L. INFELD.

Fale świetlne w teorji względności.

Les ondes lumineuses dans la théorie de la relativité.

Rozdział pierwszy.

§ 1.

Podstawowem zagadnieniem ogólnej teorji względności, zagadnieniem, którego rozwiązanie stanowi jej tryjumf, jest problemat grawitacji. Konsekwencje tej teorji sięgają jednakże głęboko w istotę naszych dotychczasowych pojęć fizycznych. Burząc dawne podstawowe pojęcia fizyczne, a stawiając na ich miejsce nowe, zmienia teorja ta temsamem matematyczną formę praw fizycznych i warunki, jakim prawa te muszą zadość czynić. Różnica ta występuje na jaw przy rozważaniu jakiegokolwiek prawa fizycznego z punktu widzenia teorji klasycznej, szczególnej i ogólnej teorji względności. Uwydatnia się ona dla pola elektromagnetycznego, którego zbadanie w przypadku perjodycznych drgań o bardzo wielkiej częstoścl stanowi przedmiot tej pracy.

Dla ocenienia tej zmiany porównajmy na razie różnicę pomiędzy cechami zasadniczemi praw fizycznych w Mechanice klasycznej i szczególnej teorji względności.

Prawa Mechaniki klasycznej spełniają ze względu na układ, dla którego są ważne, i na formę, którą posiadają, następujące warunki:

1. Prawa te są ściśle ważne dla układów inercjalnych.

2. Wszelkie wielkości fizyczne są skalarami, wektorami, tensorami trójwymiarowej euklidesowej przestrzeni, a wszelkie prawa fizyczne są związkami pomiędzy temi wielkościami fizycznemi, niezmiennemi ze względu na ortogonalne, iinjowe przekształcenie przestrzenne kartezjańskiego układu spółrzędnych.

3. Prawa te czynią zadość zasadzie względności Galileusza.

Z pod warunku trzeciego wyłamuje się teorja Maxwella oraz teorja elektronowa. Rozwój tych właśnie teoryj i doświadczalne sprawdzenie ich konsekwencyj stanowiły może największy tryjumf Fizyki zeszłego wieku. Próby pogodzenia teorji Maxwella z zasadą względności Galileusza stały w sprzeczności z doświadczeniem. Teorja zaś elektronowa, zarzucając zasadę względności Galileusza i definjując nam za pośrednictwem eteru pewien jedyny układ, dla którego prawa Fizyki są ważne, nie zdołała zadowalająco wytłumaczyć doświadczeń Michelsona, Troutona i Noble'a, Rankine'a i innych. Doświadczenia te, skierowane przeciwko zasadzie względności a mające stwierdzić istnienie układu bezwzględnego, stworzyły fundament doświadczalny postawionej przez Einsteina szczególnej teorji względności, przyniósłszy temsamem rozwiązanie wymienionych trudności.

Szczególna teorja względności Einsteina zachowuje treść fizyczną teorji względności Galileusza, a zmienia jej formę matematyczną przez definicję mierzenia czasu i przez postulat stałej prędkości światła niezależnie od tego, czy źródło emisji znajduje się w ruchu, czy w spoczynku względem wybranego układu.

Szczególna teorja względności zmienia formę matematyczną praw fizycznych, a warunki, które prawom tym stawia co do formy i układu odniesienia, możemy ująć w następujący sposób:

1. Prawa te są ściśle ważne jedynie dla układów inercjalnych.

2. Wszystkie wielkości fizyczne są skalarami, wektorami, tensorami czterowymiarowej pseudoeuklidesowej rozmaitości, a prawa Fizyki są związkami niezmiennemi ze względu na przekształcenie ortogonalne linjowe czaso-wo-przestrzenne.

Kontynuum czterowymiarowe pseudoeuklidesowe charakteryzuje forma kwadratowa:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - l^2 \tag{1}$$

(x_1, x_2, x_3, oznaczają spółrzędne miejsca, a l oznacza spółrzędną czasu). Forma ta kwadratowa jest niezmienna wobec przekształceń linjowych ortogonalnych, t. zw. przekształceń Lorentza.

§ 2. O promieniach świetlnych w próżni.

Przechodząc do zagadnienia znalezienia kierunku promieni świetlnych według szczególnej teorji względności, uogólniamy związki, otrzymane przez Sommerfelda a spełniające co do formy matematycznej warunki teorji klasycznej.

Na podstawie założenia, że promień świetlny jest w ośrodku izotropowym prostopadły do powierzchni równych faz oraz że prędkość posuwania

się tej powierzchni mierzy nam prędkość światła, wykazał Sommerfeld[1], że zachodzi równość

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{\nu^2 n^2}{c^2}, \tag{2}$$

w której przyjęte są następujące oznaczenia:

φ oznacza fazę, jako funkcję ciągłą różniczkowalną miejsca (x, y, z) i czasu (t);

$\nu = \frac{2\pi}{T}$ oznacza częstość, a T okres drgań;

$n = \frac{c}{v}$ jest spółczynnikiem załamania, co do którego zakładamy, że jest funkcją ciągłą miejsca; v jest prędkością światła w rozważanym ośrodku, a c jest prędkością światła w próżni.

Ścisła perjodyczność drgań świetlnych pociąga za sobą linjową zależność funkcji φ od czasu. Funkcja φ spełniać musi związek

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right| = \nu. \tag{3}$$

Przez kierunek przestrzenny promienia świetlnego rozumiemy kierunek wektora jednostkowego prostopadłego do powierzchni równych faz. Składowe jego są:

$$\pm\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{|\text{grad}\,\varphi|}\,;\quad \pm\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{|\text{grad}\,\varphi|}\,;\quad \pm\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{|\text{grad}\,\varphi|}\,. \tag{4}$$

Znak dodatni stosujemy, gdy $\frac{\partial \varphi}{\partial t} < 0$, znak zaś ujemny, gdy $\frac{\partial \varphi}{\partial t} > 0$.

Związki te uogólniamy w wypadku próżni $|n=1|$ dla szczególnej teorji względności. Równość (2) przybiera ze względu na (3) w tym przypadku postać[2]:

$$(\Gamma\rho\alpha\delta\ \varphi)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}\right)^2 = 0\,, \tag{5}$$

niezmienną wobec przekształcenia Lorentza (x_1, x_2, x_3, oznaczają spółrzędne miejsca, a $x_4 = \sqrt{-1}\,ct$). Równość ta wyraża, że utworzony z funkcji

[1]) Sommerfeld und I. Runge: Die Grundlagen der geometrischen Optik. Ann. d. Phys. 1911, tom 35.

[2]) Działania wektorowe w kontynuum czterowymiarowem pseudoklidesowem oznaczone są literami greckiemi.

skalarnej cztero-wektor $\Gamma\rho\alpha\delta\ \varphi$ jest wektorem zerowym. Wykonajmy na wektorze $\Gamma\rho\alpha\delta\ \varphi$ przekształcenie Lorentza, któremu odpowiada przejście do układu K' o spółrzędnych x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, poruszającego się względem pierwotnego układu K ruchem jednostajnym wzdłuż osi x z prędkością q, a otrzymamy związki:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_1}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{q}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}i}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x'_2}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_2};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x'_3}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_3};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x'_4}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}-\frac{q}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}i}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \tag{6}$$

W przypadku szczególnym fali płaskiej, tworzącej z osiami układu kąty α, β, γ, otrzymujemy z wzorów tych, przy podstawieniu $\nu\cos\alpha$, $\nu\cos\beta$, $\nu\cos\gamma$, $-\frac{\nu}{i}$ w miejsce $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_4}$ oraz odpowiednio $\nu'\cos\alpha'$, $\nu'\cos\beta'$, $\nu'\cos\gamma'$, $-\frac{\nu'}{i'}$ w miejsce $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1'}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_4'}$,

$$\nu'=\nu\frac{1-\frac{q}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{q}{c}\right)^2}} \tag{7}$$

$$\nu'\cos\alpha'=\frac{\nu\cos\alpha-\frac{q}{c}\nu}{\sqrt{1-\left(\frac{q}{c}\right)^2}};\quad \nu'\cos\beta'=\nu\cos\beta;\quad \nu'\cos\gamma'=\nu\cos\gamma \tag{8}$$

a z nich przez dzielenie kolejne każdej z równości (8) przez (7):

$$\cos\alpha'=\frac{\cos\alpha-\frac{q}{c}}{1-\frac{q}{c}\cos\alpha};\quad \cos\beta'=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{q}{c}\right)^2}\cos\beta}{1-\frac{q}{c}\cos\alpha};\quad \cos\gamma'=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{q}{c}\right)^2}\cos\gamma}{1-\frac{q}{c}\cos\alpha}, \tag{9}$$

znane związki, z których (7) wyraża prawo Dopplera, a (9) przekształcenia funkcyj trygonometrycznych kąta zawartego pomiędzy kierunkiem promienia świetlnego a osiami układu.

Przez kierunek przestrzenno-czasowy promienia świetlnego, gdy dana jest funkcja φ, rozumieć należy kierunek wektora o składowych: $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$.

Linja zerowa o równaniu parametrycznem:

$$x_i = x_i\,(p). \tag{10}$$

posiada kształt linji świata promienia świetlnego, jeżeli spełniona jest równość:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\frac{1}{\lambda}\frac{dx_i}{dp}. \tag{11}$$

a λ jest funkcją dowolną, byle ciągłą i różniczkowalną, zależną od parametru p za pośrednictwem spółrzędnych x_i.

Zagadnienie znalezienia kształtu linji świata promienia świetlnego prowadzi do tego samego równania różniczkowego (11), co zagadnienie znalezienia linij sił w polu o potencjale φ.

Równanie (11), łącznie z równaniem (5), pozwoli nam udowodnić, że linje świata promienia świetlnego w próżni są prostemi zerowemi pseudo-euklidesowego kontynuum. Widoczne to jest, jeżeli weźmiemy pod uwagę następujące związki:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma\rho\alpha\delta\ \varphi)^2=2\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}=2\,\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{4}\frac{dx_k}{dp}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial x_i}=0$$

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{dx_k}{dp}=\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right).$$

A stąd:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{dx_i}{dp}\right)=0\,.$$

Z czego wynika:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{dx_i}{dp}=a_i\,,$$

a więc równanie prostej zerowej

$$\frac{\frac{dx_1}{dp}}{a_1}=\frac{\frac{dx_2}{dp}}{a_2}=\frac{\frac{dx_3}{dp}}{a_3}=\frac{\frac{dx_4}{dp}}{a_4},$$

ponieważ:

$$\sum_{i=1}^{4}a_i^2=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{dx_i}{dp}\right)^2=0\,.$$

§ 3. O promieniach świetlnych w ośrodku niejednorodnym.

