ANTONI PLAMITZER.

O wieloznacznych odpowiedniościach inwolucyjnych na jednobieżnych podstawach.

(Sur les correspondances involutives $[n]$ aux supports unicursales).

Odpowiednością inwolucyjną $[n]$, zachodzącą pomiędzy jednoimiennemi elementami (punktami, prostemi, płaszczyznami) jednobieżnego utworu, nazywamy taką odpowiedniość $[n, n]$—znaczną, w której każdemu elementowi—bez względu na to, do którego utworu go zaliczymy — odpowiada n tych samych elementów.

W pracy niniejszej badam własności odpowiedniości inwolucyjnych $[n]$ na jednobieżnych podstawach, oraz krzywe płaskie, stożki i powierzchnie skośne $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$-go rodzaju, jako utwory takich odpowiedniości. W dalszym ciągu omawiam własności kompleksu promieni, przecinających elementy homologiczne odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$, zachodzącej pomiędzy tworzącemi jednobieżnej powierzchni prostolinjowej, wzgl. stycznemi krzywej skośnej.

Zauważyć należy, że poprzednio ogłoszona praca[1]) jest szczególnym przypadkiem niniejszej rozprawy, gdyż inwolucja stopnia n i gatunku pierwszego jest szczególną odpowiedniością inwolucyjną $[n-1]$, w której dwa elementy — odpowiadające temu samemu elementowi — są również elementami odpowiadającemi sobie.

1. Pomiędzy punktami jednobieżnej krzywej C^ν rzędu ν, leżącej na płaszczyźnie ε, ustalmy odpowiedniość inwolucyjną $[n]$. Na płaszczyźnie ε obierzmy nadto dowolny stały punkt P_0 i zbadajmy, ile promieni pęku o wierzchołku P_0 przechodzi przez dwa odpowiednie punkty przyjętej odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$.

[1]) Antoni Plamitzer, O inwolucyjnych utworach inwolucyj pierwszego gatunku na jednobieżnych podstawach „Wiadomości matematyczne". T. XXIII. Warszawa 1919.

Dowolnemu punktowi A krzywej C^ν odpowiada n punktów A' tej krzywej. Promienie $P_0 A'$, łączące wierzchołek P_0 z n punktami A', przecinają krzywą C^ν w $n(\nu-1)$ dalszych punktach A^*. Elementowi A podporządkujmy $n(\nu-1)$ punktów A^*. Prosta $P_0 A^*$, przechodząca przez jeden z owych punktów A^*, przecina krzywą C^ν w $(\nu-1)$ dalszych punktach $A', B', \ldots$ Elementowi A^* podporządkujmy $n(\nu-1)$ punktów $A, \ldots, B, \ldots$, krzywej C^ν, które odpowiadają elementom $A', B', \ldots$ Z łatwością zauważymy, że dla $A = A^*$ otrzymamy promień AA' pęku o wierzchołku P_0, który przechodzi przez dwa homologiczne elementy A i A' odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$. Skonstruowana w powyższy sposób odpowiedniość $[n(\nu-1), n(\nu-1)]$ pomiędzy punktami krzywej jednobieżnej C^ν posiada $2n(\nu-1)$ elementów zjednoczonych, przez które przechodzą szukane promienie pęku o wierzchołku P_0. Ponieważ jednak każdy taki przez P_0 przechodzący promień AA' zawiera dwa różne punkty zjednoczone A i A' skonstruowanej powyżej odpowiedniości, przeto wykazaliśmy prawdziwość dwoiście związanych twierdzeń:

Odpowiedniość inwolucyjna $[n]$, zachodząca pomiędzy punktami (wzgl. stycznemi) ogólnej jednobieżnej krzywej płaskiej rzędu ν (klasy ν), posiada tę własność, że przez każdy punkt (na każdej prostej) płaszczyzny tej krzywej przechodzi $n(\nu-1)$ prostych, które łączą pary (wzgl. leży $n(\nu-1)$ punktów przecięcia się par) odpowiednich punktów (stycznych) uważanej odpowiedniości.

