}^n .$$

Przytem A_m^n dla $m=0$ jest 1, dla $m<0$ zerem; dalej A_p^1 dla $p \neq 0$ jest zero, $A_0^1 = 1$; wreszcie $A_p^2 = 1$ dla każdego p.

Analogicznie

$$A_{p-n}^{n+1} - A_{p-2n}^{n+1} = A_{p-n}^n + n \sum_k A_k^{n-1} A_{p-n-k-1}^2 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \sum_k A_k^{n-2} A_{p-n-k-2}^3 + \dots$$

$$\dots + n A_{p-2n+1}^n .$$

Niech będzie $p = in + r$, gdzie $0 \leqslant r < n$.
Otrzymamy szereg związków analogicznych do dwóch poprzednich, z których ostatnie są:

$$A_{n+r}^{n+1} - A_r^{n+1} = A_{n+r}^n + n \sum_k A_k^{n-1} A_{n+r-k-1}^2$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \sum_k A_k^{n-2} A_{n+r-k-2}^3 + \dots + n A_{r+1}^n .$$

$$A_r^{n+1} = A_k^n + n \sum_k A_k^{n-1} A_{r-k-1}^2 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \sum_k A_k^{n-2} A_{r-k-2}^3 + \dots + C_r^n .$$

Dodając do siebie stronami te wszystkie wzory, otrzymamy:

$$A^{n+1} - A_p^n = \sum_{k \equiv p \,(\mathrm{mod}\, n)} A_k^n + n \sum_{k+k' \equiv p-1 \,(\mathrm{mod}\, n)} A_k^{n-1} A_{k'}^2 + \dots$$

$$\dots + C_s^n \sum_{k+k' \equiv p-s \,(\mathrm{mod}\, n)} A_k^{n-s} A_{k'}^{s+1} + \dots + n \sum_{k \equiv p+1 \,(\mathrm{mod}\, n)} A_k^n , \qquad (17)$$

przyczem

$$k \text{ i } k' < p .$$

Dla $p = 1$:

$$A_1^{n+1} - A_1^n = n .$$

Skąd, uwzględniając iż $A_2^2 = 1$, otrzymamy $A_1^n = \frac{n(n-1)}{2}$

Dla $p = 2$:

$A_2^{n+1} - A_2^n = n(A_1^{n-1} + A_1^2) + \frac{n(n-1)}{2}$ = wielomianowi trzeciego stopnia względem n. Skąd wynika, że A_2^n jest wielomianem czwartego stopnia względem n. Oprócz tego zauważymy, iż $A_1^n > 0$, $A_2^n > 0$.

Stosujemy teraz indukcyę matematyczną.

Ze wzoru (17) wynika, iż $A_p^{n+1} - A_p^n =$ wielomianowi kwadratowemu względem A_k^l, przyczem wskaźnik k jest mniejszy od p. Przyjąwszy, iż A_k^n wielomianem stopnia $2k$ względem n, gdy $k<p$, otrzymamy, iż $A_p^{n+1} - A_p^n = g$ jest wielomianem stopnia $1 + 2(p-1) = 2p - 1$ względem n.

A więc A_p^n jest w samej rzeczy wielomianem stopnia $2p$ względem n.

Tak samo, z nierówności $A_k^n > 0$, gdy $k < p$, przy pomocy wzoru (17) otrzymamy, iż także $A_p^n > 0$.

Twierdzenie pomocnicze jest więc udowodnione.

14. O pewnej własności analitycznej funkcyi $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ zmiennej α.

W rozwinięciu (16), które jest zbieżne, gdy $|\alpha| > 1$, spółczynniki A_p^n są liczbami rzeczywistemi dodatniemi.

Stąd wnioskujemy bezpośrednio, iż

$$|\mathcal{E}_1^{(n)}(\alpha, 0)| < \mathcal{E}_1^{(n)}(|\alpha|, 0), \qquad (18)$$

gdzie $|\alpha|$ oznacza, jak zwykle, moduł liczby zespolonej α.

Ze względu więc na rozwinięcie (4), otrzymamy także:

$$|\mathcal{E}_1(\alpha, x)| < \mathcal{E}_1(|\alpha|, |x|). \qquad (19)$$

Niech α_0 oznacza dowolną liczbę rzeczywistą większą od 1 i niech $|\alpha| > \alpha_0$.

Wtedy

$$|\mathcal{E}_1(\alpha, x)| < \mathcal{E}_1(\alpha_0, |x|).$$

Łatwo teraz otrzymać funkcyę zwyższającą dla $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$, jako funkcyi zmiennej α. Mianowicie dla $|\alpha| > \alpha_0$:

$$\mathcal{E}_1(\alpha, x) \ll \frac{\mathcal{E}_1(\alpha_0, x)}{1 - \frac{\alpha_0}{\alpha}},$$

co oznacza, że spółczynnik przy $\frac{x^n}{\alpha^p}$ w rozwinięciu funkcyi $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ jest co do wartości bezwzględnej mniejszy od odpowiedniego spółczynnika w rozwinięciu funkcyi stojącej po prawej stronie.