Przypadek, gdy ośrodek niejednorodny przeźroczysty znajduje się w ruchu względem wybranego układu K', nie zmienia sposobu wyprowadzenia równania (2), zmieniając jedynie prawą stronę tegoż równania. W wyrażeniu

$\frac{\nu'}{v'}$ oznacza ν' częstość w układzie K', a v' prędkość rozchodzenia się światła w tymże układzie, zależną zarówno od spółczynnika n jak i prędkości ośrodka.

Opierając się na charakterze skalarnym funkcji φ, możemy równaniu (2) nadać postać:

$$(\Gamma\rho\alpha\delta\ \varphi)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right)^2 = \nu^2 \left\{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right\}. \tag{12}$$

Z równości tej wynika ze względu na niezmienność strony lewej, że

$$\nu^2 \left\{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right\} = \nu'^2 \left\{\frac{1}{v'^2} - \frac{1}{c^2}\right\} \tag{13}$$

jest niezmiennikiem wobec przekształcenia Lorentza. Stosując wzory (12) do fali płaskiej w ośrodku niejednorodnym o stałym spółczynniku załamania, otrzymujemy znane wzory przekształcenia dla v i ν.

Z równań:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{q}{c}\cos\alpha \,.\, n}{\sqrt{1 - \left(\frac{q}{c}\right)^2}} \tag{14}$$

$$\frac{c}{v'}\cos\alpha'\nu' = \nu \frac{\cos\alpha \,.\, n - \frac{q}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{q}{c}\right)^2}}; \quad \frac{c}{v'}\cos\beta'\nu' = n\cos\beta \,.\, \nu; \quad \frac{c}{v'}\cos\gamma'\nu' = n\cos\gamma \,.\, v, \tag{15}$$

wynika bowiem przez utworzenie sumy kwadratów (15) i podzielenie przez (14), lub ze względu na niezmienność wyrażenia (13),

$$\frac{v'}{c} = \frac{1 - \frac{q}{c} n \cos\alpha}{\sqrt{\left(n\cos\alpha - \frac{q}{c}\right)^2 + n^2\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\sin^2\alpha}}. \tag{16}$$

Oznaczmy przez S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) składowe jednostkowego wektora świata o charakterze przestrzennym, stycznego do linji świata promienia świetlnego. Składowe jego są:

$$S_i = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{|\Gamma\rho\alpha\delta\ \varphi|} \tag{17}$$

z czego wynika związek:

$$\mathrm{P}o\tau\left(S \,.\, \nu\sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}}\right) = 0, \tag{18}$$

który wektor powyższy spełnić musi.

§ 4. Własności fal krótkich w ośrodku niejednorodnym.

Wykazać możemy, że równania (2), któremi posługiwaliśmy się poprzednio, otrzymać możemy nietylko — jak je otrzymał Sommerfefd — na drodze rozumowania, opierającego się na zasadach Optyki geometrycznej, ale również z teoryj fizycznych, jeżeli przyjmiemy pewne upraszczające założenia fizyczne. Jako podstawę rozważań przyjmujemy równania Maxwella dla ośrodka niejednorodnego, izotropowego, przezroczystego. Zakres badanych fal elektromagnetycznych ograniczamy przez założenie bardzo wielkich częstości, oraz przez założenie, że zarówno amplitudy, jak i stała dielektryczna ε i zdolność magnetyczna μ są funkcjami miejsca, mogą jednakże w przedziałach o wielkości porównywalnej z długością fali być uważane jako stałe. Faza, występująca w funkcjach perjodycznych, któremi pole elektromagnetyczne opiszemy, ma być funkcją linjową czasu $\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| = \nu\right)$ a ciągłą i różniczkowalną funkcją miejsca. Co zaś do pochodnych cząstkowych $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, czynimy ważne, pod względem fizycznym jasne, założenie, że jeżeli którakolwiek z nich nie równa się zeru, to rośnie co do wartości bezwzględnej nieograniczenie z nieograniczenie rosnącą częstością. Co do zależności pochodnych $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ od miejsca, to stosują się te same założenia, co przytoczone dla amplitud.

Opierając się na tych założeniach, znajdziemy w przypadku ośrodka niejednorodnego — gdzie całkowanie równań Maxwella, nawet w przypadku bardzo prostej postaci funkcji ε, natrafia na trudności — pewne ogólne związki. W ogólnej teorji względności, gdzie z powodu pola grawitacyjnego fale elektromagnetyczne płaskie i kuliste w ogólnym przypadku istnieć nie mogą, możliwe jest dotychczas przybliżone rozwiązanie jedynie przy danych wyżej założeniach.

Pomimo to, że równania Maxwella stanowią wątpliwą podstawę dla badania fal krótkich w ośrodku niejednorodnym, uwydatniają one jednakże podobieństwa i różnice, zachodzące pomiędzy przypadkiem ośrodka materjalnego w szczególnej teorji względności a przypadkiem próżni w ogólnej teorji względności.

Zastosujmy więc równania Maxwella do układu, w którym dany ośrodek spoczywa:

$$\frac{1}{c}\,\varepsilon\,\frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{curl} H \tag{19a}$$

$$-\frac{1}{c}\,\mu\,\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{curl} E \tag{19b}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon E) = 0 \tag{20a}$$

$$\operatorname{div}(\mu H) = 0\,. \tag{20b}$$

Niechaj wektory E i H, charakteryzujące pole elektromagnetycze, będą funkcjami następującego kształtu:

$$E = E_0\, e^{i\varphi} \tag{21}$$

$$H = H_0\, e^{i\varphi} \tag{22}$$

gdzie co do amplitudy E, H oraz fazy φ stosują się poprzednio wymienione założenia.

Celem znalezienia warunków, którym muszą czynić zadość (21) oraz (22), ażeby stanowiły rozwiązanie równań Maxwella, podstawiamy funkcje te do powyższych równań.

Przechodząc do wartości rzeczywistych, otrzymujemy:

$$V(\operatorname{grad}\varphi, H_0)\sin\varphi - \cos\varphi\,.\operatorname{curl} H_0 = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} E_0 \sin\varphi \tag{23a}$$

$$V(\operatorname{grad}\varphi, E_0)\sin\varphi - \cos\varphi\,.\operatorname{curl} E_0 = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} H_0 \sin\varphi \tag{23b}$$

$$S(\operatorname{grad}\varphi, \mu H_0)\sin\varphi - \cos\varphi \operatorname{div}(\mu H_0) = 0 \tag{24a}$$

$$S(\operatorname{grad}\varphi, \varepsilon E_0)\sin\varphi - \cos\varphi \operatorname{div}(\varepsilon E_0) = 0\,. \tag{24b}$$

Opierając się na poczynionych na wstępie założeniach, że bezwzględne wartości pochodnych wektorów E, H są bardzo małe w stosunku do bezwzględnych wartości pochodnych $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, które rosną nieograniczenie wraz z częstością, możemy dla dostatecznie krótkich fal $\operatorname{curl} E_0$, $\operatorname{curl} H_0$ w równaniach (23a) i (23b) oraz $\operatorname{div}\varepsilon E_0$ i $\operatorname{div}\mu H_0$ w równaniach (24a) i (24b) zaniedbać. Z przybliżenia tego wynika układ równań

$$V(\operatorname{grad}\varphi, H_0) = \frac{1}{c}\,\varepsilon\, E_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{25a}$$

$$V(\operatorname{grad}\varphi, E_0) = -\frac{1}{c}\,\mu\, H_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{25b}$$

$$S(\operatorname{grad}\varphi, H_0) = 0\,, \tag{26a}$$

$$S(\operatorname{grad}\varphi, E_0) = 0\,, \tag{26b}$$

widoczne jest, że równania (26a) oraz (26b) wynikają z równań (25a) i (25b).

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby układ równań linjowych i jednorodnych (25a) i (25b) posiadał dla wektorów E i H rozwiązanie, jest, ażeby wyznacznik

$$\begin{vmatrix}
\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, & 0\;, & 0\;, & 0\;, & -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, & \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\
0\;, & \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, & 0\;, & \frac{\partial\varphi}{\partial z}, & 0\;, & -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\
0\;, & 0\;, & \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, & -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & 0\;, \\
0\;, & \frac{\partial\varphi}{\partial z}, & -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, & \frac{\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, & 0\;, & 0\;, \\
-\frac{\partial\varphi}{\partial z}, & 0\;, & \frac{\partial\varphi}{\partial x}, & 0\;, & \frac{\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, & 0\;, \\
\frac{\partial\varphi}{\partial y}, & -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, & 0\;, & 0\;, & 0\;, & \frac{\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t},
\end{vmatrix} = W \tag{27}$$

równał się zeru. Wyznacznik ten, którego wartość wynosi

$$W = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left\{\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}, \tag{28}$$

staje się zerem wtedy i tylko wtedy, jeśli zachodzi równość:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2; \tag{29}$$

podstawiając $\varepsilon\mu = n^2$; $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = \nu^2$ otrzymamy jako warunek rozwiązalności równań (25a) i (25b) poprzednie równanie różniczkowe (2).

Dopóki więc ograniczamy w ten sposób założenia, znajdujemy się w dziedzinie ważności Optyki geometrycznej. Zasady Optyki geometrycznej są ściśle spełnione jedynie dla nieskończenie wielkiej częstości lub też w przypadku, gdy amplitudy oraz ε i μ są stałe, a więc w przypadku fali płaskiej w ośrodku jednorodnym.

Jeżeli założymy, że równanie (29) jest spełnione i zbadamy podwyznaczniki piątego rzędu wyznacznika W, przekonamy się, że wszystkie są identycznie równe zeru. Natomiast nie wszystkie podwyznaczniki stopnia czwartego stają się zerami. Jeżeli więc dwie z pośród składowych wektorów E_0 i H_0 są znane, to cztery pozostałe składowe są określone przez równania (25 a) i (25 b). Przybliżone równania (25 a) i (25 b) wyrażają, że wektory E, H, grad φ są do siebie prostopadłe. Promień świetlny posiada według podanej definicji (4) kierunek zgodny z wektorem Poyntinga.

Podnosząc obydwie strony równań (25 a) i (25 b) do kwadratu, otrzymujemy $H_0^2\,\mu = E_0^2\,\mu$ lub też kładąc, jak zawsze w Optyce, $n = 1$ mamy $H_0^2 = \varepsilon E_0^2$ [1].

Ażeby wykazać, że związki są ważne i dla szczególnej teorji względności, musimy im nadać postać niezmienną wobec przekształcenia Lorentza.