Zupełnie analogicznie dowieść możemy, że:

Odpowiedniość inwolucyjna $[n]$, zachodząca pomiędzy punktami (wzgl. płaszczyznami stycznemi) ogólnej jednobieżnej krzywej skośnej rzędu ν (powierzchni rozwijalnej klasy ν), posiada tę własnośc, że dowolnie przyjęta prosta przecina $n(\nu-1)$ prostych, łączących pary odpowiednich punktów (przecięcia się par homologicznych płaszczyzn) uważanej odpowiedniości.

2. Przyjmijmy stałą prostą p_0, oraz ogólną jednobieżną powierzchnię prostolinjową (skośną, rozwijalną) rzędu ν, wzgl. krzywą skośną porządku ν Φ^ν. Pomiędzy tworzącemi (stycznemi) podstawy Φ^ν ustalmy odpowiedniość inwolucyjną $[n]$ i zbadajmy kongruencję promieni, przecinających p_0 i pary homologicznych elementów tejże odpowiedniości.

W celu wyznaczenia klasy tej kongruencji, przetnijmy powierzchnię Φ^ν dowolną płaszczyzną ε w krzywej C^ν i podporządkujmy każdej tworzącej podstawy Φ^ν punkt przebicia się tej tworzącej z płaszczyzną ε. W ten sposób skonstruowana odpowiedniość inwolucyjna $[n]$ pomiędzy punktami krzywej C^ν posiada $n(\nu-1)$ par odpowiednich punktów (ust. 1), które wyznaczają proste, przechodzące przez punkt p_0 ε przebicia się promienia p_0 z płaszczyzną ε. Na dowolnej płaszczyźnie ε wyznaczyliśmy tedy $n(\nu-1)$ promieni badanej kongruencji, która jest zatem $n(\nu-1)$-ej klasy. Na mocy tego i dwoiście z nim związanego rozumowania, dochodzimy do następujących twierdzeń:

Promienie, które przecinają dowolnie przyjętą prostą oraz pary homologicznych elementów odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$ — zachodzącej pomiędzy tworzącemi (stycznemi) ogólnej jednobieżnej powierzchni prostolinjowej rzędu ν (krzywej skośnej porządku ν) — utworzą kongruencję promieni klasy i rzędu $n(\nu-1)$.

3. Przyjmijmy znowu odpowiedniość inwolucyjną $[n]$, zachodzącą pomiędzy tworzącemi (stycznemi) ogólnej jednobieżnej powierzchni prostolinjowej rzędu ν (krzywej skośnej porządku ν) i wyznaczmy liczbę takich par homologicznych elementów tej odpowiedniości, z których każda para przecina się w jednym punkcie.

Jeżeli podstawa Φ^ν jest powierzchnią skośną wzgl. rozwijalną (ale nie jest powierzchnią stożkową), to wówczas[1]) każda tworząca przecina $(\nu-2)$ dalsze tworzące, wzgl. dwie bezpośrednio po sobie następujące i $(\nu-4)$ dalsze tworzące tej powierzchni. Dowolnej tworzącej a powierzchni Φ^ν odpowiada n tworzących a' podstawy Φ^ν, które przecinają $n(\nu-2)$ tworzących a^* tejże powierzchni. Promieniowi a podporządkujmy $n(\nu-2)$, elementów a^*. Każda prosta a^* przecina $(\nu-2)$ tworzących $a', b', \ldots$ powierzchni Φ^ν, a odpowiadające im $n(\nu-2)$ tworzące $a, \ldots b, \ldots$ podstawy Φ^ν podporządkujmy elementowi a^*. Z łatwością zauważymy, że dla $a \equiv a^*$ otrzymamy parę przecinających się tworzących a i a' powierzchni Φ^ν, które są elementami homologicznemi przyjętej odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$. Ponieważ jednak każdą z tworzących a i a' uważać możemy za element zjednoczony skonstruowanej powyżej odpowiedniości $[n(\nu-2), n(\nu-2)]$ pomiędzy tworzącemi powierzchni Φ^ν, przeto:

W odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$, zachodzącej pomiędzy tworzącemi (stycznemi) ogólnej jednobieżnej powierzchni prostolinjowej rzędu ν (krzywej skośnej porządku ν), istnieje w ogólności $n(\nu-2)$ par takich elementów odpowiednich, z których każda para przecina się w jednym punkcie.

