W. SIERPIŃSKI.

Czy „Basis“ Hamela jest mierzalna?

La „base“ de M. Hamel est — elle mesurable?

Przez „Basis“ Hamela rozumiemy mnogość (nieprzeliczalną) $\mathfrak{B}$ liczb rzeczywistych, różnych od zera $a, b, c, \ldots$, taką, iż każda liczba rzeczywista x daje się i to w jeden tylko sposób przedstawić w postaci:

$$x = \alpha a + \beta b + c\gamma + \ldots, \tag{1}$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ są liczby wymierne, z pośród których w każdym poszczególnym przypadku conajwyżej skończona liczba jest różnych od zera.

G. Hamel udowodnił (opierając się na twierdzeniu Zermelo), że takie mnogości $\mathfrak{B}$ istnieją [1].

Okażemy, że Basis Hamela może być mierzalna w znaczeniu Lebesgue'a.

Oznaczmy przez X zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x postaci

$$x = c_0 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_3}{2^3} + \frac{c_5}{2^5} + \ldots,$$

gdzie c_0 jest liczbą całkowitą, zaś $c_1, c_3, c_5, \ldots$ są liczby 0 lub 1, przez Y zaś oznaczmy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych y postaci

$$y = \frac{c_2}{2^2} + \frac{c_4}{2^4} + \frac{c_6}{2^6} + \ldots,$$

gdzie $c_2, c_4, c_6, \ldots$ są liczby 0 lub 1.

Jak łatwo obliczyć, zbiory X i Y będą miary zero. Łatwo też widzieć, że każda liczba rzeczywista z daje się przedstawić w postaci:

$$z = x + y,$$

gdzie x jest liczbą zbioru X, zaś y—liczbą zbioru Y.

[1]) Mathematische Annalen, 60, p, 459.

Połóżmy $S=X+Y$: będzie to oczywiście zbiór miary zero. W myśl twierdzenia Zermelo istnieje zbiór dobrze uporządkowany G, utworzony ze wszystkich elementów zbioru S. Niech b_1 oznacza pierwszy różny od zera element zbioru G, b_2—pierwszy element zbioru G, nie będący postaci $w_1 b_1$, gdzie w_1 jest liczbą wymierną, b_3—pierwszy element zbioru G, nie będący postaci $w_1 b_1 + w_2 b_2$, gdzie w_1 i w_2 są liczby wymierne. Ogólnie, niech α oznacza liczbę porządkową i przypuśćmy, żeśmy już wyznaczyli liczby b_λ, dla $\lambda<\alpha$. Oznaczmy przez b'_α pierwszy element zbioru G, który nie daje się przedstawić w postaci:

$$w_1 b_1 + w_2 b_2 + \ldots + w_\lambda b_\lambda + \ldots \quad (\lambda<\alpha),$$

gdzie w_λ $(\lambda<\alpha)$ są liczby wymierne, z pośród których conajwyżej skończona liczba jest różnych od zera. (Gdyby przy pewnem α element taki b_α w zbiorze G nie istniał, proces wyznaczania liczb b_λ byłby zakończony).

Oznaczmy przez $\mathfrak{B}$ wyznaczony w ten sposób zbiór liczb b_α. Łatwo widzieć, że każda liczba zbioru G daje się przedstawić w postaci

$$w_1 b_1 + w_2 b_2 + \ldots + w_\alpha b_\alpha + \ldots, \tag{2}$$

gdzie $w_1, w_2, \ldots, w_\alpha, \ldots$ są spółczynniki wymierne, zpośród których conajwyżej skończona liczba jest różnych od zera. Stąd i z uwagi, że każda liczba rzeczywista z daje się przedstawić w postaci $z=x+y$, gdzie x i y są liczby zbioru G, wnosimy dalej, że każda liczba rzeczywista z daje się przedstawić w postaci (2).

