ANTONI PLAMITZER.

O inwolucyjnych pękach krzywych płaskich.

(Sur les faisceaux involutifs de courbes planes).

W pracy niniejszej konstruuję pęk inwolucyjny (pierwszego gatunku) krzywych płaskich wyższych rzędów i ustalam związek rzutowości pomiędzy dwoma takiemi pękami. Po omówieniu własności krzywej płaskiej, utworzonej przez dwa jednokreślne pęki inwolucyjne krzywych, przechodzę do zagadnień Geometrji linji prostej. W tej części mej pracy przyjmuję — na różnych płaszczyznach leżące — dwa, trzy, wzgl. cztery rzutowe pęki inwolucyjne krzywych płaskich i badam kompleks, kongruencję oraz powierzchnię skośną, utworzone przez proste, przecinające homologiczne elementy uważanych pęków. Przy pięciu jednokreślnych pękach inwolucyjnych krzywych, które leżą na różnych płaszczyznach, występuje skończona liczba prostych, przecinających równocześnie pięć odpowiednich krzywych tych pęków.

I.

1. Na dowolnej płaszczyźnie ε przyjmijmy pęk krzywych ν-go rzędu Π $(A^\nu, B^\nu, \ldots)$, który posiada ν^2 pojedyńczych punktów podstawowych P_i $(i=1, \ldots, \nu^2)$. Wiadomo, że pęk promieni, stycznych w dowolnym punkcie P_i do poszczególnych elementów pęku Π, jest rzutowy z przyjętym pękiem krzywych rzędu ν.

Pojedyńczy punkt podstawowy P_i uważajmy za wierzchołek pęku inwolucyjnego promieni n-go stopnia i pierwszego gatunku $P_i\,(a_1 \ldots a_n, (b)_n, \ldots)$, oraz oznaczmy przez Z_ι^ν $(\iota=1,\ldots, n)$ krzywą rzędu ν, należącą do pęku Π a styczną w punkcie P_i do promienia z_ι tego pęku. Jeżeli skonstruujemy w ten sposób krzywe pęku Π, styczne w punkcie P_i do poszczególnych promieni pęku inwolucyjnego o wierzchołku P_i, to otrzymamy: pęk inwolucyjny n-go stopnia i pierwszego gatunku krzywych ν-go rzędu Π $(A_1^\nu \ldots A_n^\nu, (B^\nu)_n, \ldots)$.

Pomiędzy pękami inwolucyjnemi P_i i Π ustanówmy związek tego rodzaju, że każdemu promieniowi z_ι pęku P_i odpowiada n krzywych Z_ι^ν, tworzących grupę $(Z^\nu)_n$ pęku Π, oraz każdej krzywej Z_ι^ν odpowiada n promieni z_ι, należących do grupy $(z)_n$ pęku inwolucyjnego o wierzchołku P_i. Otrzymaliśmy w ten sposób dwa rzutowe pęki inwolucyjne P_i i Π, co wyrazimy symbolem:

$$P_i\,(a_1 \ldots a_n,\ (b)_n,\ (c)_n \ldots) \;\overline{\wedge}\; \Pi\,(A_1^\nu \ldots A_n^\nu,\ (B^\nu)_n,\ (C^\nu)_n, \ldots)$$

lub w skróconej formie: $P_i \,\overline{\wedge}\, \Pi$.

Zupełnie analogicznie, opierając się na zasadzie dwoistości, skonstruować możemy pasmo inwolucyjne n-go stopnia i pierwszego gatunku krzywych klasy ν, jednokreślne z szeregiem inwolucyjnym n-go stopnia i pierwszego gatunku punktów, w których dowolna prosta podstawowa tego pasma styka się z poszczególnemi elementami uważanego pasma krzywych.