[1]) Dr. L. Cremona, Grundzüge einer allgem. Theorie der Oberflächen in synth. Behandlung (deutsch von Curtze) Berlin 1870. Nr. 55, Nr. 13.

4. Przyjmijmy ogólny jednobieżny utwór Γ (a mianowicie: krzywą płaską lub skośną, powierzchnię rozwijalną, wzgl. stożkową) za podstawę odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$, zachodzącej pomiędzy jednoimiennemi elementami (punktami, stycznemi, płaszczyznami stycznemi i płaszczyznami ściślestycznemi) — to utworem Ψ homologicznych elementów tej odpowiedniości będzie krzywa płaska, powierzchnia stożkowa, wzgl. powierzchnia skośna.

Aby wyznaczyć rodzaj utworu Ψ, ustalmy pomiędzy jednoimiennemi elementami $\alpha, \alpha', \ldots$ jednobieżnej podstawy Γ i punktami dowolnej stożkowej C^2 odpowiedniość $[1,1]$ — znaczną J. Odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$ o podstawie Γ oraz jej elementom zjednoczonym odpowie — na mocy przekształcenia J — na stożkowej C^2 taka sama odpowiedniość inwolucyjna $[n]$ i jej punkty zjednoczone. Skonstruowana w ten sposób odpowiedniość inwolucyjna $[n]$ pomiędzy punktami stożkowej C^2 utworzy [1] w ogólności krzywą D klasy n rzędu $n(n-1)$ i rodzaju $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Homologicznym elementom α i α' odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$ o podstawie Γ, które wyznaczają element $\alpha\alpha'$ utworu Ψ, — odpowiedzą (na mocy przekształcenia J) dwa ściśle oznaczone punkty A i A' stożkowej C^2, wyznaczające styczną AA' krzywej D. Podporządkujmy teraz każdemu elementowi $\alpha\alpha'$ utworu Ψ jedną ściśle oznaczoną styczną AA' krzywej D, to również każdej stycznej AA' krzywej D odpowiada jeden i tylko jeden element $\alpha\alpha'$ utworu Ψ. Z podstawowego twierdzenia Riemanna o równości rodzaju dwóch utworów, których elementy jedno-jednoznacznie sobie odpowiadają, wynika bezpośrednio, że utwór Ψ jest $\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$-go rodzaju.

Krzywe płaskie, powierzchnie stożkowe i powierzchnie skośne, jako utwory odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$, zachodzącej pomiędzy jednoimiennemi elementami ogólnych jednobieżnych utworów podstawowych, są rodzaju $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

5. Pomiędzy punktami ogólnej jednobieżnej krzywej płaskiej C^ν rzędu ν ustalmy odpowiedniość inwolucyjną $[n]$. Proste, łączące pary homologicznych punktów tej odpowiedniości, powłóczą krzywą K rodzaju $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Z ust. 1 wynika bezpośrednio, że krzywa K jest klasy $n(\nu-1)$, gdyż przez dowolny punkt P_0 (leżący na płaszczyźnie podsta-

[1]) Emil Weyr, Beiträge zur Kurvenlehre. Berlin 1880, str. 13.

wy C^ν) przechodzi $n(\nu-1)$ stycznych badanej krzywej [1]). Krzywa K jest zatem $2(n\nu-n-1)+(n-1)(n-2)$-go rzędu i posiada $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$ stycznych podwójnych. W ust. 6 podamy bezpośredni sposób obliczenia ilości stycznych podwójnych. A zatem:

Homologiczne elementy odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$, zachodzącej pomiędzy punktami (stycznemi) ogólnej jednobieżnej krzywej płaskiej rzędu ν (klasy ν), utworzą w ogólnym przypadku krzywą klasy (rzędu) $n(\nu-1)$, rzędu (klasy) $2(n\nu-n-1)+(n-1)(n-2)$ i rodzaju $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, która posiada $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$ stycznych (punktów) podwójnych.

Rzućmy krzywą K z dowolnego punktu przestrzeni, to otrzymamy powierzchnię stożkową klasy (rzędu) $n(\nu-1)$, rzędu (klasy) $2(n\nu-n-1)+(n-1)(n-2)$ i rodzaju $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, z $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$ płaszczyznami podwójnie stycznemi (tworzącemi podwójnemi) — jako utwór odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$, zachodzącej pomiędzy tworzącemi (płaszczyznami stycznemi) jednobieżnego stożka rzędu ν (klasy ν).