Gdyby pewna liczba rzeczywista z_0 dawała dwa różne rozwinięcia

$$z_0 = w'_1 b_1 + w'_2 b_2 + \ldots + w'_\alpha b_\alpha + \ldots = w_1'' b_1 + w''_2 b_2 + \ldots + w''_\alpha b_\alpha + \ldots,$$

gdzie w'_α i w''_α są spółczynniki wymierne, z pośród których conajwyżej skończona liczba jest różnych od zera, to mielibyśmy przy pewnych, różnych od zera, wymiernych $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, oraz pewnych różnych $a, b, \ldots l$, należących do $\mathfrak{B}$ i wziętych w liczbie skończonej, równość

$$\alpha a + \beta b + \ldots + \lambda l = 0,$$

co, jak to z łatwością wynika z budowy zbioru $\mathfrak{B}$, jest niemożliwe.

Każda liczba rzeczywista z daje się więc, i to w jeden tylko sposób, przedstawić w postaci (2), co dowodzi, że zbiór $\mathfrak{B}$ jest „Basis" Hamela zbioru wszystkich liczb rzeczywistych. Z drugiej strony, zbiór $\mathfrak{B}$, jako część zbioru S, jest miary zero. Dowiedliśmy więc (przy pomocy twierdzenia Zermelo), że istnieje „Basis" Hamela miary zero.

Z drugiej strony można z łatwością udowodnić, że każda „Basis" Hamela, która jest mierzalna w znaczeniu Lebesgue'a, musi być miary zero.

Załóżmy bowiem, że Basis $\mathfrak{B}$ jest miary dodatniej. Zbiór Z wszystkich liczb $\frac{b}{b_1}$, gdzie b_1 oznacza daną, zaś b—dowolną liczbę zbioru $\mathfrak{B}$, byłby więc miary dodatniej (jako podobny zbiorowi $\mathfrak{B}$). Lecz można z łatwością udowodnić, że w każdym zbiorze o mierze dodatniej istnieją dwa różne elementy, mające wymierną odległość [1]: niech $\frac{b'}{b_1}$ i $\frac{b''}{b_1}$ będą takie właśnie dwa elementy zbioru Z: mielibyśmy więc przy pewnem wymiernem $w \neq 0$:

$$b' - b'' = b_1 w,$$

co jest niemożliwe dla liczb b' i b'' zbioru $\mathfrak{B}$.

Ogólniej, możnaby również łatwo dowieść, że miara wewnętrzna każdej Basis Hamela jest zerem.

C. Burstin dowiódł istnienia Basis Hamela, posiadającej punkty wspólne z każdą mnogością doskonałą [2]. Basis taka nie może być miary zero (gdyż dopełnienie każdej mnogości miary zero zawiera mnogość doskonałą): w myśl dowiedzionego wyżej twierdzenia musi zatem być niemierzalna. Istnieje więc Basis Hamela, będąca mnogością niemierzalną w znaczeniu Lebesgue'a.

Godnem uwagi jest jednak, że, niezależnie od tego, czy Basis $\mathfrak{B}$ jest mierzalna, czy nie, zbiór wszystkich tych liczb rzeczywistych x, których rozwinięcie (1) nie zawiera danej liczby a, należącej do Basis, jest niemierzalny (L). W samej rzeczy, oznaczmy ten zbiór przez A, zaś przez $A\,(aw)$—zbiór, powstały ze zbioru A przez jego przesunięcie (w kierunku dodatnim) o długości aw. Jak łatwo widzieć, suma zbiorów $A(aw)$, rozciągnięta na wszystkie liczby wymierne w, daje zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, skąd wnosimy, że zbiory $A\,(a\,w)$ nie mogą być miary zero. Gdyby jednak zbiór A był miary dodatniej, to byłby nim też zbiór wszystkich liczb $\frac{x}{a}$, gdzie x oznacza

[1]) Jeżeli bowiem zbiór Z jest miary dodatniej, to istnieje przedział skończony (o długości δ), zawierający część Z_1 zbioru Z, będącą miary dodatniej μ. Gdyby żadne dwa elementy zbioru Z_1 nie posiadały wymiernej odległości, to zbiory $Z_1\left(\frac{1}{n}\right)$, powstałe przez przesunięcie zbioru Z_1 o długość $\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, nie miałyby, jak łatwo widzieć, elementów wspólnych, i przystawałyby do Z_1. Zbiór $Z_1\,(1) + Z_1\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots$, leżący w przedziale skończonym (o długości $\delta+1$) miałby więc miarę nieskończoną $\mu+\mu+\ldots$, co niemożliwe.—Por. moją notatkę: „Sur un problème de M. Lusin" Giornale di Matematiche, 1917.