Wynika stąd, że w szeregu (14) możemy każdy wyraz

$$\frac{x^n}{n!} \frac{U_n(\alpha)}{(\alpha^{n-1}-1)(\alpha^{n-1}-1)\dots(\alpha-1)}$$

zastąpić jego rozwinięciem na szereg na podstawie wzoru (16) według potęg rosnących $\frac{1}{\alpha}$ i następnie uporządkować wszystkie wyrazy według tychże potęg wyrażenia wielkości $\frac{1}{\alpha}$. Otrzymamy wtedy szereg zbieżny. Wynik ten, oczywiście zastosować można dla każdego α, byle tylko $|\alpha| > 1$.

Wnioskujemy również na podstawie poprzedniego, że $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ jest funkcyą regularną zmiennej α dla każdego α, spełniającego warunek $|\alpha|>1$, t. j. zewnątrz koła o promieniu 1.

15. Forma rozwinięcia.

Udowodnimy teraz, że rozwinięcie, o którem była mowa w rozdziale poprzednim, jest kształtu

$$\mathcal{E}_1(\alpha, x) = e^x \cdot \left\{1 + \frac{\varphi_1(x)}{\alpha} + \frac{\varphi_2(x)}{\alpha^2} + \dots + \frac{\varphi_p(x)}{\alpha^p} + \dots\right\}, \tag{20}$$

gdzie $\varphi_p(x)$ jest wielomianem względem x stopnia $2p$.

Szereg (20) jest zbieżny, przy spełnieniu warunku $|\alpha|>1$, dla każdego x.

W tym celu wróćmy do wyrażenia A_p^n.

W rozdziale pod l. 13 zostało udowodnione, że A_p^n jest wielomianem stopnia $2p$ względem n.

Każdy wielomian stopnia $2p$ może być przedstawiony w postaci sumy

$$a_0 + a_1 \cdot n + a_2 n(n-1) + \dots + a_{2p} n(n-1)(n-2)\dots(n-2p+1).$$

Połóżmy więc:

$$A_p^n = a_0^p + a_1^p \cdot n + a_2^p n(n-1) + \dots + a_{2p}^p n(n-1)\dots(n-2p+1). \tag{21}$$

Czyniąc po kolei $n = 0, 1, 2, \dots$, znajdziemy:

$$A_p^0 = a_0^p = 0, \quad A_p^1 = a_0^p + a_1^p = 0, \quad \text{więc i} \quad a_1^p = 0,$$

$$a_2^p = \frac{A_p^2}{2} = \tfrac{1}{2}, \quad a_3^p = -\frac{A_p^3}{2} + \frac{A_p^3}{6}, \dots$$

$$k!\, a_p^p = A_p^k - k A_p^{p-1} + \frac{k(k-1)}{2} A_p^{k-2} + \dots + (-1)^k \cdot \frac{k(k-1)}{2}.$$

Widzimy stąd, iż wszystkie A_n^p, przy stałem p a dowolnem n, są funkcyami tylko $2p-1$ z pomiędzy nich, mianowicie wszystkie zależą tylko od $A_p^2, A_p^3, \dots, A_p^{2p}$.

Możemy teraz uporządkować wyrazy rozwinięcia (14) według potęg wielkości $\frac{1}{\alpha}$.

Otrzymamy, na mocy (14), (16) i (21):

$$\mathcal{E}_1(\alpha, x) = \sum_p \frac{1}{\alpha^p} \sum_n \frac{A_p^n x^n}{n!} = \sum_p \frac{1}{\alpha^p} \psi_p(x),$$

gdzie

$$\psi_p(x) = \sum_n \frac{A_p^n x^n}{n!} = a_2^p \sum_n \frac{x^n}{(n-2)!} + a_3^p \sum_n \frac{x^n}{(n-2)!} + \dots$$

$$\dots + a_{2p}^p \sum \frac{x^n}{(n-2p)!} = e^x \{a_2^p x^2 + a_3^p x^3 + \dots + a_{2p}^p x^{2p}\}$$

$$= \psi_p(x) = e^x \cdot \varphi_p(x),$$

gdzie

$$\varphi_p(x) = a_2^p x^2 + a_3^p x^3 + \dots + a_{2p}^p x^{2p}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy rozwinięcie (20). Zbieżność tego rozwinięcia dla $|\alpha| > 1$ wynika z rozważań, podanych w ustępie l. 14.

16. Z rozwinięcia (20) wynika uogólnienie wyniku, podanego w rozdziale pod l. 12. Granicą funkcyi $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$, gdy moduł liczby zespolonej α rośnie nieograniczenie, jest funkcya wykładnicza e^x. Tu nie tylko α, ale i x może być liczbą zespoloną. Czyli $\lim\limits_{|\alpha|=\infty} \mathcal{E}_1(\alpha, x) = e^x$.

Możemy dojść do rozwinięcia (20) jeszcze inną drogą, która da nam możność obliczania wielomianu $\varphi_p(x)$ przy pomocy wzoru zwrotnego.