6. Przyjmijmy jeszcze raz jednobieżną krzywą płaską C^ν rzędu ν za podstawę odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$. Dowolnemu punktowi A krzywej C^ν odpowiada n punktów A' tej krzywej. Zbadajmy jak często punkt A i dwa odpowiadające mu elementy A' leżą na jednej prostej. Łącząc parami uważane punkty A', otrzymamy $\frac{1}{2}n(n-1)$ prostych AA', które przecinają krzywą C^ν w $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ dalszych punktach P. Punktowi A podporządkujmy $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ elementów P. — Jeżeli dwa punkty A' i A', odpowiadające jednemu elementowi A w odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$ o podstawie C^ν, uważamy za elementy homologiczne, to wówczas otrzymamy [2]) nową odpowiedniość inwolucyjną $[n(n-1)]$. Pęk promieni o wierzchołku P wyznacza na krzywej C^ν szereg inwolucyjny stopnia $(\nu-1)$ i gatunku pierwszego, który uważać możemy za odpowiedniość inwolucyjną $[\nu-2]$. Dwie skonstruowane w ten sposób odpowiednio-

[1]) Inny dowód podany w dziele R. Sturma, Geom. Verwadtschaften I Bd. Nr. 196.
[2]) Emil Weyr, l. c. str. 24.

ści inwolucyjne $[n(n-1)]$ i $[\nu-2]$ na jednobieżnej podstawie C^ν posiadają[1]) $n(n-1)(\nu-2)$ par wspólnych elementów, które wyznaczają tyleż prostych $A'A', B'B', \dots$ pęku o wierzchołku P. Przez P przechodzi zatem $n(n-1)(\nu-2)$ prostych $A'A', B'B', \dots$, łączących parami punkty $A', \dots B', \dots$ krzywej C^ν, które odpowiadają elementom $A, B, \dots$ na mocy odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$. Punktowi P podporządkujmy $n(n-1)(\nu-2)$ punktów $A, B, \dots$

Na jednobieżnej krzywej C^ν wyznaczyliśmy w ten sposób odpowiedniość $[\frac{1}{2}n(n-1)(\nu-2), n(n-1)(\nu-2)]$ o tej własności, że przez elementy zjednoczone $A \equiv P, \dots$ przechodzi $\frac{3}{2}n(n-1)(n-2)$ takich prostych, z których każda zawiera punkt A oraz dwa odpowiadające mu punkty A' i A' za pośrednictwem odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$.

Odpowiedniość inwolucyjna $[n]$, *zachodząca pomiędzy punktami (stycznemi) jednobieżnej krzywej płaskiej rzędu (klasy)* ν, *posiada* $\frac{3}{2}n(n-1)(\nu-2)$ *takich punktów (stycznych), z których każdy (każda) z dwoma odpowiadającemi elementami leży na jednej prostej (przecina się w jednym punkcie).*

Z łatwością zauważymy, że $\frac{3}{2}n(n-1)(\nu-2)$ prostych, z których każda zawiera trzy punkty A, A' i A' odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$, są stycznemi podwójnemi krzywej K, badanej w ust. 5. Aby otrzymać $\frac{1}{2}n^2(\nu-2)(\nu-3)$ dalszych stycznych podwójnych tej krzywej, zbadajmy ile razy dwie pary homologicznych punktów odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$ o podstawie C^ν_n leży na jednej prostej.

Przez dowolny punkt A podstawy C^ν przechodzi, oprócz n stycznych AA', jeszcze $n(\nu-2)$ dalszych stycznych $PP', RR', \dots$ krzywej K, które przecinają podstawę C^ν w punktach $A, P, P', R, R', \dots$ oraz w $n(\nu-2)(\nu-3)$ dalszych punktach Z. Elementowi A podporządkujmy $n^2(\nu-2)(\nu-3)$ punktów Z', które za pośrednictwem odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$ odpowiadają punktom Z. — Dowolnemu elementowi Z' odpowiada n punktów Z, a przez każdy z nich, oprócz n stycznych ZZ' przechodzi jeszcze $n(\nu-2)$ dalszych stycznych $PP', SS', \dots$ krzywej K; styczne te przecinają krzywą C^ν w $n(\nu-2)(\nu-3)$ punktach $A, B, \dots$ Dla n punktów

[1]) Rudolf Sturm, l. c. I Nr. 196.