Równania zasadnicze Maxwella są niezmienne wobec przekształcenia Lorentza. Ujawnia się to w postaci, jaką im nadamy, stosując symbolikę wektorową, uogólnioną dla czterowymiarowego kontynuum pseudo-euklidesowego.

W miejsce wektorów E, H, $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$ wprowadzamy tensory skośnosymetryczne stopnia drugiego (t. zw. sześciowektorowy) F, M, oraz tensory uzupełniające F^*, M^*, których składowe zdefinjowane są przez następujące związki:

$$\begin{aligned}
&F_{14} = F^*_{23} = -\,i D_x; \quad && F_{24} = F^*_{31} = -\,i D_y; \quad && F_{34} = F^*_{12} = -\,i D_z \\
&F_{23} = F^*_{14} = H_x; && F_{31} = F^*_{24} = H_y; && F_{12} = F^*_{34} = H_z \\
&F_{kk} = F^*_{kk} = 0; && F_{ik} = -\,F_{ki}; && F^*_{ik} = -\,F^*_{ki}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
&M_{14} = M^*_{23} = -\,i E_x; \quad && M_{24} = M^*_{31} = -\,i E_y; \quad && M_{34} = M^*_{12} = -\,i E_z \\
&M_{23} = M^*_{14} = B_x; && M_{31} = M^*_{24} = B_y; && M_{12} = M^*_{34} = B_z \\
&M_{kk} = M^*_{kk} = 0; && M_{ik} = -\,M_{ki}; && M^*_{ik} = -\,M^*_{ki}.
\end{aligned} \tag{31}$$

[1] Jako przykład szczególny posłużyć może zagadnienie rozwiązane przez R. Gansa w pracy: „Fortpflanzung des Lichtes durch ein inhomogenes Medium Ann. d. Ph. 1915". Bd. 47. Stwierdzić możemy rzeczywiście, że obliczone tam amplitudy oraz fazy czynią zadość naszym warunkom, jeżeli nie uwzględnimy występującej tam bardzo małej polaryzacji eliptycznej, której nam nasze upraszczające założenia dać nie mogą.

Równania (19 a), (19 b) oraz (20 a) i (20 b) przybierają wówczas następującą postać [1]:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta i v_k\, F &= \frac{\partial F_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{k3}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{k4}}{\partial x_4} = 0, \qquad (32\,a)\\
\Delta i v_k\, M^* &= \frac{\partial M^*_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^*_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial M^*_{k3}}{\partial x_3} + \frac{\partial M^*_{k4}}{\partial x_4} = 0 \qquad (32\,b)
\end{aligned}\right\}\ k = 1, 2, 3, 4.$$

Podczas gdy równania od (19 a) do (20 b) ograniczyliśmy do przypadku, gdy w danym układzie ośrodek spoczywał, pozwolą nam uogólnione przez Minkowskiego równania Elektrodynamiki założyć, że ośrodek w rozważanym układzie porusza się z jednostajną prędkością.

Oznaczmy składowe wektora przestrzennego, wyrażającego prędkość ośrodka, przez q_x, q_y, q_z, składowe wektora świata, wyrażającego prędkość przez w_1, w_2, w_3, w_4. Składowe tych dwóch wektorów pozostają ze sobą w następującym związku:

$$w_1 = \frac{q_x}{c\sqrt{1-\left(\frac{q}{c}\right)^2}}; \quad w_2 = \frac{q_y}{c\sqrt{1-\left(\frac{q}{c}\right)^2}}; \quad w_3 = \frac{q_z}{c\sqrt{1-\left(\frac{q}{c}\right)^2}}; \quad w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\left(\frac{q}{c}\right)^2}} \tag{33}$$

gdzie:
$$q^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2.$$

Pomiędzy sześciowektorami F i M zachodzą wówczas wyprowadzone przez Minkowskiego następujące związki:

$$[w\,F] = \varepsilon\,[w\,M] \tag{34 a}$$

$$[w\,M^*] = \mu\,[w\,F^*], \tag{34 b}$$

gdzie klamry w tych równaniach są symbolami iloczynu wektorjalnego sześciowektora i czterowektora, a rezultatem tego iloczynu jest znowu czterowektor. Jeżeli oznaczymy bowiem przez L sześciowektor a przez A czterowektor, otrzymamy:

$$[A\,L]_k = A_1 L_{k1} + A_2 L_{k2} + A_3 L_{k3} + A_4 L_{k4} = P_k \tag{35}$$

a P_k są składowemi czterowektora.

Równania (34 a) i (34 b) dają nam jedynie sześć związków niezależnych od siebie, ponieważ ostatni związek zarówno w (34 a) jak i w (34 b) możemy otrzymać z trzech pierwszych. Widoczne jest, że w przypadku, gdy $q_x = q_y = q_z = 0$, (34 a) i (34 b) przechodzą w znane równania:

[1] H. Minkowski: Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgängen in bewegten Körpern. 1908.

$$D = \varepsilon E; \quad B = \mu H.$$

Załóżmy teraz, że M i F są funkcjami perjodycznemi kształtu

$$F_{ik} = F^{0}_{ik}\, e^{i\varphi}, \tag{36}$$

$$M_{ik} = M^{0}_{ik}\, e^{i\varphi}, \tag{37}$$

gdzie amplitudy oraz fazy spełniają następujące założenia. Jeżeli $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|$, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right|$, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right|$, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right|$ nie są w jakimś punkcie świata zerem, to rosną w danym punkcie świata nieograniczenie wraz z nieograniczenie rosnącą częstością (częstością jest pochodna $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|$). Co zaś do składowych F^{0}_{ik}, M^{0}_{ik}, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ to zakładamy, że są funkcjami punktów świata, mogą jednakże w przedziałach porównalnych z długością fali oraz z okresem drgań być uważane jako stałe. Te same założenia dotyczą wielkości ε, μ, które jednakże są od czasu niezależne.

Podstawiając (36) do (32a) i (32b), otrzymamy po przejściu do wielkości rzeczywistych:

$$\cos\varphi\, \Delta i v_k\, F_0 - [\Gamma\rho\alpha\delta\, \varphi,\, F_0]\, \sin\varphi = 0\,, \tag{38a}$$

$$\cos\varphi\, \Delta i v_k\, M^{*}_{0} - [\Gamma\rho\alpha\delta\, \varphi, M^{*}_{0}]\, \sin\varphi = 0\,. \tag{38b}$$

Z założenia naszego wynika, że bezwzględne wartości pochodnych składowych F^{0}_{ik}, M^{0}_{ik} są dla dostatecznie wielkich częstości bardzo małe w stosunku do pochodnych $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right|$. Zaniedbując drugi czynnik w równaniach (38a) i (38b), otrzymujemy następujący układ równań przybliżonych:

$$[\Gamma\rho\alpha\delta\, \varphi,\, F_0] = 0 \quad (39\,\mathrm{a}) \qquad [\Gamma\rho\alpha\delta\, \varphi\, .\, M^{*}_{0}] = 0 \quad (39\,\mathrm{b})$$

$$[\omega F_0] = \varepsilon\, [\omega M_0] \quad (40\,\mathrm{a}) \qquad [\omega M^{*}_{0}] = \mu\, [\omega F^{*}_{0}] \quad (40\,\mathrm{b})$$

które w porządku, gdy ośrodek spoczywa, przechodzą w dawne równania (25a), (25b) i (26a), (26b).

Przytoczonych powyżej dwanaście równań (czwartego równania z czwórek równań (39a do 40b) nie uwzględniamy, ponieważ otrzymać je możemy z trzech pierwszych) posiada wyznacznik równy wyznacznikowi (27). Wynika to z tego, że przekształcenia sześciowektora z układu K, w którym ośrodek posiada prędkość q_x, q_y, q_z, do układu K', w którym ośrodek spoczywa, mają charakter linjowy ortogonalny.

Stąd wniosek, że warunek (12), gdzie

$$\nu^2 \left\{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right\} = \frac{\nu'^2}{c^2}\left\{\varepsilon\mu - 1\right\}$$

jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, by równania (39a), (39b) i (40a), (40b) posiadały rozwiązanie.

Rozdział drugi.

§ 1. Wstęp.

Zmiana zasadniczych pojęć fizycznych, dokonana przez ogólną teorję względności, spowodowała zmianę formy matematycznej praw fizycznych. Warunki, jakim prawa te w ogólnej teorji względności muszą zadość uczynić, są następujące:

Wielkości fizyczne są skalarami, wektorami, tensorami czterowymiarowej rozmaitości Riemanna, a wszelkie prawa fizyczne są związkami pomiędzy temi wielkościami niezmiennemi ze względu na dowolne przekształcenia, byleby funkcje wyrażające zmianę układu były ciągłe, skończone, jednoznaczne, ich wyznacznik funkcyjny różny od zera, a wszystkie rozważane układy były układami właściwemi.

Przez wybór układu rozumiemy fakt dowolnego podporządkowania punktom świata czterech liczb reczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, przy zachowaniu warunków jedno-jednoznaczności i ciągłości.

Oznaczmy formę metryczną czterowymiarowej rozmaitości Riemanna przez

$$ds^2 = \sum_{ik=1}^{4} g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (g_{ik} = g_{ki})\,. \tag{1}$$

[Wskaźniki górne oznaczają wielkości przeciwzmienne (contravariant) a dolne współzmienne (covariant)]. Funkcje g_{ik} obok warunku ciągłości, różniczkowalności, oraz założenia, że wyznacznik $|g_{ik}| = g$ jest różny od zera, muszą spełniać następujące warunki charakteryzujące układ właściwy[1]:

$$g_{11} < 0 \qquad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} g_{11}, & g_{12}, & g_{13}, \\ g_{21}, & g_{22}, & g_{23}, \\ g_{31}, & g_{32}, & g_{33}, \end{vmatrix} < 0 \qquad g_{44} > 0. \tag{2}$$

[1]) D. Hilbert: Die Grundlagen der Physik. Nachrichten der Gesellschaft d. Wissenschaft zu Göttingen. 1915, 1917.

Warunki te, będące konsekwencją zasady przyczynowości, wyróżniają spółrzędną czasu x_4 i wyrażają, że odcinek czasowy (dla którego $ds^2 > 0$) nie może przez zmianę układu stać się przestrzennym, (dla którego $ds^2 < 0$)[1].

Istota teorji względności ogólnej tkwi w zależności pola metrycznego scharakteryzowanego przez dziesięć składowych g_{ik} od tensora energji-impulsu, Zasadnicze równania różniczkowe pozwalają po wyborze odpowiedniego układu wyznaczyć dziesięć składowych g_{ik}, posiadających znaczenie potencjałów grawitacyjnych, jeżeli jest danych dziesięć składowych tensora energji-impulsu T_{ik}.