2. Na płaszczyźnie ε obierzmy pęk inwolucyjny n_1-go stopnia (pierwszego gatunku) krzywych ν_1-go rzędu $\Pi^1\,(A_1^{\nu_1} \ldots A_{n_1}^{\nu_1},\ (B^{\nu_2})_{n_1},\ (C^{\nu_1})_{n_1}, \ldots)$ rzutowy z pękiem inwolucyjnym promieni $P^1\,(a_1 \ldots a_{n_1},\ (b)_{n_1},\ (c)_{n_1} \ldots)$ stycznych w dowolnym punkcie podstawowym P^1 pęku Π^1 do poszczególnych elementów tego pęku. Przyjmijmy nadto drugi pęk inwolucyjny n_2-go stopnia i pierwszego gatunku krzywych ν_2-go rzędu Π^2 jednokreślny z pękiem inwolucyjnym promieni $P^2\,(a'_1 \ldots a'_{n_2},\ (b')_{n_2},\ (c')_{n_2}, \ldots)$ stycznych w punkcie podstawowym P^2 pęku Π^2 do poszczególnych krzywych tego pęku.

Jeżeli pomiędzy pękami inwolucyjnemi promieni ustanowimy związek rzutowości

$$P^1 \;\overline{\wedge}\; P^2,$$

to tem samem i pomiędzy inwolucyjnemi pękami krzywych Π^1, Π^2 ustalimy jednokreślność w tem rozumieniu tego słowa, że: każdej krzywej Z_{ν_1}, należącej do grupy $(Z^{\nu_1})_{n_1}$ pęku Π^1, odpowie n_2 krzywych ν_2-go rzędu grupy $(Z^{\nu_2})_{n_2}$ pęku Π^2 i wzajemnie każdej krzywej Z^{ν_2} odpowiada n_1 krzywych ν_1-go rzędu, które tworzą grupę $(Z^{\nu_1})_{n_1}$. Przy pomocy jednokreślnych pęków promieni o wierzchołkach P^1 i P^2, skonstruowaliśmy w ten sposób dwa rzutowe pęki inwolucyjne krzywych wyższych rzędów

$$\Pi^1 \;\overline{\wedge}\; \Pi^2.$$

Z rozważań[1] o wyznaczeniu jednokreślności dwóch pęków inwolucyjnych promieni wyższych stopni i pierwszego gatunku wynika bezpośrednio:

Rzutowość dwóch pęków inwolucyjnych wyższych stopni i gatunku pierwszego krzywych płaskich wyższych rzędów

[1]) A. Plamitzer, Przyczynek do syntet. teorji krzywych płaskich i powierzchni prostokreślnych. „Wiadomości matem." T. XVIII i XIX, ust. 27.

jest ustalona wówczas, skoro trzem dowolnym grupom jednej inwolucji podporządkujemy trzy dowolne grupy inwolucji drugiej.

Ponieważ jednak dwie grupy elementów wyznaczają inwolucję pierwszego gatunku, przeto w obu inwolucjach Π^1 i Π^2 obrać możemy dowolnie tylko dwie pary odpowiednich grup: $(A^{\nu_1})_{n_1}$ i $(A^{\nu_2})_{n_2}$, $(B^{\nu_1})_{n_1}$ i $(B^{\nu_2})_{n_2}$. Następnie w każdym z tych pęków inwolucyjnych skonstruujemy dowolną grupę elementów i przyjmiemy dwie w ten sposób otrzymane grupy $(C^{\nu_1})_{n_1}$ i $(C^{\nu_2})_{n_2}$ za dwie odpowiadające sobie grupy jednokreślnych pęków inwolucyjnych Π^1 i Π^2.

3. Przyjmijmy jeszcze raz dwa jednokreślne pęki inwolucyjne krzywych

$$\Pi^1 \;\overline{\wedge}\; \Pi^2,$$

leżące na dowolnej płaszczyźnie ε; odpowiednie krzywe tych pęków przecinają się w punktach krzywej C rzędu $(n_1\nu_1 + n_2\nu_2)$. Dowolna prosta p, która nie przechodzi przez punkty podstawowe P^1 i P^2, przecina pęki Π^1 i Π^2 w dwóch rzutowych szeregach inwolucyjnych punktów $n_1\nu_1$-, $n_2\nu_2$-go stopnia i pierwszego gatunku, posiadających $(n_1\nu_1 + n_2\nu_2)$ elementów zjednoczonych. Punkty zjednoczone, przez które przechodzą homologiczne krzywe jednokreślnych pęków Π^1 i Π^2, są punktami przecięcia się prostej p z badaną krzywą C.