Z otrzymamy $n^2(\nu-2)(\nu-3)$ takich punktów $A, B, \dots$, które niechaj odpowiadają elementowi Z'.

Skonstruowana w ten sposób odpowiedniość

$$[n^2(\nu-2)(\nu-3), n^2(\nu-2)(\nu-3)]$$

pomiędzy punktami jednobieżnej krzywej C^ν posiada $2n^2(\nu-2)(\nu-3)$ elementów zjednoczonych, przez które przechodzą proste, zawierające dwie pary homologicznych punktów odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$. Z łatwością zauważymy, że każda z takich prostych $AA' \equiv PP'$ zawiera cztery różne elementy zjednoczone A, A', P i P' wspomnianej wyżej odpowiedniości.

Odpowiedniość inwolucyjna $[n]$, *zachodząca pomiędzy punktami (stycznemi) jednobieżnej krzywej płaskiej rzędu (klasy)* ν, *posiada tę własność, że istnieje* $\frac{1}{2}n^2(\nu-2)(\nu-3)$ *takich prostych (punktów), z których każda zawiera (przez które przechodzi) po dwie pary homologicznych elementów tej odpowiedniości.*

7. Na ogólnej jednobieżnej krzywej skośnej R^ν rzędu ν przyjmijmy odpowiedniość inwolucyjną $[n]$, to proste, łączące homologiczne punkty, utworzą powierzchnię skośną Φ (ust. 4) rodzaju $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Ponieważ dowolna prosta (ust. 1) przecina $n(\nu-1)$ prostych, łączących pary homologicznych punktów uważanej odpowiedniości, przeto powierzchnia Φ jest $n(\nu-1)$-go stopnia. Skoro rzucimy poszczególne punkty krzywej R^ν z dowolnego punktu przestrzeni, to otrzymamy stożek, opisany na powierzchni Φ. Stożek ten (ust. 5) jest klasy $n(\nu-1)$, rzędu $2(n\nu-n-1)+$ $+(n-1)(n-2)$ i rodzaju $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, oraz posiada $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$ płaszczyzn podwójnie stycznych.

Możemy tedy wysłowić następujące twierdzenia:

Utworem odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$, *zachodzącej pomiędzy punktami (płaszczyznami stycznemi) ogólnej jednobieżnej krzywej skośnej rzędu* ν *(powierzchni rozwijalnej klasy* ν*), jest powierzchnia skośna* $n(\nu-1)$*-go stopnia,* $2(n\nu-n-1)+(n-1)(n-2)$-go porządku i $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$-go rodzaju.

Płaszczyzny podwójnie-styczne tej powierzchni tworzą powierzchnię rozwijalną klasy $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$.

Punkty podwójne tej powierzchni tworzą krzywą skośną rzędu $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$.

Podstawa odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$ jest n-krotną krzywą — (powierzchnią —) kierowniczą powierzchni skośnej Φ, gdyż przez każdy punkt A krzywej R^{ν} przechodzi n tworzących AA' powierzchni Φ.

8. Przyjmijmy ogólną jednobieżną powierzchnię prostolinjową (rozwijalną lub skośną) rzędu ν, względnie jednobieżną krzywą skośną porządku ν Φ^{ν}. Jeżeli pomiędzy tworzącemi (wzgl. stycznemi) podstawy Φ^{ν} ustalimy odpowiedniość inwolucyjną $[n]$, to proste, przecinające pary odpowiednich elementów, utworzą kompleks promieni.