Zasadnicze równania te posiadają postać: [2]

$$R_{kl} - \tfrac{1}{2} g_{kl} R = \chi T_{kl} \qquad k_i, l_i = 1, 2, 3, 4, \tag{3}$$

gdzie:

$$-R_{ke} = \sum_{r11}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial x^r} \begin{Bmatrix} kl \\ r \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^l} \begin{Bmatrix} kr \\ r \end{Bmatrix} \right) + \sum_{r,s11}^{4} \left(\begin{Bmatrix} kl \\ r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} rs \\ s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} kr \\ s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ls \\ r \end{Bmatrix} \right) \tag{4}$$

$$R = \sum_{kl11}^{4} g^{kl} R_{kl}$$ jest skalarem krzywizny, zaś

$$\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} = \sum_{s11}^{4} g^{rs} \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s} \right)$$ są t. zw. symbolami Christoffela, a χ jest stałą, której wartość jest związana z wartością stałej grawitacyjnej.

Tu i w następnych rozważaniach pomijamy czynnik kosmologiczny, wyrażający cylindryczność świata czterowymiarowego lub skończoność i nieograniczoność przestrzeni trójwymiarowej.

Wyznaczenie składowych T_{ik} jako funkcji mierzalnych wielkości fizycznycd stanowi istotną trudność. Zagadnienie to jest łatwo rozwiązalne w następujących szczególnych przypadkach:

W przestrzeniach wolnych od materji i pola elektro-magnetycznego są wszystkie składowe tensora T_{ik} równe zeru.

W przestrzeniach zajętych przez materję, posiadającą pewną prędkość w obranym układzie, przyjmujemy $T_{ik} = \mu_0 \dfrac{dx_i}{ds} \cdot \dfrac{dx_k}{ds}$ gdzie μ_0 oznacza gęstość materji w spoczynku, Podstawiając wyrażenie powyższe do równania (2), otrzymujemy po przekształceniach czysto matematycznych[3] prawo: Linja

[1]) Zasadniczej formie metrycznej nadany został w ogólnej teorji względności znak przeciwny, aniżeli w poprzednim rozdziale. również i zmienna x_4 jest tutaj rzeczywistą.

[2]) Weyl: Raum-Zeit-Materie. 4 wydanie, str. 247.

[3]) Weyl: l. c., str. 209.

świata jakiejkolwiek masy w polu metrycznem (pod działaniem grawitacji) jest linją geodetyczną czterowymiarowego kontynuum Riemanna.

Wreszcie potrafimy wyznaczyć składowe T_{ik} w przypadku pola elektromagnetycznego, którego własności w polu grawitacyjnem zbadamy szczegółowiej. Stoją one, jak zobaczymy, w bliskim związku z ciśnieniami Maxwella, wektorem Poyntinga i energją elektro-magnetyczną.

Próby wyjścia poza te zasadnicze przypadki nie doprowadziły dotychczas do istotnego rezultatu.

Teorja Miego (będąca uogólnieniem teorji Maxwella)[1], której myślą zasadniczą jest zarzucić pojęcie materji i elektronów, jako ciał obcych w eterze, a uważać je jako dziedziny szczególnych stanów fizycznych w eterze, rozwinięta i uogólniona przez Weyla, która miała ziścić sen Kartezjusza o Fizyce geometrycznej — nie przyniosła dotychczas istotnych rezultatów, a sam Weyl poglądy swoje co do materji ostatnio częściowo zarzucił.

W jednych z ostatnich prac swoich szuka Einstein[2] wyjścia poza dotychczas rozważane przypadki przez zmianę lewej strony równania (3). Ale i ta droga napotyka na pewne trudności matematyczne, które dotychczas nie zostały usunięte.

Tak więc, chociaż daleką jest teorja względności od sprowadzenia wszystkich praw fizycznych do formy niezmiennej wobec dowolnych przekształceń, jednakże dotychczasowy jej rozwój przyniósł już rozwiązanie zasadniczego problematu — problematu grawitacji.

Równania (3) posiadają tę własność, że wyznaczając tylko sześć z pośród składowych g_{ik}, pozostawiają zupełną dowolność co do wyboru czterech składowych zasadniczego tensora metrycznego. Fakt ten udowodnił ogólnie Hilbert[3], opierając się na tem, że równania (3) otrzymać można z zasady Hamiltona:

$$\delta \int H \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4 = 0,$$

gdzie H jest funkcją niezmienną wobec dowolnych przekształceń, zdefinjowaną zapomocą równości

$$H = R + K.$$

K zaś jest funkcją zależną od g_{ik} oraz od wielkości fizycznych charakteryzujący układ $q_1, q_2, \ldots\ldots q_l$ i ich pochodnych, niezmienną wobec dowolnej zmiany układu.

[1]) Mie. Annalen d. Physik 37, 39, 40. 1912—1913.

[2]) Einstein. Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? Sitzungs berichte d. preuss. Ak. Wiss. 1919.

[3]) Hilbert. l. c. Erste Mitteilung.

Niechaj równania przejścia z układu (X) o spółrzędnych świata x^1, x^2, x^3, x^4 do układu (λ') o spółrzędnych świata $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$, $x^{4'}$, będą

$$x^i = f_i\,(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'}) \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{5}$$

Zakładamy, że równania przekształcające (5) odpowiadają poprzednio wymienionym warunkom. Z tensorjalnego charakteru składowych g_{ik} wynika, że spełniają one równania przekształcające

$$g'_{\mu\nu} = \sum_{i,k\,1\,1}^{4} \frac{\partial x^i}{\partial x^{\mu'}} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^{\nu'}}\, g_{ik}\,. \tag{6}$$

Wystarczy czterem składowym z pośród $g'_{\mu\nu}$ nadać dowolne wartości, ażeby określić funkcje f_1, f_2, f_3, f_4, zapomocą odpowiednich równań różniczkowych. Równoważność więc wszystkich układów i dowolność w ich wyborze pociąga za sobą dowolność w wyborze czterech wielkości z pośród składowych g_{ik} w całej rozważanej dziedzinie.

Jeżeli orzeczenia i prawa fizyczne są niezmienne wobec dowolnych przekształceń, powinien być zasadniczo obojętny wybór układu, do którego się odnoszą. Przykładem praw ważnych dla dowolnego układu jest prawo zachowania energji-impulsu, prawo, że linja świata punktu materjalnego w polu metrycznem jest linją geodetyczną czterowymiarowej rozmaitości Riemanna, równania uogólnione Elektrodynamiki i inne. Nie stoi w sprzeczności z tem fakt, że do opisu zjawisk będziemy używali układów, dla których prawa te będą posiadały szczególnie prostą postać. Wyborem układu kierować może czynnik ekonomiczny np, tego rodzaju dostosowanie układu do specjalnego zagadnienia, by forma matematyczna otrzymanych praw była możliwie prosta. W wysłowieniu tych praw ogólnych jest więc wskazanie na układ niepotrzebne, w zastosowaniu ich do specjalnego zagadnienia konieczne jest użycie układu, o którego wyborze rozstrzygną wyżej wymienione względy. Nadto w przypadku szczególnym, gdy pole metryczne posiada pewne szczególne własności (np. w przypadku statycznym lub kulisto symetrycznym) ujawnia odpowiedni wybór układu charakterystyczne związki, cechujące te właśnie przypadki szczególne.

W teorji względności występują obok praw ważnych dla wszystkich układów prawa szczególne, dla których wysłowienia konieczne jest podanie układu odniesienia. Szczególne te prawa wypowiadamy. gdy:

1) nie znamy praw ogólnych o formie niezmiennej wobec dowolnych przekształceń;
2) gdy stosujemy je do pewnego szczególnego układu;
3) gdy rozważane pole metryczne posiada pewne szczególne własności.

Zajmiemy się obecnie własnościami pewnych specjalnych układów, ażeby módz w nich następnie badać własności pola elektromagnetycznego.

§ 2. O układach i dziedzinach, dla których ważna jest teorja względności szczególna.

Wartość symboli Christoffela mierzy natężenie pola metrycznego. Wynika to z równania linji geodetycznej, jeżeli napiszemy je w formie:

$$\mu_0 \frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\,\mu_0 \sum_{h,l=1}^{4} \left\{ {h,\, l \atop i} \right\} \frac{dx^h}{ds} \cdot \frac{dx^l}{ds} \tag{7}$$

a lewą stronę zgodnie z szczególną teorją względności zinterpretujemy jako siłę. W fakcie, że obydwie strony równości (7) możemy od czynnika μ_0 uwolnić, znajduje swój wyraz zasadnicze prawo fizyczne, tworzące fundament ogólnej teorji względności, stwierdzane kolejno z coraz to większą dokładnością przez Galileusza, Newtona, Eötvössa, stwierdzające równość masy ciężkiej i bezwładnej.

Składowe natężenia pola grawitacyjnego znikają w punkcie świata P, dla którego układ jest geodetyczny, t. zn. dla którego zachodzi

$$\left\{ {h,\, l \atop i} \right\} = 0. \tag{8}$$

Ponieważ możemy przez odpowiednie przekształcenie układu uzyskać, ażeby w punkcie P zachodziła równość (8) [1], możemy więc temsamem w nieskończenie małej dziedzinie, tworzącej sąsiedztwo tego punktu, znieść działanie pola grawitacyjnego. Fizycznie odpowiada tej operacji matematycznej nadanie układowi prędkości zmiennej, sprowadzającej w otoczeniu punktu P do zera przyśpieszenie, działaniem pola metrycznego wywołane. Wybierzmy nadto układ taki, ażeby składowe g_{ik} przybrały w punkcie P następujące wartości:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1\,, \qquad g_{44} = +1 \tag{9}$$

$$g_{12} = g_{13} = g_{14} = g_{23} = g_{24} = g_{34} = 0\,. \tag{10}$$

Równość (10) wyraża, że cztery linje geodetyczne, przechodzące przez punkt P, których równania mają postać

[1]) Matematyczne zagadnienie znalezienia równań przekształcenia rozwiązał A. Fokker: De geodetische Precessie; een nitvloeisel van Einsteins gravitation theorie. Verslagen Akademie Amsterdam. 29, 1920.

$$x_2 = x_3 = x_4 = 0 \quad (11a) \qquad x_1 = x_3 = x_4 = 0 \quad (11b)$$

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0 \quad (11c) \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad (11d)$$

są do siebie w punkcie P prostopadłe. Równanie (9) wraz z równaniami (11) wskazują, że w sąsiedztwie pnnktu P oznaczamy spółrzędne punktów świata zapomocą tych samych pomiarów przestrzenno-czasowych jak w teorji względności szczególnej. W układzie określonym w ten sposób ważną więc jest w nieskończenie małej dziedzinie stanowiącej sąsiedztwo punktu P — szczególna teorja względności. Wskazuje na to zarówno równanie ruchu punktu materjalnego, które w rozważanej dziedzinie przybiera postać

$$\frac{d^2 x^i}{d s^2} = 0, \tag{12}$$

jak i sposób oznaczenia spółrzędnych danego układu. W rzeczywistości będziemy mogli dziedzinę tę uważać za tem większą, im mniejsza będzie zmienność składowych g_{ik}.