Przez punkt podstawowy P^1 przechodzi jedna krzywa Z^{ν_2} pęku Π^2 i n_1 krzywych, tworzących grupę $(Z^{\nu_1})_{n_1}$ pęku Π^1; punkt P^1 jest zatem elementem n_1-krotnym krzywej C. Wnosimy stąd, że krzywa C posiada ν_1^2 punktów n_1-krotnych P^1 i ν_2^2 punktów n_2-krotnych P^2. W ogólnym przypadku, jeżeli równocześnie w odpowiednich grupach pęków Π^1 i Π^2 nie występują krzywe wielokrotne, to krywa C nie posiada dalszych punktów wielokrotnych. Badana krzywa jest $2\,n_1 n_2 \nu_1 \nu_2 + n_1 \nu_1\,(\nu_1 - 1) + n_2 \nu_2\,(\nu_2 - 1)$-ej klasy i $(n_1\nu_1 - 1)\,(n_2\nu_2 - 1) + \frac{1}{2} n_1 \nu_1 (\nu_1 - 1) + \frac{1}{2} n_2 \nu_2 (\nu_2 - 1)$-ego rodzaju.

Punkty przecięcia się (wzgl. wspólne styczne do) odpowiednich elementów dwóch rzutowych pęków (pasm) inwolucyjnych n_1-go i n_2-go stopnia, gatunku pierwszego, krzywych płaskich rzędu (klasy) ν_1 i ν_2, — utworzą krzywą $(n_1\nu_1 + n_2\nu_2)$-go rzędu (klasy), która posiada ν_1^2 punktów (stycznych) n_1-krotnych i ν_2^2 punktów (stycznych) n_2-krotnych w punktach (stycznych) podstawowych przyjętych pęków (pasm).

4. Na płaszczyźnie ε obierzmy trzy jednokreślne pęki krzywych

$$\Pi^1 \;\overline{\wedge}\; \Pi^2 \;\overline{\wedge}\; \Pi^3,$$

a mianowicie, pęki inwolucyjne n_1-, n_2-, n_3-go stopnia i gatunku pierwszego krzywych rzędów ν_1-, ν_2-, ν_3.

Rzutowe pęki Π^1 i Π^2 utworzą krzywą C rzędu $(n_1\nu_1+n_2\nu_2)$, z ν_1^2 punktami n_1-krotnemi P^1 i ν_2^2 punktami n_2-krotnemi P^2. Podobnie pęki $\Pi^2 \barwedge \Pi^3$ utworzą krzywą K $(n_2\nu_2+n_3\nu_3)$-go rzędu, która posiada ν_2^2 punktów n_2-krotnych P^2 i ν_3^2 punktów n_3-krotnych P^3. Krzywe C i K — oprócz ν_2^2 wspólnych punktów n_2-krotnych — posiadają jeszcze

$$(n_1\nu_1+n_2\nu_2)(n_2\nu_2+n_3\nu_3)-\nu_2^2 n_2^2 = n_1 n_2 \nu_1 \nu_2 + n_2 n_3 \nu_2 \nu_3 + n_3 n_1 \nu_3 \nu_1$$

punktów przecięcia. Z łatwością zauważymy, że przez każdy z otrzymanych punktów przecięcia się krzywych C i K przechodzą równocześnie trzy odpowiadające sobie krzywe uważanych pęków inwolucyjnych.