[2]) C. Burstin: Die Spaltung des Kontinuums in c in L. Sinne nichtmessbare Mengen. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien. Math.-nat. Kl. Abt IIa, Bd. 125 (1916).

cza jakąkolwiek liczbę zbioru A, i mielibyśmy przy pewnych x' i x'', należących do A, oraz pewnem wymiernem w:

$$\frac{x'}{a} - \frac{x''}{a} = w,$$

czyli $x' = aw + x''$, co niemożliwe.

Moglibyśmy jeszcze powiedzieć: Z istnienia Basis Hamela wynika istnienie mnogości niemierzalnych, przyczem, gdybyśmy mieli przykład efektywny Basis Hamela, to mielibyśmy również przykład efektywny mnogości niemierzalnej, o ilebyśmy potrafili w owej Basis wskazać jeden element. Możnaby też udowodnić, że z istnienia Basis Hamela wynika bez pomocy pewnika Zermelo istnienie mnogości niemierzalnych[1].

Okażemy obecnie, że każda Basis Hamela jest niemierzalna w znaczeniu Borela. Dowód nasz będzie oparty na pewnych własnościach tak zwanych zbiorów (A), wprowadzonych przez Suslina i Łuzina (Comptes Rendus, t. 164, noty z dn. 8 stycznia 1917). (Zbiory (A) linjowe są to te mnogości, które są rzutami prostokątnemi mnogości płaskich mierzalnych (B) na linję prostą; podobnież, zbiory (A) płaskie są to te mnogości, które są rzutami prostokątnemi mnogości przestrzennych mierzalnych (B) na płaszczyznę).

Lemmat. Jeżeli X i Y są zbiory (A) (linjowe), to zbiór Z wszystkich sum $x+y$, gdzie x jest jakąkolwiek liczbą zbioru X, zaś y — jakąkolwiek liczbę zbioru Y, jest również zbiorem (A).

Dowód. Przez każdy punkt x mnogości X (umieszczonej na osi X-ów) poprowadźmy równoległą do osi Y-ów: zbiór R_1 wszystkich tych równoległych będzie oczywiście zbiorem (A) (płaskim). Umieśćmy teraz zbiór Y na osi Y-ów i poprowadźmy przez każdy punkt y zbioru Y równoległą do osi X-ów: zbiór R_2 tych równoległych będzie również zbiorem (A). Iloczyn $P = R_1 R_2$ będzie więc także zbiorem (A). Z drugiej strony iloczyn ten jest oczywiście zbiorem wszystkich punktów (x, y), gdzie x należy do X, zaś y do Y. Zbiór Z wszystkich sum $x+y$, gdzie x należy do X, zaś y do Y, będzie oczywiście odwzorowaniem jednoznacznem i ciągłem zbioru P (zapomocą funkcji $f(x, y) = x+y$): ponieważ zaś odwzorowanie jednoznaczne i ciągłe zbioru (A) daje zbiór (A)[2], więc Z jest zbiorem (A), c. b. d. o.

[1]) Podany przez nas dowód należałoby jednak w tym celu nieco zmodyfikować, gdyż opiera się on na twierdzeniu, że suma przeliczalnej mnogości zbiorów miary zero jest zbiorem miary zero, twierdzeniu, którego nie potrafimy udowodnić, nie odwołując się do pewnika Zermelo.