Nazwijmy układ, do którego tą drogą doszliśmy, układem lokalnym i weźmy pod uwagę dziedzinę ograniczoną warunkiem stosowalności teorji względności szczególnej. W układzie tym posiada forma kwadratowa postać:[1]

$$ds^2 = (dX^4)^2 - \{(dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2\} \tag{13}$$

(spółrzędne w układzie lokalnym oznaczamy przez X^1, X^2, X^3, X^4), a ds^2 jest. w znaczeniu szczególnej teorji względności mierzalną wielkością, t. zn. za pomocą idealnego ciała sztywnego, gdy $ds^2 < 0$, za pomocą idealnego zegara, gdy $ds^2 > 0$. Pomijamy tutaj trudności, związane z pojęciem i definicją idealnego ciała sztywnego i idealnego zegara w teorji względności, których omówienie wymaga obszerniejszych rozważań. Sądzę jednakże, że z tej strony nie zagraża teorji względności sprzeczność.

Z układu lokalnego przechodzimy do wybranego dowolnie układu pierwotnego zapomocą przekształceń linjowych, jednorodnych:

$$dX^i = \sum_{k=1}^{4} \alpha_k^i \, dx^k \tag{14}$$

z czego wynika po podstawieniu do (13)

$$ds^2 = \sum_{ik=1}^{4} g_{ik} \, dx^i \, dx^k .$$

[1]) Einstein: Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie: Annalen d. Physik. Bd. 49. 1916.

Możemy więc zawsze do odpowiedniego układu i do odpowiednio ograniczonej dziedziny odnieść te wszystkie prawa, których znajomość daje nam szczególna teorja względności. Przykład ten wykazuje, jak w wyborze układu i ten czynnik—znajomość jedynie praw szczególnych—rolę odegrać może.

Uogólnienie praw fizycznych, prowadzące od ważności ich dla pseudoeuklidesowego kontynuum czterowymiarowego do czterowymiarowego kontynuum Riemanna, napotyka na liczne trudności zarówno logiczne, jak i formalne. Otrzymane prawa posiadają często zawiłą strukturę matematyczną, ograniczającą znacznie możliwość dedukcji.

§ 3. O wektorach i tensorach przestrzennych.

Wyszczególnienia układu dokonywamy na podstawie wygłoszonego poprzednio twierdzenia, że czterem składowym z pośród g_{ik} możemy nadać dowolną wartość w całym rozważanym obszarze.

Niechaj równania, prowadzące z układu lokalnego do układu obranego, posiadają następujący kształt:

$$dX^i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_i^k \, dx^k \qquad i = 1, 2, 3, \qquad dX^4 = \alpha_4^4 \, dx^4 \tag{15}$$

gdzie α_i^k są funkcjami zmiennych x^1, x^2, x^3, x^4. Otrzymaną w ten sposób formę metryczną

$$ds^2 = \sum_{ik=1}^{4} g_{ik} \, dx^i \, dx^k$$

będzie charakteryzowała równość:

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0. \tag{16}$$

a więc

$$ds^2 = g_{44}(dx^4)^2 + \sum_{ik=1}^{3} g_{ik} \, dx^i \, dx^k = g_{44}(dx^4)^2 - d\sigma^2, \tag{17}$$

gdzie $d\sigma^2$ ma znaczenie odległości przestrzennej. Układ, dla którego spełniony jest warunek (16), posiada tę charakteryzującą go własność, że możemy jego formę metryczną przedstawić jako sumę dwóch składników, z których jeden $-d\sigma^2-$ nie zawiera dx^4 i jest niezmienny wobec dowolnych przekształceń zmiennych x^1, x^2, x^3, pod warunkiem, że zmiennej x^4 nie przekształcamy, a równania przekształcające dla x^1, x^2, x^3, są od x^4, niezależne. Przekształcenia, posiadające powyższe własności, nazwijmy przekształceniami czysto-przestrzennemi.

Przez przekształcenie czysto-czasowe rozumieć będziemy przekształcenie zmiennej x^4, kształtu $x^4 = f(x^{4'})$.

Jasne jest, że zarówno przekształcenia czysto-przestrzenne, jak i przekształcenia czysto-czasowe nie naruszają związków (16).

Udowodnimy pewne proste związki, które odnoszą się wyłącznie do układów, dla których spełniona jest równość (16), a z których będziemy wkrótce korzystali. Napiszemy w tym celu równanie przekształcające dla wektorów i tensorów stopnia drugiego, prowadzące od układu (X) do układu (X').

$$A^{\sigma'} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} \quad (18a) \qquad A_{\sigma'} = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\sigma'}} A_{\nu} \quad (18b)$$

$$A^{\sigma\tau'} = \sum_{\mu\nu=1}^{4} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\nu}} A^{\mu\nu} \quad (19a) \qquad A_{\sigma\tau'} = \sum_{\mu\nu=1}^{4} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\sigma'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\tau'}} A_{\mu\nu} \quad (19b)$$

Ze względu na to, że $d\sigma^2$ jest formą metryczną trójwymiarowej przestrzeni, możemy w układzie tym uważać a_1, a_2, a_3, jako składowe wektora przestrzennego, jeżeli

$$\sum_{i1}^{3} a_i\, dx^i = -\sum_{ik=1}^{3} a_i\, g^{ik}\, dx_k = -\sum_{ik=1}^{3} a^i\, g_{ik}\, dx^k = \sum_{i1}^{3} a^i\, dx_i \quad (20)$$

jest niezmiennikiem wobec dowolnych przekształceń czysto-przestrzennych.

Analogicznie definjujemy tensor przestrzenny t^{ik} $i, k = 1, 2, 3$ przez niezmienność wielkości:

$$\sum_{ik=1}^{3} t_{ik}\, dx^i\, dx^k = \sum_{ik=1}^{3} t^{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (21)$$

wobec dowolnych przekształceń czysto-przestrzennych.

Z łatwością stwierdzić możemy prawdziwość następujących twierdzeń, prawdziwych jedynie dla układu, dla którego spełnione są związki (16).

a) Jeżeli A^1, A^2, A^3, A^4, są składowemi wektora, to A^1, A^2, A^3, są składowemi wektora przestrzennego.

Przy przekształceniach czysto przestrzennych zachodzą bowiem, jak z (18 i 19) oraz z związku pomiedzy składowemi współzmiennemi a przeciwzmiennemi wynika, następujące związki:

$$A^4 = A^{4'};\; g_{44} = g_{44}';\; g_{44} dx^4 = dx_4, \quad (22)$$

niezmienny więc charakter związków:

$$g_{44}\, A^4\, dx^4 + \sum_{ik=1}^{3} g_{ik}\, A^i\, dx^k = A^4\, dx_4 + \sum_{i=1}^{3} A^i\, dx_i,$$

dowodzi ze względu na (22) prawdziwości twierdzenia

b) Jeżeli T^{ik} są składowemi przeciwzmiennemi tensora stopnia drugiego to:

1. T^{44} jest skalarem, związki bowiem

$$T^{44} = T^{44'}$$

wynikają ze wzorów przekształcających oraz ze związków pomiędzy tensorami spółzmiennemi a przeciwzmiennemi.

2. T^{41}, T^{42}, T^{43}, są składowemi wektora przestrzennego.

Z równań (19a, b) wynika, że T^{41}, T^{42}, T^{43} przekształcają się, jak składowe wektora przestrzennego, gdyż

$$\frac{\partial x^{4'}}{\partial x^i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial x^{4'}}{\partial x^4} = 1\,.$$

3. T^{ik} $i, k = 1, 2, 3$, są składowemi tensora przestrzennego.

Z równości

$$\sum_{ik=1}^{4} T^{ik}\, dx_i\, dx_k = T^{44}\, dx_4^2 + \sum_{i=1}^{3} (T^{i4}\, dx_i + T^{4i}\, dx_i)\, dx_4 + \sum_{ik=1}^{3} T^{ik}\, dx_i\, dx_k$$

wynika, ze względu na udowodniony niezmienny charakter dwóch czynników pierwszych strony prawej, niezmienny charakter wyrażenia $\sum_{ik=}^{3} T^{ik}\, dx^i\, dx_k$.

Analogiczne twierdzenia udowodnić można dla tensorów spółzmiennych i mieszanych.

Do układu rozważanego doszliśmy, nadając według (16) trzem z pośród g_{ik} określone wartości. Możemy jednak układ jeszcze bardziej wyszczególnić, żądając, by prócz równości (16) zachodziła równość $g_{44} = g^{44} = 1$, która wyraża, że spórzędną czasu wyznaczamy zapomocą tego samego zegara, którym wyznaczamy czas własny t. zn. za pomocą zegara idealnego.

§ 4. Pole statyczne i kulisto-symetryczne.

Ważnym przypadkiem rozważanym w ogólnej teorji względności, na którym opierają się wszystkie próby doświadczalnego jej sprawdzania, jest przypadek pola statycznego. Pole metryczne jest statyczne, jeżeli istnieje układ przestrzenno-czasowy, dla którego g_{ik} są od x^4 niezależne, t. zn. forma metryczna przyjmuje postać:

$$ds^2 = f^2\, dx^{4^2} - \sum_{ik=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{23}$$

gdzie:

$$\frac{\partial f}{\partial x^4} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^4} = 0, \qquad \sum_{ik=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k = d\sigma^2.$$

Układ, dla którego statyczne pole metryczne posiada postać (23), nazywamy układem statycznym. Układ pozostaje statycznym przy przekształceniach czysto-przestrzennych, oraz linjowych przekształceniach czysto-czasowych[1].