Trzy rzutowe pęki inwolucyjne n_1-, n_2-, n_3-go stopnia i pierwszego gatunku krzywych ν_1-, ν_2-, ν_3-go rzędu, leżące na dowolnej płaszczyźnie, posiadają tę własność, że istnieje w ogólności $(n_1 n_2 \nu_1 \nu_2 + n_2 n_3 \nu_2 \nu_3 + n_3 n_1 \nu_3 \nu_1)$ takich punktów, przez które przechodzą trzy odpowiednie krzywe uważanych pęków.

Z tem twierdzeniem dwoiście związane jest następujące *twierdzenie*:

Dla trzech jednokreślnych pasm inwolucyjnych n_1-, n_2-, n_3-go stopnia krzywych ν_1-, ν_2-, ν_3-ej klasy, leżących na wspólnej płaszczyźnie, istnieje $(n_1 n_2 \nu_1 \nu_2 + n_2 n_3 \nu_2 \nu_3 + n_3 n_1 \nu_3 \nu_1)$ prostych, stycznych równocześnie do trzech homologicznych krzywych przyjętych pasm.

II.

5. Przyjmijmy dwa rzutowe pęki inwolucyjne n_1-, n_2-go stopnia i pierwszego gatunku krzywych ν_1-, ν_2-go rzędu

$$\Pi^1 \barwedge \Pi^2$$

leżące odpow. na dwóch różnych płaszczyznach π_1 i π_2. Proste, przecinające homologiczne krzywe tych pęków, utworzą kompleks promieni stopnia $(n_1\nu_1+n_2\nu_2)$.

Dowolna płaszczyzna ε, która nie przechodzi przez żaden punkt podstawowy pęków Π^1 i Π^2, przecina bowiem te pęki krzywych w dwóch jednokreślnych szeregach inwolucyjnych $n_1\nu_1$-, $n_2\nu_2$-go stopnia punktów na podstawach $p_1 \equiv \pi_1\varepsilon$ i $p_2 \equiv \pi_2\varepsilon$. Utworem tych szeregów jest w ogólności *krzywa kompleksu* klasy $(n_1\nu_1+n_2\nu_2)$, rzędu $2n_1n_2\nu_1\nu_2$ i rodzaju $(n_1\nu_1-1) \cdot (n_2\nu_2-1)$, ze styczną $n_1\nu_1$-krotną p_1, oraz ze styczną $n_2\nu_2$-krotną p_2. Skoro z dowolnego punktu P rzucimy pęki krzywych Π^1 i Π^2, to otrzymamy dwa rzutowe współwierzchołkowe pęki inwolucyjne n_1-, n_2-go stopnia powierzchni stożkowych ν_1-, ν_2-go rzędu, które (por. ust. 3) utworzą w ogólności *stożek kompleksu* rzędu $(n_1\nu_1+n_2\nu_2)$, z ν_1^2 tworzącemi n_1-krotnemi PP^1 i ν_2^2 tworzącemi n_2-krotnemi PP^2 (przechodzącemi przez punkty podstawowe P^1 i P^2 pęków Π^1 i Π^2).

Proste, przecinające odpowiednie krzywe dwóch rzutowych pęków inwolucyjnych n_1-, n_2-go stopnia i pierwszego gatunku krzywych ν_1-, ν_2-go rzędu, które leżą na dwóch różnych płaszczyznach π_1 i π_2 — utworzą kompleks promieni stopnia $(n_1\nu_1+n_2\nu_2)$. Promienie $n_1\nu_1$-krotne kompleksu tworzą układ płaski π_1, a promienie $n_2\nu_2$-krotne układ płaski π_2. Promienie n_1- (wzgl. n_2-)krotne kompleksu są elementami ν_1^2 (wzgl. ν_2^2) wiązek, których wierzchołki schodzą się z punktami podstawowemi przyjętych pęków krzywych.