Dowolną płaszczyzną ε przetnijmy powierzchnię Φ^{ν} w krzywej jednobieżnej C^{ν} rzędu ν i podporządkujmy każdej tworzącej a powierzchni Φ^{ν} punkt $a\varepsilon$ przebicia się tej tworzącej z płaszczyzną ε. W ten sposób skonstruowana odpowiedniość inwolucyjna $[n]$ pomiędzy punktami krzywej C^{ν} utworzy (ust. 5) na płaszczyźnie ε leżącą krzywą kompleksu $n(\nu-1)$-ej klasy z $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$ stycznemi podwójnemi. Z tego oraz dwoiście z niem związanego rozumowania wynika następujące twierdzenie:

Proste, które przecinają odpowiednie pary elementów odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$ — zachodzącej pomiędzy tworzącemi (stycznemi) ogólnej jednobieżnej powierzchni prostolinjowej rzędu ν (krzywej skośnej porządku ν) — utworzą w ogólnym przypadku kompleks promieni $n(\nu-1)$-go stopnia. Promienie podwójne tego kompleksu tworzą kongruencję prostych rzędu i klasy $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$.

Dowolnej tworzącej a powierzchni Φ^{ν} odpowiada — za pośrednictwem odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$ — n elementów a', oraz każdej prostej a' odpowiada element a i $(n-1)$ dalszych tworzących a''. Jeżeli płaszczyzna przecinająca ε przechodzi przez tworzącą a, to przecina proste a', a'' w punktach A', A'', a powierzchnię Φ^{ν} w jednobieżnej krzywej $C^{\nu-1}$ rzędu $(\nu-1)$. Krzywa kompleksu, leżąca na płaszczyźnie ε, rozpada się na n pęków promieni o wierzchołkach A', oraz (ust. 5) na krzywą $n(\nu-2)$-ej klasy z $\vartheta = \frac{1}{2}n[n(\nu-1)-3](\nu-1-2)$ stycznemi podwójnemi. Zauważmy nadto, że każda z $n(n-1)$ prostych $A'A''$ przecina promień a' oraz dwa odpowiadające mu elementy a i a''. Podobnie każda z $\frac{1}{2}n(n-1)$ prostych $A'A'$ przecina tworzącą a oraz dwie homologiczne promienie a' i a'. Proste $A'A''$ i $A'A'$ płaszczyzny ε są promieniami podwójnemi badanego kompleksu promieni.

Płaszczyzna $\varepsilon \equiv aa'$, przechodząca przez dwie odpowiednie tworzące a i a' powierzchni Φ^{ν}, jest płaszczyzną osobliwą naszego kompleksu. Każda prosta płaszczyzny ε jest promieniem kompleksu, gdyż przecina dwa homologiczne elementy a i a'. Krawędź przecięcia się dwóch płaszczyzn osobliwych przecina dwie pary odpowiednich tworzących powierzchni Φ^{ν} i jest promieniem podwójnym kompleksu. Z ust. 3 wynika bezpośrednio:

Pary przecinających się homologicznych elementów uważanej odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$ wyznaczają $n(\nu-2)$ płaszczyzn osobliwych i $n(\nu-2)$ punktów osobliwych badanego kompleksu promieni stopnia $n(\nu-1)$. Na każdej płaszczyźnie osobliwej leży ∞^2, oraz przez każdy punkt osobliwy przechodzi ∞^2 promieni kompleksu. Dwie płaszczyzny (dwa punkty) osobliwe wyznaczają promień podwójny kompleksu.

Płaszczyzna osobliwa $\varepsilon \equiv aa'$ przecina $2(n-1)$ tworzących a' i a', w punktach A', A'', a powierzchnię Φ^{ν} w krzywej jednobieżnej $C^{\nu-2}$ rzędu $(\nu-2)$. Odpowiedniość inwolucyjna $[n]$, zachodząca pomiędzy punktami podstawy $C^{\nu-2}$, utworzy (ust. 5) krzywą K_0 klasy $n(\nu-3)$ i rodzaju $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, która posiada $\vartheta_0 = \frac{1}{2}n(n\nu-2n-3)(\nu-4)$ stycznych podwójnych. Styczne krzywej K_0 i promienie $2(n-1)$ pęków o wierzchołkach A', A'', są elementami podwójnemi kompleksu. Na płaszczyźnie osobliwej ε leży $(n-1)^2$ prostych $A'A''$, z których każda przecina tworzącą a i dwie odpowiednie proste a', a', oraz na płaszczyźnie ε leżący promień a' i dwa homologiczne elementy a, a''. Płaszczyzna ε zawiera $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ prostych $A'A'$ oraz $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ prostych $A''A''$, z których każda przecina a (wzgl. a') i trzy odpowiednie elementy a', a', a' (wzgl. a'', a'', a''). Każda z ϑ_0 stycznych podwójnych krzywej K_0 przecina — oprócz a i a', ... jeszcze jedną tworzącą powierzchni Φ^{ν} i dwie jej odpowiadające proste wzgl. dwie pary homologicznych promieni odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$.