Jedynym przypadkiem szczególnym, pozwalającym dotychczas na ścisłe rozwiązanie t. zn. na wyznaczenie funkcji g_{ik} z równań różniczkowych (3), jest przypadek pola kulisto-symetrycznego. Pole jest kulisto symetryczne, jeżeli dla odpowiednio wybranego układu statycznego zarówno f, jak i $d\sigma^2$ są niezmienne wobec przekształceń linjowych ortogonalnych. Równania (3), rozwiązane dla tego szczególnego przypadku, dają nam w przestrzeniach wolnych od materji dla g_{ik} następujące wartości:[2].

$$f^2 = \frac{r-\alpha}{r}$$

$$\gamma_{ik} = \delta_i^k + l x^i x^k$$

gdzie:

$$\delta_i^k = \begin{matrix} 1 \text{ dla } i = k \\ 0 \text{ dla } i \neq k \end{matrix}, \qquad l = \frac{\alpha}{(r-\alpha)\, r^2}; \; r^2 = \sum_{i=1}^{3} x^{i^2}.$$

Forma kwadratowa przybiera postać

$$ds^2 = \frac{r-\alpha}{r}\, dx^{4^2} - \sum_{i=1}^{3} dx^{i^2} - \left(\sum_{i=1}^{3} l x^i\, dx^i\right)^2$$

α jest wielkością stałą, której wartość oblicza się na podstawie warunku, aby wyniki ogólnej teorji względności były w pierwszem przybliżeniu zgodne z prawem grawitacji Newtona.

Na podstawie założenia, że pole słońca jest kulisto-symetryczne, wytłumaczyła teorja względności w sposób naturalny odstępstwa pomiędzy obserwacją a wynikami klasycznej teorji w ruchu planety Merkurego, a wynik ten stanowi fakt, przemawiający bezsprzecznie za teorją względności.

---

[1]) Weyl: Raum, Zeit, Materie. Str. 218. 4-te wydanie.
[2]) Weyl: Raum, Zeit, Materie. Str, 229. Hilbert. l. c. II. Mitteilung.

§ 5. Pole elektro magnetyczne.

Równania Maxwella dla próżni posiadają w ogólnej teorji względności następującą postać niezmienną wobec dowolnych przekształceń:[1].

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^e} = 0. \tag{24 a}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \sqrt{-g}\, F^{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{24 b}$$

Równania (24 a) dają nam związek:

$$\text{curl } E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\text{div } H = 0,$$

jeżeli przez składowe spółzmienne F^{ik} skośnosymetrycznego tensora rozumieć będziemy, podobnie jak w szczególnej teorji względności

$$F_{14} = E_x \qquad F_{24} = E_y \qquad F_{34} = E_z$$

$$F_{23} = H_x \qquad F_{31} = H_y \qquad F_{12} = H_z,$$

a za x^4 podstawimy $c.\ t.$

W równaniach (24 b) oznaczają F^{ik} składowe przeciwzmienne, związane ze składowemi F^{ik} za pomocą równości

$$F^{ik} = \sum_{\mu\nu=1}^{4} g^{\mu i} g^{\nu k} F_{\mu\nu}. \tag{25}$$

Równania (24 b) przechodzą w przypadku, gdy

$$g_{ik} = 0 \quad \text{dla } i \neq k$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = +1,$$

w równania

$$\text{rot } H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\text{div } E = 0.$$

---

[1]) Einstein: Grundlagen der allgemeinen Relativiätstheorie, l. c.

Z równań (24a, b) otrzymać możemy jak wykazał Einstein[1]) następujące związki

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial (T_\sigma^\nu \sqrt{-g})}{\partial x^\nu} - \sum_{\mu\nu\tau=1}^{4} \tfrac{1}{2} g^{\tau\mu} \sqrt{-g}\, \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\, T_\tau^\nu = 0\,. \tag{26}$$

a T_σ^τ są określone przez równości

$$T_\sigma^\nu = -\sum_{\alpha=1}^{4} F_{\sigma\alpha} F^{\nu\alpha} + \sum_{\alpha\beta=1}^{4} \tfrac{1}{4}\, \delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\,. \tag{27}$$

T_σ^ν jest tensorem symetrycznym stopnia drugiego (t. zn. $T^{ik} = T^{ki}$ oraz $T^{ik} = T^{ki}$) tym samym tensorem, który występuje w równaniach zasadniczych (3) w przypadku, gdy obok pola grawitacyjnego istnieje pole elektromagnetyczne. Wzór (26) przechodzi w przypadku szczególnej teorji względności w równość, wyrażającą zasadę zachowania energji-impulsu w polu elektromagnetycznem. W tym przypadku oznaczają składowe T_k $(i, k=1, 2, 3)$ ciśnienia Maxwella, gdy $i=4$ $k=1, 2, 3$, wektor Poyntinga, a wreszcie $T^4{}_4$ oznacza gęstość energji pola elektro-magnetycznego.

Równania (24a) są spełnione, jeżeli przyjmiemy

$$F_{ik} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x^i} \tag{28}$$

gdzie ψ_i są składowemi spółzmiennemi cztero-potencjału wektorowego.

Metoda rozwiązania równań (24b), która w przypadku szczególniej teorji względności prowadziła do równania fali, prowadzi tu do zawiłego pod względem matematycznym układu równań cząstkowych [2]). Możemy jednakże analogicznie, jak w szczególnej teorji względności w przypadku ośrodka niejednorodnego, zastosować i tutaj upraszczające założenie wielkich częstości i na tej podstawie wysnuć pewne wnioski o zachodzących związkach.

Niechaj F_{ik} będą określone przez równość

$$F^{ik} = \overset{o}{F}{}^{ik}\, e^{i\varphi};\quad F_{ik} = \overset{o}{F}_{ik}\, e^{i\varphi};\quad \overset{o}{F}{}^{ik} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} \overset{o}{F}_{\alpha\beta}\, g^{\alpha i} g^{\beta i} \tag{29}$$

Nazwijmy bezwzględną wartość pochodnej cząstkowej $\frac{\partial \varphi}{\partial x^4}$, która w ogólnym przypadku może być funkcją punktów świata, częstością, i uczyńmy co do

[1]) Einstein, l. c.

[2]) Laue. Optische Betrachtungen. Phys. Zeitschrift. 1920.

wielkości występujących w (29) następujące założenia: jeżeli $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ nie są zerem, to rosną w danym punkcie świata co do bezwzględnej wartości nieograniczenie wraz z nieograniczenie rosnącą częstością. Funkcje $\overset{o}{F}_{ik}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, g_{ik}, mogą być funkcjami punktów świata, pochodne ich są jednak co do wartości bezwzględnej dla dostatecznie wielkich częstości bardzo małe w stosunku do pochodnych $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$.

Jeżeli podstawimy (29) do (24a, b) i jeżeli zgodnie z założeniami zaniedbamy dla bardzo wielkich częstości wyrażenia $\frac{\partial \overset{o}{F}_{ik}}{\partial x^e}$, $\frac{\partial \overset{o}{F}{}^{ik}}{\partial x^e}$, $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^e}$, otrzymamy następujący układ równań:

$$\overset{o}{F}_{ke} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \overset{o}{F}_{ei} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \overset{o}{F}_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^e} = 0\,, \tag{30a}$$

$$\sum_{ik=1}^{4} \overset{o}{F}{}^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = 0\,. \tag{30b}$$

Związki powyższe posiadają charakter niezmienny.

Równania (30a) zostają natychmiast spełnione, jeżeli przyjmiemy na $\overset{o}{F}_{ke}$ wartości

$$\overset{o}{F}_{ke} = \overset{o}{\psi}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x^e} - \overset{o}{\psi}_e \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \tag{31}$$

a $\overset{o}{\psi}_i$ niechaj nadto spełniają warunek

$$\sum_{k=1}^{4} \overset{o}{\psi}{}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = 0\,. \tag{32a}$$

Zarówno (31) jak i (32a) otrzymujemy w przypadku wielkich częstości jako przybliżenie z równań

$$F_{ke} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x^e} - \frac{\partial \psi_e}{\partial x^k}\,, \tag{33a}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \sqrt{-g}\;\psi^k}{\partial x^k} = 0\,. \tag{33b}$$

Zakładając bowiem, że

$$\psi_k = \overset{o}{\psi}_k\, e^{i\varphi} \ \text{ i } \ \psi^k = \overset{o}{\psi}{}^k\, e^{i\varphi} \ \text{ i } \ \overset{o}{\psi}{}^e = \sum_{i=1}^{4} \overset{o}{\psi}_i\, g^{ie}$$

oraz, że ψ^o_k posiada własności, któreśmy powyżej co do F^o_{ik} założyli, otrzymujemy, po podstawieniu do równań (33a, b) i przejściu do rosnących częstości, równania (31) i (32).

Podstawmy (31) do równań (30b), a otrzymamy, ponieważ

$$F_o^{ik} = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} g^{\mu i} g^{\nu k} \left(\psi^o_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - \psi^o_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right),$$

następujący układ równań linjowych jednorodnych:

$$\sum_{\mu,\nu,k,=1}^{4} \left(\psi^o_\mu g^{i\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} g^{k\nu} - g^{\mu i} g^{\nu k} \psi^o_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) = 0; \; i = 1, 2, 3, 4 \quad (34)$$

$$\sum_{ek=1}^{4} \psi^o_e g^{ek} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = 0. \quad (32\text{b})$$

Konieczny i wystarczający warunek istnienia różnych od zera wartości ψ^i_o, czyniących zadość powyższym równaniom, będzie spełniony, jeżeli rząd macierzy rozważanego układu równań nie będzie większy od 3. Musimy więc sprawdzić, czy wszystkie wyznaczniki stopnia czwartego macierzy

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{matrix} \right\|, \quad (35)$$

gdzie

$$a_{ki} = \sum_{k,\nu=1}^{4} \left\{ g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} g^{ik} - \left(g^{\mu i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) \left(g^{k\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \right) \right\} \; i, k = 1, \ldots, 4 \quad (36)$$

$$a_{5i} = \sum_{k=1}^{4} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

równa się zeru.

Widoczne jest, że wyznacznik utworzony z czterech pierwszych wierszy równa się zeru. Wynika to bez rachunku z faktu, że równanie czwarte równań (30b) otrzymać możemy z trzech pierwszych równań przez kolejne pomnożenie ich przez $\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}$ i dodanie.

Oznaczmy przez G_i wyznaczniki stopnia czwartego powstałe z macierzy (35) przez skreślenie i-tego wiersza. Jak rachunek wykazuje, wartość ich wynosi

$$G_i = (-1)^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \left(\sum_{lk=1}^{4} g^{lk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right)^3 \frac{1}{g}. \quad i = 1, \ldots, 4 \quad (37)$$

Warunkiem więc koniecznym i wystarczającym, ażeby G_i równało się zeru, ażeby więc układ równań (30b) posiadał rozwiązanie, jest:

$$\sum_{ik=1}^{4} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = 0. \quad (38)$$

Równość (38) wyraża, że wektor naszej czterowymiarowej rozmaitości o składowych $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ jest wektorem zerowym. Jeżeli przez kierunek promienia świetlnego będziemy w danym punkcie świata uważali kierunek wektora o składowych $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, dojdziemy do analogicznego wniosku, jak w szczególnej teorji względności: wektor wskazujący kierunek promienia świetlnego jest wektorem zerowym.