Weźmy pod uwagę płaszczyznę ε, która przechodzi przez punkt podstawowy P^1 pęku krzywych Π^1. Płaszczyzna ta przecina uważane pęki $\Pi^1 \barwedge \Pi^2$ w dwóch jednokreślnych szeregach inwolucyjnych $n_1(\nu_1-1)$-go i $n_2\nu_2$-go stopnia o podstawach $p_1 \equiv \varepsilon\pi_1$ i $p_2 \equiv \varepsilon\pi_2$, które utworzą krzywą kompleksu klasy $(n_1\nu_1+n_2\nu_2-n_1)$, rzędu $2n_1n_2(\nu_1-1)\nu_2$ i rodzaju $(n_1\nu_1-n_1-1)(n_2\nu_2-1)$, ze styczną $n_1(\nu_1-1)$-krotną p_1 i styczną $n_2\nu_2$-krotną p_2. Na płaszczyźnie ε leży nadto pęk (o wierzchołku P^1) promieni n_1-krotnych naszego kompleksu.

Z łatwością zauważymy, że płaszczyzna ε, przechodząca przez dwa punkty podstawowe P^1 i P^1 pęku Π^1, zawiera: $n_1\nu_1$-krotny promień P^1P^1 kompleksu, dwa pęki promieni n_1-krotnych kompleksu o wierzchołkach P^1 i P^1, oraz krzywą kompleksu klasy $(n_1\nu_1+n_2\nu_2-2n_1)$, rzędu $2n_1n_2(\nu_1-2)\nu_2$ i rodzaju $(n_1\nu_1-2n_1-1)(n_2\nu_2-1)$, ze styczną $n_1(\nu_1-2)$-krotną $p_1 \equiv \varepsilon\pi_1$ i styczną $n_2\nu_2$-krotną $p_2 \equiv \varepsilon\pi_2$.

Na płaszczyźnie ε, przechodzącej przez punkty podstawowe P^1 i P^2 pęków krzywych Π^1 i Π^2, leży pęk promieni n_1-krotnych o wierzchołku P^1 kompleksu, pęk promieni n_2-krotnych o wierzchołku P^2, promień osobliwy P^1P^2, oraz krzywa kompleksu $(n_1\nu_1+n_2\nu_2-n_1-n_2)$-ej klasy, $2n_1n_2(\nu_1-1) \cdot (\nu_2-1)$-go rzędu i $(n_1\nu_1-n_1-1)(n_2\nu_2-n_2-1)$-go rodzaju, ze styczną $n_1(\nu_1-1)$-krotną $p_1 \equiv \varepsilon\pi_1$ i styczną $n_2(\nu_2-1)$-krotną $p_2 \equiv \varepsilon\pi_2$.

Płaszczyzna $\varepsilon \equiv P^1P^1P^2$ zawiera prostą osobliwą P^1P^2, dwa pęki promieni n_1-krotnych o wierzchołkach P^1 kompleksu, pęk promieni n_2-krotnych P^2, promień $n_1\nu_1$-krotny P^1P^1, oraz krzywą kompleksu $(n_1\nu_1+n_2\nu_2-2n_1-n_2)$-ej klasy, $2n_1n_2(\nu_1-2)(\nu_2-1)$-go rzędu i $(n_1\nu_1-2n_1-1)(n_2\nu_2-n_2-1)$-go rodzaju, ze styczną $n_1(\nu_1-2)$-krotną p_1 i styczną $n_2(\nu_2-1)$-krotną p_2.

Zupełnie analogicznie zbadać możemy własności płaszczyzn ε, przechodzących przez punkty podstawowe rzutowych pęków Π^1 i Π^2 w następujących przypadkach: ε przechodzi przez P^2, przez P^2 i P^2, przez P^1, P^2 i P^2.

Przez dowolny punkt P_0 płaszczyzny π_1 przechodzi jedna ściśle określona krzywa C^{ν_1} pęku Π^1. Krzywej tej odpowiada n_2 krzywych $C_\iota^{\nu_2}$ $(\iota=1,\ldots,n_2)$, tworzących grupę $(C^{\nu_2})_{n_2}$ pęku inwolucyjnego Π^2. Przez punkt P_0 przechodzi:

∞^1 promieni kompleksu, które leżą na n_2 stożkach $(P_0, C_\iota^{\nu_2})$ rzędu ν_2; ∞^1 promieni $n_1\nu_1$-krotnych, tworzących pęk na płaszczyźnie π_1; oraz ν_2^2 promieni n_2-krotnych P_0P^2, przechodzących przez punkty podstawowe P^2 pęku Π^2.