[2]) Zob. moją pracę: „Sur une généralisation des ensembles mesurables B". Biuletyn Akademji Krakowskiej. Czerwiec, 1918. Dowód jest tam przeprowadzony tylko dla mnogości linjowych; modyfikując go nieco, możnaby go jednak z łatwością rozciągnąć na mnogości w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów.

Wniosek I. Jeżeli X i Y są zbiory (A) (linjowe), to zbiór wszystkich liczb $\alpha x + \beta y$, gdzie α i β są liczby wymierne, x należy do X, y do Y, jest zbiorem (A).

Dowód. Skoro X jest zbiorem (A), to zbiór wszystkich liczb αx, gdzie α jest wymierne, zaś x należy do X, jest zbiorem (A) (jako suma przeliczalnej mnogości zbiorów A)). Podobnież zbiór wszystkich liczb βy, gdzie β jest wymierne, zaś y należy do Y, jest zbiorem (A). Stąd, w myśl naszego lemmatu, wnosimy, że zbiór wszystkich liczb $\alpha x + \beta y$ jest zbiorem (A), c. b. d. o.

Drogą łatwej indukcji otrzymujemy stąd

Wniosek II. Jeżeli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są zbiory (A), to zbiór wszystkich liczb $w_1 x_1 + w_2 w_2 \ldots + w_n x_n$, gdzie $w_k (k = 1, 2, \ldots n)$ są liczby wymierne, zaś x_k należy do X_k (dla $k = 1, 2, \ldots n$), jest zbiorem (A).

Załóżmy teraz, że Basis $\mathfrak{B}$ jest zbiorem (A) i przyjmijmy w dowiedzionym wniosku w szczególności $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = \mathfrak{B}$. Oznaczając przez P_n zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które w rozwinięciu (1) mają conajwyżej n spółczynników różnych od zera, będziemy więc mogli powiedzieć, że P_n jest zbiorem (A).

W szczególności, P_1 jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych postaci wb, gdzie w jest liczbą wymierną, zaś b — liczbą zbioru $\mathfrak{B}$, zatem $P_1 = \Sigma P_1(w)$, gdzie $P_1(w)$ oznacza (przy danem w) zbiór wszystkich liczb postaci wb, sumowanie zaś rozciąga się na wszystkie liczby wymierne w. Skoro $\mathfrak{B}$ jest, jak zakładamy, zbiorem (A), więc $\mathfrak{B}$ jest zbiorem mierzalnym (L) (gdyż, jak dowiedliśmy wraz z Łuzinem, każdy zbiór (A) jest mierzalny (L)[1]. Wyżej jednak dowiedliśmy, że jeżeli Basis $\mathfrak{B}$ jest mierzalna (L), to musi być miary zero. Każdy ze zbiorów $P_1(w)$ (jako w-krotne zwiększenie zbioru $\mathfrak{B}$) jest więc miary zero, i przeto zbiór P_1 (jako suma przeliczalnej mnogości zbiorów $P_1(w)$) jest miary zero.

Załóżmy teraz, że (przy danem naturalnem n) P_n jest miary zero. Niech b_0 oznacza daną liczbę zbioru $\mathfrak{B}$. Oznaczmy przez $Q(w)$ zbiór tych wszystkich liczb x zbioru P_{n+1}, które w rozwinięciu (1) dają przy b_0 spółczynnik w. Zbiór $Q = \Sigma Q(w)$, gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie liczby wymierne w różne od zera, będzie więc zbiorem wszystkich tych liczb x zbioru P_{n+1}, które w rozwinięciu (1) zawierają liczbę b_0. Niech w oznacza daną liczbę wymierną $\neq 0$, x — dowolną liczbę zbioru $Q(w)$: liczba $x - wb_0$ będzie oczywiście należała do zbioru P_n, który jest miary zero. Wnosimy stąd, że zbiór $Q(w)$ (jako przesunięcie zbioru P_n) jest miary zero (przy wymiernem $w \neq 0$), skąd wynika, że zbiór $Q = \Sigma Q(w)$ jest miary zero. Jeżeli więc zbiór P_{n+1} jest miary dodatniej, to zbiór $P_{n+1} - Q$, czyli zbiór wszystkich tych liczb x zbioru P_{n+1}, które w rozwi-