Zupełnie analogicznie zbadać możemy własności punktów osobliwych omawianego kompleksu promieni $n(\nu-1)$-go stopnia.

9. Omówimy jeszcze własności elementów osobliwych kongruencji promieni rzędu i klasy $n(\nu-1)$, badanej w ust. 2.

Płaszczyzna ε, przechodząca przez stałą prostą p_0, przecina powierzchnię prostolinjową Φ^{ν} w jednobieżnej krzywej C^{ν}, której punkty (t. zn. punkty przebicia się tworzących powierzchni Φ^{ν} z płaszczyzną ε) znajdują się w odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$. Utworem tej odpowiedniości jest krzywa, omawiana w ust. 5. A zatem otrzymamy następujące twierdzenia:

Płaszczyzny pęku o osi p_0 i punkty szeregu o podstawie p_0 są elementami osobliwemi badanej kongruencji promieni rzędu i klasy $n(\nu-1)$. Każda płaszczyzna osobliwa (przez każdy punkt osobliwy przechodzi) zawiera $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$ promieni podwójnych kongruencji, oraz ∞^1 promieni, które tworzą krzywą (stożek rzędu) klasy $n(\nu-1)$ i rodzaju $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Prosta p_0 przecina ν tworzących t powierzchni Φ^ν. Oznaczmy przez $\varepsilon \equiv tp_0$ płaszczyznę, wyznaczoną dowolną prostą t oraz prostą p_0. Tworzącej t odpowiada, za pośrednictwem odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$, n tworzących t', oraz każdemu elementowi t' odpowiada t i $(n-1)$ dalszych tworzących t''. Płaszczyzna ε przecina tworzące t', t'' w punktach T', T'' a powierzchnię Φ^ν w krzywej $C^{\nu-1}$ rzędu $\nu-1$. Z ust. 5 wynika bezpośrednio następujące twierdzenie:

Przez prostą p_0 przechodzi ν takich płaszczyzn osobliwych tp_0, z których każda zawiera ∞^1 promieni kongruencji, powłóczących krzywą klasy $n(\nu-2)$ i rodzaju $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Na każdej płaszczyźnie tp_0 leży $\delta = \frac{1}{2}n(n\nu-n-3)(\nu-3)$ promieni podwójnych kongruencji, oraz $n(n-1)$ prostych $T'T''$ i $\frac{1}{2}n(n-1)$ prostych $T'T'$, które są również promieniami podwójnemi kongruencji prostych.

Analogicznie omówić możemy własności ν punktów osobliwych tp_0 kongruencji, w których prosta p_0 przebija powierzchnię Φ^ν.

Płaszczyzna $\varepsilon \equiv aa'$, przechodząca przez dwie przecinające się tworzące homologiczne a i a' odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$, przecina powierzchnią Φ^ν w jednobieżnej krzywej $C^{\nu-1}$ rzędu $(\nu-2)$. Przez punkt εp_0 przebicia się p_0 z płaszczyzną ε, przechodzi $n(\nu-3)$ prostych (ust. 1), łączących homologiczne punkty odpowiedniości inwolucyjnej $[n]$ o podstawie $C^{\nu-2}$. Owe proste są promieniami podwójnemi badanej kongruencji. Tworzącej a (wzgl. a') odpowiada a' (wzgl. a) i $(n-1)$ dalszych promieni a'_1 (wzg. a_1). Skoro oznaczymy przez $A'_1 = \varepsilon a'_1$ i $A_1 = \varepsilon a_1$ punkty przebicia się prostych a'_1 i a_1 z płaszczyzną ε, to proste, łączące punkt εp_0 z punktami A'_1 i A_1, są promieniami podwójnemi naszej kongruencji. Płaszczyzna ε zawiera w końcu ∞^1 promieni kongruencji, które tworzą pęk o wierzchołku εp_0.