Jeżeli punkt P_0 zejdzie się z punktem podstawowym P^1, to wówczas P^1 jest środkiem wiązki promieni n_1-krotnych, oraz wierzchołkiem pęku promieni $n_1\nu_1$-krotnych kompleksu, które leżą na płaszczyźnie π_1.

Zupełnie analogicznie zbadać możemy własności punktów P_0, leżących na płaszczyźnie π_2, wzgl. schodzących się z elementami podstawowemi P^2 pęku inwolucyjnego Π^2.

Jeżeli punkt P_0 leży na krawędzi $p_{12} \equiv \pi_1\pi_2$, to P_0 jest wierzchołkiem dwóch pęków promieni $n_1\nu_1$-, $n_2\nu_2$-krotnych kompleksu. Prosta p_1p_2 przecina pęki $\Pi^1 \barwedge \Pi^2$ w dwóch rzutowych szeregach inwolucyjnych $n_1\nu_1$-, $n_2\nu_2$-go stopnia, które posiadają $(n_1\nu_1 + n_2\nu_2)$ punktów zjednoczonych. Każdy z tych punktów jest nadto środkiem wiązki promieni kompleksu.

6. Na trzech różnych płaszczyznach π_1, π_2 i π_3 przyjmijmy trzy jednokreślne pęki inwolucyjne n_1-, n_2-, n_3-go stopnia i pierwszego gatunku krzywych ν_1-, ν_2-, ν_3-go rzędu

$$\Pi^1 \barwedge \Pi^2 \barwedge \Pi^3 .$$

Proste, przecinające równocześnie trzy odpowiednie krzywe tych pęków inwolucyjnych, utworzą kongruencję promieni rzędu i klasy $(n_1n_2\nu_1\nu_2 + n_2n_3\nu_2\nu_3 + n_3n_1\nu_3\nu_1)$.

W celu wyznaczenia klasy tej kongruencji, przetnijmy przyjęte pęki krzywych dowolną płaszczyzną ε w trzech rzutowych szeregach inwolucyjnych $n_1\nu_1$-, $n_2\nu_2$-, $n_3\nu_3$-go stopnia i pierwszego gatunku punktów o podstawach $p_1 \equiv \varepsilon\pi_1$, $p_2 \equiv \varepsilon\pi_2$ i $p_3 \equiv \varepsilon\pi_3$. Szeregi te posiadają[1] w ogólnym przypadku $(n_1n_2\nu_1\nu_2 + n_2n_3\nu_2\nu_3 + n_3n_1\nu_3\nu_1)$ takich trójek odpowiednich punktów, z których każda trójka leży na jednej prostej. Z łatwością zauważymy, że każda z twych prostych przecina trzy homologiczne krzywe jednokreślnych pęków Π^1, Π^2, Π^3 i jest promieniem badanej kongruencji.

Aby otrzymać rząd badanej kongruencji promieni, rzućmy z dowolnego punktu P trzy rzutowe pęki krzywych Π^1, Π^2 i Π^3, to otrzymamy trzy jednokreślne i spółśrodkowe pęki inwolucyjne n_1-, n_2-, n_3-go stopnia powierzchni stożkowych ν_1-, ν_2-, ν_3-go rzędu. Pęki stożków posiadają (por. ust. 4) tę własność, że istnieje $(n_1n_2\nu_1\nu_2 + n_2n_3\nu_2\nu_3 + n_3n_1\nu_3\nu_1)$ takich prostych r_0, przez które przechodzą równocześnie po trzy homologiczne stożki uważanych pęków inwolucyjnych. Każda prosta r_0 przecina trzy odpowiednie krzywe pęków Π^1, Π^2, Π^3 i jest promieniem naszej kongruencji.