Podobnie, jak w szczególności teorji względności, uważajmy krzywą

$$x = x^i(p), \quad (39)$$

która w każdym punkcie świata posiada kierunek zgodny z kierunkiem promienia świetlnego, która więc spełnia równanie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{1}{\lambda} \frac{dx_i}{dp}. \quad (40)$$

Możemy udowodnić, że z warunku (38) i (40) wynika, iż linja (39) jest linją geodetyczną zerową[1] t. zn., że:

$$\sum_{ik=1}^{4} g^{ik} dx_i dx_k = 0, \quad (41)$$

$$\frac{d^2 x^i}{dp^2} + \sum_{k\nu=1}^{4} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ i \end{Bmatrix} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = 0. \quad (42)$$

Natychmiast stwierdzić możemy, że równanie (41) rzeczywiście zachodzi.

[1]) Por. Laue: l. c.

Ze względu na zupełną dowolność w wyborze parametru p, możemy przez odpowiednią jego zmianę uzyskać, że $\lambda = 1$. Udowodnimy na razie w tym szczególnym przypadku, że (39) są linjami geodetycznemi.

Oznaczmy $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \xi_i$. Opieramy się na równości

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x^i} (\xi^k \xi_k) = \sum_{k=1}^{4} \xi^k \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \sum_{rs=1}^{4} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} \xi^r \xi^s = 0. \tag{43}$$

Równość ta wynika z następującego przekształcenia:

$$\sum_{rs=1}^{4} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} \xi^r \xi^s = \sum_{rs=1}^{4} \frac{\partial (g_{rs} \xi^r \xi^s)}{\partial x^i} - 2 \sum_{k=1}^{4} \xi_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = -2 \sum_{i=1}^{4} \xi_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i},$$

zaś

$$\sum_{k=1}^{4} \xi_k \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = - \sum_{k=1}^{4} \xi^k \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}.$$

Dodajmy do (43) równość

$$\sum_{k=1}^{4} \xi^k \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} \right) = 0,$$

a otrzymamy

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} \xi^k - \sum_{rs=1}^{4} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} \xi^r \xi^s = 0. \tag{44}$$

Po podstawieniu (40) dla $\lambda = 1$ do ostatniej równości, otrzymamy równości:

$$\frac{d^2 x_i}{dp^2} - \frac{1}{2} \sum_{is=1}^{4} \frac{d g_{rs}}{\partial x^i} \frac{dx^r}{dp} \cdot \frac{dx^s}{dp} = 0, \tag{45}$$

które jest równaniem linji geodetycznej.

Do ogólnego przypadku, gdy λ jest funkcją punktów świata, przejść możemy przez zmianę parametru:

$$p' = f(p);$$

gdzie $f(p)$ spełnia równanie

$$\frac{df}{dp} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ponieważ zaś geodetycznym linjom zerowym przysługuje własność, że postać równania (45) nie zależy od wyboru parametru, twierdzenie powyższe jest prawdziwe, gdy λ jest funkcją punktów świata.

Otrzymany warunek rozwiązalności równań (38) zastosujmy do macierzy (35), a elementy jej przybierają wartość:

$$a_{ik} = - \sum_{\mu\nu=1}^{4} \left(g^{\mu i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) \left(g^{\nu k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right); \; i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Przekonywamy się, że wszystkie wyznaczniki stopnia drugiego i trzeciego macierzy (35) są identycznie równe zeru. Macierz (35) jest więc rzędu pierwszego, t. zn. układ równań (34) wyznacza jednę z pośród składowych ψ_i, jeżeli trzy inne składowe są podane. Wnioski, otrzymane w przypadku szczególnej teorji względności, dadzą się uogólnić częściowo jedynie w specjalnie obranym układzie lub w przypadku pola statycznego.

W układzie, dla którego spełniona jest równość (16), jest natężenie pola elektrycznego według udowodnionych twierdzeń wektorem przestrzennym, natężenie zaś pola magnetycznego tensorem przestrzennym. Tensor przestrzenny skośno-symetryczny przekształca się przy przekształceniach ortogonalnych linjowych, jak wektor. Ogólne przekształcenia przestrzenne ujawniają jego charakter tensorowy. Ostatnie z równań (30 a) wyraża w przypadku układu przestrzenno-czasowego, że wektory F_{4i} $(i = 1, 2, 3)$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ $(i = 1, 2, 3)$ są do siebie prostopadłe, t. zn., że wektor wyrażający natężenie pola elektrycznego jest prostopadły do przestrzennej normalnej do powierzchni równych faz, której kierunek uważać będziemy w przypadku tego układu za równoległy do kierunku przestrzennego promienia świetlnego.

§ 6. Pole elektromagnetyczne w polu statycznem.

Równanie (38) przybiera w przypadku pola statycznego następującą postać:

$$\sum_{ik=1}^{3} \gamma^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^4} \right)^2 \frac{1}{f^2}, \tag{46}$$

gdzie zarówno γ^{ik} jak i f są jedynie funkcjami miejsca. W tym więc przypadku zachowuje się promień świetlny, jak w ośrodku niejednorodnym, w którym posiada prędkość f, i który wypełnia przestrzeń nieeuklidesową.

Jedynie w przypadku układu statycznego ma pojęcie prędkości światła zupełnie określone znaczenie. Jest nią spółczynnik f, gdyż

$$f = \frac{d\sigma}{dx^4}, \; (\text{gdy } ds^2 = 0),$$

a dozwolone przekształcenia czysto-przestrzenne nie zmieniają wartości spółczynnika f, wprowadzenie zaś nowej zmiennej $x^{4\prime}$, która może być związana z x^4 jedynie zależnością linjową, oznacza wprowadzenie nowej jednostki czasu, a nie zmianę mechanizmu zegara, którym mierzymy czas. Przy przyjętym mechanizmie mierzenia czasu w układzie statycznym zachodzi udowodnione przez Lauego twierdzenie[1], iż częstość drgań promienia świetlnego jest niezależna od spółrzędnych punktów świata. Jeżeli więc w jakimś punkcie A przestrzeni znajduje się źródło światła monochromatycznego, to jako mechanizm do oznaczenia czasu w jakimkolwiek punkcie B służyć może częstość drgań świetlnych w tym punkcie, jeżeli źródło światła znajduje się stale w punkcie A.

Na tej to własności przysługującej jedynie układowi statycznemu, iż zarówno prędkość światła, jak i sposób mierzenia czasu posiada ściśle określone znaczenie, polega teorja przesunięcia widma słońca w kierunku barwy czerwonej, co do której eksperymentalnego sprawdzenia, doświadczenie nie wypowiedziało jeszcze ostatniego słowa.

W polu statycznem ważne jest również twierdzenie Optyki geometrycznej, iż w każdym ośrodku równanie warjacyjne toru promienia świetlnego posiada postać:

$$\partial \int \frac{d\sigma}{f} = 0,$$

gdzie przez $d\sigma$ oznaczamy nieskończenie mały element na drodze promienia świetlnego, a przez f prędkość światła. Twierdzenie to jest również ważne w teorji względności dla pola statycznego, jeżeli $d\sigma$, f, interpretować będziemy według przyjętych oznaczeń[2].

Przytoczony poprzednio związek prostopadłości wektora siły elektrycznej do kierunku przestrzennego promienia świetlnego ważny dla wszelkich układów przestrzenno-czasowych, zachodzl również dla układu statycznego. Udowodnimy obecnie, że dla układu statycznego istnieje nadto wektor przestrzenny odpowiadający wektorowi Poyntinga, a kierunek jego jest równoległy do kierunku przestrzennego promienia świetlnego.

Czwarta z pośród równości (26) przybiera z uwagi na to, że f, γ_{ik} od x^4 nie zależą, następującą formę:

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial T_4^\nu f \sqrt{\gamma}}{\partial x_\nu} = 0 . \quad \gamma = |\gamma_{ik}|_{i,k=1,2,3} \tag{47}$$

Z poprzednio udowodnionych twierdzeń wynika, że w przypadku pola statycznego zachowują się przy przekształceniach czysto przestrzennych T_4^ν; $\nu = 1, 2, 3$ jak składowe wektora przestrzennego, T_4^4 zaś jak skalar. Poni-

[1]) Laue, l. c.
[2]) Weyl, l. c.

żej wypisane równości oparte na definicji składowych tensorów spółzmiennych i przeciwzmiennych, stwierdzają, że wektory przestrzenne T^{4i} T_4^i, oraz wektory T_{4i} T_i^4 $i = 1, 2, 3$ posiadają ten sam kierunek:

$$T^{4i} = \frac{1}{f^2} T_4^i ; \; T_{4i} = f^2 T_i^4 ,$$

$$\sum_{k=1}^{3} \gamma_{ki} T_4^k = T_{4i} ; \sum_{k=1}^{3} \gamma^{ki} T_k^4 = T^{4i} \qquad 1 = 1, 2, 3 ,$$

oznaczmy:

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma}\, S^\nu &= \sqrt{-g}\, T_4^\nu = f \sqrt{\gamma}\, T_4^\nu \\ \sqrt{\gamma}\, W &= \sqrt{-g}\, T_4^4 = f \sqrt{\gamma}\, T_4^4 , \end{aligned} \tag{48}$$

a otrzymamy z (47):

$$\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial \sqrt{\gamma}\, S^\nu}{\partial x^\nu} = - \frac{\partial \sqrt{\gamma}\, W}{\partial x^4} , \tag{49}$$

Wzór ten jest niezmienny wobec dowolnych przekształceń przestrzennych. S^ν zachowują się więc jak składowe wektora przestrzennego, a W jak skalar. Z równości (49) wynika, że w przypadku pola oraz układu statycznego S^ν ma znaczenie wektora Poytinga, a W gęstości energji.

Powracając do dawnych równań dla fal krótkich (29), otrzymamy po rozwinięciu (27) dla $\nu = 4$; $\sigma = 1, 2, 3$, i zastosowaniu równań (48):

$$S_1 = l\{F^{0}_{31} \underset{0}{F}{}^{43} - F^{0}_{12} \underset{0}{F}{}^{42}\}; \; S_2 = l\{F^{0}_{23} \underset{0}{F}{}^{34} - F^{0}_{21} \underset{0}{F}{}^{41}\}; \; S_3 = l\{F^{0}_{32} \underset{0}{F}{}^{24} - \underset{0}{F}{}^{41} F^{0}_{31}\} \tag{50}$$

gdzie l jest funkcją punktów świata.