Z ust. 3 wynikają twierdzenia:

Pary przecinających się homologicznych promieni powierzchni Φ^ν wyznaczają $n(\nu-2)$ osobliwych płaszczyzn, oraz $n(\nu-2)$ osobliwych punktów uważanej kongruencji promieni. Na każdej płaszczyźnie osobliwej leży, oraz przez każdy punkt osobliwy przechodzi $n(\nu-3)+2(n-1)$ promieni podwójnych oraz pęk promieni pojedyńczych naszej kongruencji.

Résumè.

Si les éléments semblables (points, droites, plans) d'une figure unicursale sont en correspondances $[n, n]$ et si à l'élément quelconque — que l'on considère comme appartenant à l'une ou à l'autre figure superposées — correspondent les mêmes n éléments, nous avons la correspondance involutive $[n]$.

Le travail actuel contient les théorèmes suivants:

La correspondance involutive $[n]$ entre les points (tangentes) d'une courbe plane unicursale d'ordre (classe) ν, possède cette propriété, que par chaque point (que chaque droite située) dans le plan de cette courbe passent (contient) $n(\nu-1)$ droites (points) qui joignent (où se coupent) les couples de points (droites) correspondants de la correspondance.

La correspondance involutive $[n]$ entre les points (plans tangents) d'une courbe gauche unicursale d'ordre ν (surface développable unicursale de la classe ν) possède cette propriété, qu'une droite quelconque coupe $n(\nu-1)$ droites qui joignent (où se coupent) les couples de points (plans) correspondants de cette correspondance.

Les droites, qui coupent une droite fixe et les couples d'éléments homologues d'une correspondance involutive $[n]$ entre les génératrices (tangentes) d'une surface réglée unicursale d'ordre ν (courbe gauche unicursale du rang ν) — engendrent une congruence de rayons d'ordre et de la classe $n(\nu-1)$.

La correspondance involutive $[n]$ entre les génératrices (tangentes) d'une surface réglée unicursale d'ordre ν (courbe gauche unicursale du rang ν) possède $n(\nu-2)$ couples d'éléments correspondants, dont chaque couple concourt en un point.

Les courbes planes, les surfaces coniques et les surfaces gauches, comme les produits géométriques des correspondances involutives $[n]$ entre les éléments semblables des figures unicursales, ont le genre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Les éléments homologues d'une correspondance involutive $[n]$ entre les points (tangentes) d'une courbe plane unicursale d'ordre ν (de la classe ν), engendrent généralement une courbe de la classe (d'ordre) $n(\nu-1)$, d'ordre (de la classe) $2(n\nu-n-1)+(n-1)(n-2)$ et du genre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, avec $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$ tangentes — (points —) doubles.

Prenons dans un plan une correspondance involutive $[n]$ entre les points (tangentes) d'une courbe unicursale d'ordre ν (de la classe ν). Cette correspondance possède $\frac{3}{2}n(n-1)(\nu-2)$ tels points (telles tangentes) dont chaque avec deux éléments correspondants sont situés en ligue droite (resp. se coupent en un point). Cette correspondance posséde $\frac{1}{2}n^2(\nu-2)(\nu-3)$ droites (points) dont chaque renferme (où se coupent) deux couples de points (tangents) homologues.

La correspondance involutive $[n]$ entre les points (plans tangents) d'une courbe gauche unicursale d'ordre ν (surface développable unicursale de la, classe ν) engendre généralement une surface gauche du degré $n(\nu-1)$ du rang $2(n\nu-n-1)+(n-1)(n-2)$ et du genre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Les plans tangents — (points —) doubles de cette surface gauche engendrent une surface développable (courbe gauche d'ordre) de la classe $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$

Les droites qui coupent les couples d'élements homologues d'une correspondance involutive $[n]$ entre les génératrices (tangentes) d'une surface réglée unicursale d'ordre ν (courbe gauche unicursale du rang ν) — engendrent un complexe de rayons du degré $n(\nu-1)$. Les génératrices doubles de ce complexe engendrent une congruence d'ordre et de la classe $\frac{1}{2}n(n\nu-3)(\nu-2)$.

J'étudie enfin les propriétés des points (plans) singuliers de ces complexes et congruences.