[1]) N. Lusin et W. Sierpiński. „Sur quelques propriétés des ensembles (A)". Biuletyn Akademji Krakowskiej, Kwiecień, 1918.

nięciu (1) nie zawierają liczby b_0, jest miary dodatniej. Lecz w takim razie i zbiór wszystkich liczb $\frac{x}{b_0}$, gdzie x należy do $P_{n+1} - Q$, jest miary dodatniej: wnosimy stąd, że istnieją liczby x' i x'' zbioru $P_{n+1} - Q$, takie iż $\frac{x'}{b_0} - \frac{x''}{b_0} = w$, gdzie w jest liczbą wymierną$\neq 0$. Mielibyśmy stąd $b_0 = \frac{x' - x''}{w}$, i liczba b_0 wyrażałoby się linjowo i wymiernie przez skończoną liczbę różnych od b_0 liczb zbioru $\mathfrak{B}$, co niemożliwe.

Jeżeli więc zbiór P_n jest miary zero, to i zbiór P_{n+1} jest miary zero. Stąd, przez indukcję, wnosimy, że każdy ze zbiorów P_n jest miary zero. Jest to jednak niemożliwe, gdyż $P_1 + P_2 + \dots$ jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.

Zbiór $\mathfrak{B}$ nie jest więc zbiorem (A) i, tembardziej, nie jest mierzalny (B), c.b.d.o.

Zauważymy, że gdybyśmy założyli, że zachodzi twierdzenie T: „Jeżeli X i Y są zbiory mierzalne (L) (linjowe), to zbiór wszystkich sum $x+y$, gdzie x należy do X, zaś y do Y, również jest zbiorem mierzalnym (L)", to, rozumując jak wyżej, doszliśmy do wniosku, że zbiór $\mathfrak{B}$ nie jest mierzalny (L), co, jak wiemy, nie jest prawdą, gdyż zbiór $\mathfrak{B}$ może być mierzalny (L). Wnosimy stąd, że twierdzenie T nie jest prawdziwe. Innemi słowy:

Istnieją zbiory (linjowe) X i Y, oba mierzalne (L), takie, iż zbiór wszystkich sum $x+y$, gdzie x należy do X, zaś y do Y, nie jest mierzaln (L).

ROMUALD WITWIŃSKI

lieutenant de cavalerie.

Sur certaines surfaces généralisant les surfaces minima.

O pewnych powierzchniach, które są uogólnieniem powierzchni minimalnych.

---

1. L'une des formules les plus remarquables de la théorie des surfaces, en coordonnées tangentielles, est certainement celle qui donne l'expression de la somme des rayons principaux de courbure R et R'; l'importance de cette expression découle de sa forme linéaire par rapport à la fonction qui individualise la surface et par rapport aux dérivées des deux premiers ordres de cette fonction.

Les axes sont rectangulaires; suivant les cas, dans lesquels existe ou non une direction ou un axe privilégié (un axe de révolution, par exemple), il y a lieu d'utiliser l'une ou l'autre des équations

$$X \cos\varphi \cos\psi + Y \cos\varphi \sin\psi + Z \sin\varphi = \bar{\omega},$$

$$u(X - iY) + v(X + iY) + (uv - 1)Z = (uv + 1)\bar{\omega},$$

pour représenter le plan tangent. Ou a alors l'une ou l'autre des expressions

$$R + R' = 2\bar{\omega} - \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \psi^2}, \tag{1}$$

$$R + R' = 2\bar{\omega} + (1 + uv)^2 \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial u \, \partial v}. \tag{2}$$

La seconde des ces expressions a été utilisée dans l'étude de certaines classes de surfaces, telles que les surfaces minima, les surfaces de M. Appell et les surfaces de M. Goursat. Je vais appliquer les relations précédentes