Jeżeli uwzględnimy ostatnie z równań (30 a) oraz ostatnie z równań (30 b):

$$\underset{0}{F}{}^{41} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \underset{0}{F}{}^{42} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \underset{0}{F}{}^{43} \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} = 0 ,$$

$$F^{0}_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + F^{0}_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + F^{0}_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} = 0 ,$$

przekonamy się, że wynika z nich bezpośrednio:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} = \lambda \{F^{0}_{31} \underset{0}{F}{}^{43} - F^{0}_{12} \underset{0}{F}{}^{42}\}; \; \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = \lambda \{F^{0}_{23} \underset{0}{F}{}^{34} - F^{0}_{21} \underset{0}{F}{}^{41}\}; \; \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} = \lambda \{F^{0}_{32} \underset{0}{F}{}^{24} - \underset{0}{F}{}^{41} F^{0}_{31}\} . \tag{51}$$

Równości (50) i (51) wskazują, że w granicy dla fal o wielkiej częstości otrzymujemy przepływ energji po torach, które są rzutami geodetycznych linij zerowych rozmaitości czterowymiarowej na naszą przestrzeń.

§ 7. O promieniach świetlnych w polu kulisto-symetrycznem[1].

W § 4-ym przytoczyliśmy formę metryczną dla pola kulisto-symetrycznego. Wykonajmy następujące przekształłcenie czysto przestrzenne

$$x^1 = r\cos\vartheta;\quad x^2 = r\sin\vartheta\cos\varphi;\quad x^3 = r\sin\vartheta\sin\varphi,$$

a otrzymamy, opierając się na formie metrycznej (52):

$$ds^2 = \frac{r-\alpha}{r}\,dx^{4^2} - \frac{r}{r-\alpha}\,dr^2 - r^2\,d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2. \tag{52}$$

Dla r dostatecznie wielkiego w stosunku do α (co w naszym układzie planetarnym, w przestrzeniach wolnych od materji zachodzi), forma ta różni się bardzo mało od formy kwadratowej w pseudo-euklidesowym kontynuum. Spółczynnik przy dx^4 wskazuje, że prędkość światła jest w obranych jednostkach mało różna od jedności.

Stosujemy twierdzenie, że linja świata promienia świetlnego są geodetycznemi linjami zerowemi, t. zn. spełniają warunek:

$$\frac{d^2x^i}{dp^2} + \sum_{\alpha\beta=1}^{4}\left\{ {\alpha\beta \atop i} \right\}\frac{dx^\alpha}{dp}\cdot\frac{dx^\beta}{dp} = 0,$$

lub też:

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^k}{dp}\right) - \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta=1}^{4}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\frac{dx^\alpha}{ds}\cdot\frac{dx^\beta}{ds} = 0, \tag{53}$$

oraz

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\,dx^i\,dx^k = 0,$$

gdzie podstawiamy:

$$x^1 = r;\quad x^2 = \vartheta;\quad x^3 = \varphi;\quad x^4 = x^4.$$

Dla $i=4$ mamy:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{r-\alpha}{r}\frac{dx^4}{dp}\right) = 0,\qquad \frac{r-\alpha}{r}\frac{dx^4}{dp} = \text{const} = A. \tag{54}$$

Dla $i=3$:

$$\frac{d}{dp}\left(r^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dp}\right) = 0,\qquad r^2\sin^2\vartheta\frac{d\varphi}{dp} = \text{const} = B. \tag{55}$$

Równania (54) przedstawiają analogję do całki energji, a (55) do zasady pól w Mechanice klasycznej.

[1]) Por. Hilbert, l. c. II Mitteilung. Laue: Die Relativitätstheorie, Band II od str. 225.

Jako płaszczyznę, na której leży tor promienia świetlnego, obieramy tę, dla której $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, forma (52) redukuje się wówczas dla promienia świetlnego do:

$$\frac{r-\alpha}{r}\,dx^{4^2} = \frac{r}{r-\alpha}\,dr^2 + r^2\,d\varphi^2, \tag{56}$$

a równania (54) i (55) do równań:

$$\frac{r-\alpha}{r}\frac{dx^4}{dp} = 1, \tag{57}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dp} = b. \tag{58}$$

Nadanie stałej w (57) wartości 1 oznacza odpowiedni wybór jednostki, którą mierzymy parametr p.

Przez podstawienie (57) do (56) otrzymujemy:

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + r(r-\alpha)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = 1,$$

a stąd przez podzielenie przez $\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2$ i uwzględnienie równania (58) (gdy $b \neq 0$),

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r(r-\alpha) - \frac{r^4}{b^2} = 0,$$

a wreszcie podstawienie $r = \frac{1}{\rho}$ daje nam równanie różniczkowe:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2 - \alpha\rho^3 - \frac{1}{b^2} = 0, \tag{59}$$

które pozwoli nam w przybliżeniu obliczyć tor promienia świetlnego w polu kulisto-symetrycznem.

Przekonać się możemy, że istnieje wartość na r (oznaczmy ją przez r_0), dla której tor promienia świetlnego jest kołem, t. zn. $\frac{dr}{dp} = 0$.

Podstawmy bowiem do równania linji geodetycznej (53) r w miejsce x^1. Uwzględniając, że w przypadku toru kolistego $\frac{dr}{dp} = 0$, otrzymujemy:

$$r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dx^4}{dp}\right)^2, \tag{60}$$

z formy zaś metrycznej (56):

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 = \frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dx^4}{dp}\right)^2. \tag{61}$$

Dzielimy (61) przez (60), a jako rozwiązanie otrzymanego równania wynika:

$$r_0 = \frac{3}{2}\alpha,$$

a następnie:

$$\frac{d\varphi_0}{dp} = \frac{2}{\alpha\sqrt{3}}, \quad b_0 = \frac{3\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Przybliżone rozwiązanie ważne dla bardzo wielkich odległości znajdujemy, zaniedbując ρ^3. Otrzymujemy wówczas z (59):

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^{\rho} \frac{b\,d\rho}{\sqrt{1-b^2\rho^2}} \tag{62}$$

a stąd:

$$\varphi = \text{arc sin } (b\rho),$$

czyli:

$$r \sin\varphi = b. \tag{63}$$

Jeżeli zinterpretujemy r, φ, b, jak w przestrzeni euklidesowej (co nam dla bardzo wielkich odległości uczynić wolno), widzimy, że b ma znaczenie odległości promienia świetlnego od prostej równoległej do kierunku promienia świetlnego, a przechodzącej przez środek układu, co też pozostaje w zgodzie ze znaczeniem, jakie wielkości b nadaje równanie (58). Promień świetlny, pozostający pod wpływem pola kulisto symetrycznego, biegnie w bardzo wielkiej odległości, jak z (63) wynika, po linji prostej. Np. dla $b_0 = 3\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$ promień świetlny biegnie w wielkich odległościach po prostej, a osiągnąwszy odległość $r_0 = \frac{3}{2}\alpha$, biegnie po kole.

Możemy jednakże przybliżenie w rozwiązaniu równania (59) posunąć o krok dalej.

Wykonajmy bowiem w wyrażeniu:

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^{\rho} \frac{b\,d\rho}{\sqrt{1-b^2\rho^2(1-\alpha\rho)}} \tag{64}$$

zmianę zmiennych za pośrednictwem następujących przybliżonych związków w założeniu, że ρ jest dostatecznie małe:

$$\sigma^2 = b^2\rho^2(1-\alpha\rho), \tag{65}$$

$$b\,d\rho = d\sigma\left(1+\frac{\alpha\sigma}{b}\right), \tag{66}$$

podstawiając (65), (66) do (64) otrzymamy:

$$\varphi = \int_0^{\sigma} d\sigma \frac{\left(1+\frac{\alpha\sigma}{b}\right)}{\sqrt{1-\sigma^2}} = \text{arc sin } \sigma - \frac{\alpha}{b}\sqrt{1-\sigma^2} + \frac{\alpha}{b}. \tag{67}$$

ρ przybiera extremum, gdy $\sigma = 1$. Ponieważ r przybiera wówczas w przybliżeniu wartość b, wnosimy ze względu na (63), że r posiada w tym punkcie minimum.

Dla $\sigma = 1$ mamy:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{b}.$$

Wyrażenie wskazuje na odstępstwo od przypadku przestrzeni euklidesowej. Wiązka promieni równoległych zostaje w okolicy słońca od biegu prostolinijnego odchyloną, poczem przyjmuje znowu kierunek prostolinijny.

Jeżeli przyjmiemy, że zarówno źródło promienia świetlnego (np. gwiazdn), jak i miejsce obserwacji (np. ziemia) są od słońca nieskończenie odległe, to tor promienia świetlnego jest symetryczny względem najkrótszej odległości środka słońca od promienia. Wiązka promieni po przyjęciu kierunku prostolinijnego zostaje względem kierunku pierwotnego odchyloną o kąt $\frac{2\alpha}{b}$. Efekt ten, przepowiedziany przez Einsteina, został rzeczywiście sprawdzony podczas zaćmienia słońca w 1919 r.

Rozważania nasze, stojące na pograniczu pomiędzy Optyką geometryczną, a fizyczną, wskazują, jak z jednej strony możliwe jest uogólnienie związków Optyki geometrycznej w teorji względności, i jak z drugiej strony związki te otrzymujemy przez upraszczające założenia z odpowiednich teoryj fizycznych.

W ogólnej teorji względności odgrywają geodetyczne linje zerowe tę samą zasadniczą rolę, co proste zerowe w szczególnej teorji względności. Miejsce geometryczne wszystkich linij zerowych, przechodzących przez jakiś punkt świata 0, odgranicza podobnie jak w szczególnej teorji względności dziedzinę punktów mogących stać w związku przyczynowym z 0, od punktów, dla których ten przyczynowy związek z 0 istnieć nie może. Propagacja każdego działania, którego podłożem jest eter, może się odbyć jedynie wzdłuż linji geodetycznej zerowej naszego kontynunm czterowymiarowego. Twierdzenie to, które dotyczy zarówno wszelkich zaburzeń elektromagnetycznych, jak i fal grawitacyjnych, nie zostało dotychczas w całej swej ogólności udowodnione. Próby wyjścia poza najprostsze przypadki napotykają na liczne trudności.

W tym stanie rozwoju, w jakim się obecnie ogólna teorja względności znajduje, zachodzi zarówno konieczność stworzenia jej silniejszych podstaw doświadczalnych, jak i wypełnienie luk natury logicznej.