Połóżmy, jak poprzednio,

$$\varphi_p(x) = a_2^p x^2 + a_3^p x^3 + \dots + a_{2p}^p x^p.$$

Dalej niech będzie

$$R_n(x) = 2 a_2^{n-1} x + (a_2^{n-2} + 3 a_3^{n-2}) x^2 \dots + \{a_r^{n-r} + (r+1) a_{r+1}^{n-r}\} x^r + \dots$$

przyczem $r \leqslant \frac{2n-1}{3}$; tak więc $R_n(x)$ jest wielomianem stopnia $E\left(\frac{2n-1}{3}\right)$.

Podstawiając w równanie funkcyjne

$$\mathcal{E}_1'(\alpha, x) = \mathcal{E}_1(\alpha, x) \cdot \mathcal{E}_1'\left(\alpha, \frac{x}{\alpha}\right) \tag{2}$$

rozwinięcie (20) i utożsamiając spółczynniki jednakowej potęgi względem

$\frac{1}{\alpha}$ w obu stronach równości (2), znajdziemy:

$$\varphi_p'(x) = \sum{}' \frac{x^r}{r!} \cdot \varphi_m(x) \cdot R_n(x), \tag{22}$$

gdzie symbol Σ' oznacza sumę, rozciągniętą na wszystkie wartości wskaźników r, m, n, spełniających warunek $m + n + r = p$, przytem układ wartości $m = p$, $n = 0$, $r = 0$ jest wykluczony; $\varphi_p'(x)$ zaś oznacza pochodną wielomianu $\varphi_p(x)$.

Znajdziemy w ten sposób, iż:

$$R_0 = 1, \quad R_2 = 0, \quad R_2 = x, \quad R_3 = x + \frac{x^2}{2},$$

$$R_4 = x + x^2, \quad R_5 = x + 2x^2 + \frac{2}{3}x^3,$$

$$R_6 = x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4, \ldots \quad \text{i t. d.}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8}, \quad \varphi_3(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{7}{24}x^4 + \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{48},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{8}x^4 + \frac{41}{120}x^5 + \frac{7}{72}x^6 + \frac{x^7}{48} + \frac{x^8}{384}, \ldots \quad \text{i t. d.}$$

Wzór (22) ma charakter wzoru zwrotnego, i pozwala kolejno obliczać wielomiany $\varphi_p(x)$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$ i t. d. Wielomian $\varphi_p(x)$ otrzymamy, o ile znajdziemy wprzód wszystkie poprzednie, t. j. wszystkie o wskaźnikach mniejszych niż p.

RÉSUMÉ.

Dans un article précedent: „Sur un mode de croissance, différent de la croissance exponentielle". Prace Mat. Fiz. t. XXVIII, j'ai défini une fonction entière $\mathcal{E}(\alpha, x)$ et je l'ai etudié au point de vue de la croissance. Cette fonction entière dépend d'un paramètre $\alpha > 1$. Dans l'article présent je me suis proposé d'étudier de quelle façon la fonction $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ dépend de ce paramètre Je démontre dans cet ordre d'idées en particulier que: 1) $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ est une fonction décroissante du paramètre α, x restant constant, 2) Quand

le paramètre α augmente indéfiniment, la fonction $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ admet comme limite la fonction exponentielle e^x. 3) Quand le paramètre α tend vers l'unité, la courbe, définie par l'équation $y = \mathcal{E}_1(\alpha, x)$, tend vers une ligne brisée, formée par deux demi-droites rectangulaires.

Tous ces résultats concernent uniquement le cas, où les valeurs des variables x et α sont réelles. En passant, cependant, je démontre certains résultats, concernant le cas, où les variables α et x sont imaginaires, à savoir:

1) Quand α est réelle et x imaginaire, je démontre que la série

$$\mathcal{E}_1(1 + x) = x - \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{x^2}{2!} + \frac{\alpha^2(2\alpha + 1)}{(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)} \cdot \frac{x^3}{3!} - \ldots,$$

analogue à la série

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

et définissant une branche de la fonction inverse, est convergente à l'intérieur du cercle $|x| = \frac{\alpha - \beta}{\alpha}$,

2) Quand α et x sont imaginaires, on a toujours

$$\lim_{|\alpha| = \infty} \mathcal{E}_1(\alpha, x) = e^x,$$

3) La fonction $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ considérée comme fonction de la variable α est holomorphe à l'éxtérieur du cercle de rayon un, et la fonction $\mathcal{E}_1(\alpha, x)$ est developpable en une série suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\alpha}$ de la forme

$$\mathcal{E}_1(\alpha, x) = e^x \cdot \left\{1 + \frac{\varphi_1(x)}{\alpha} + \frac{\varphi_2(x)}{\alpha^2} + \ldots + \frac{\varphi_p(x)}{\alpha^p} + \ldots\right\},$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ étant des polynômes en x, le polynôme $\varphi_p(x)$ — de degré $2p$. La convergence a lieu pour x quelconque et $|\alpha| > 1$.