[1] Dr. Antoni Plamitzer, Erzeugnisse projektiver Involutionen höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind. II. Mitteilung, № 27. Wiener-Sitzungsberichte, Bd. 126. Abt. IIa.

Proste, przecinające równocześnie trzy odpowiednie krzywe trzech rzutowych pęków inwolucyjnych n_1-, n_2-, n_3-go stopnia i pierwszego gatunku krzywych ν_1-, ν_2-, ν_3-go rzędu, które leżą na różnych płaszczyznach, utworzą kongruencję promieni rzędu i klasy $(n_1n_2\nu_1\nu_2 + n_2n_3\nu_2\nu_3 + n_3n_1\nu_3\nu_1)$.

Płaszczyzna π_1 przecina pęki Π^2 i Π^3 w dwóch jednokreślnych szeregach inwolucyjnych $n_2\nu_2$-, $n_3\nu_3$-go stopnia punktów, które utworzą krzywą K klasy $(n_2\nu_2 + n_3\nu_3)$, rzędu $2n_2n_3\nu_2\nu_3$ i rodzaju $(n_2\nu_2 - 1)(n_3\nu_3 - 1)$, ze styczną $n_2\nu_2$-krotną $p_{12} \equiv \pi_1\pi_2$ i styczną $n_3\nu_3$-krotną $p_{13} \equiv \pi_1\pi_3$. Dowolna styczna krzywej K przecina odpowiednie krzywe pęków Π^2 i Π^3, oraz n_1 krzywych pęku Π^1. Krawędź p_{12} przecina jednę krzywą pęku Π^3 oraz n_2 odpowiadających jej elementów pęku Π^2 i n_1 krzywych pęku Π^1. Dla $\iota = 1, 2, 3$; $\varkappa = 2, 3, 1$; $\lambda = 3, 1, 2$ otrzymamy bezpośrednio:

Na płaszczyźnie π_ι leży ∞^1 $n_\iota\nu_\iota$-krotnych promieni kongruencji, które powłóczą krzywą $(n_\varkappa\nu_\varkappa + n_\lambda\nu_\lambda)$-ej klasy, $2n_\varkappa n_\lambda\nu_\varkappa\nu_\lambda$-go rzędu i $(n_\varkappa\nu_\varkappa - 1) \cdot (n_\lambda\nu_\lambda - 1)$-ego rodzaju. Krawędź płaszczyzn π_ι i $\pi_\varkappa$ przecina krzywą pęku Π^λ oraz odpowiadające jej grupy krzywych pęków inwolucyjnych Π^ι i $\Pi^\varkappa$.

Niechaj płaszczyzna przecinająca ε przechodzi przez punkt podstawowy P^ι $(\iota = 1, 2, 3;\ \varkappa = 2, 3, 1;\ \lambda = 3, 1, 2)$ pęku Π^ι. Na płaszczyźnie ε otrzymamy trzy jednokreślne szeregi inwolucyjne $n_\iota(\nu_\iota - 1)$-, $n_\varkappa\nu_\varkappa$-, $n_\lambda\nu_\lambda$-go stopnia punktów o podstawach $\varepsilon\pi_\iota$, $\varepsilon\pi_\varkappa$ i $\varepsilon\pi_\lambda$, które posiadają $n_\iota n_\varkappa(\nu_\iota - 1)\nu_\varkappa + n_\varkappa n_\lambda\nu_\varkappa\nu_\lambda + n_\lambda n_\iota\nu_\lambda(\nu_\iota - 1)$ trójek odpowiednich punktów, z których każda trójka leży na jednym promieniu badanej kongruencji. Przez punkt P^ι przechodzi $(n_\varkappa\nu_\varkappa + n_\lambda\nu_\lambda)$ promieni n_ι-krotnych kongruencji, które łączą homologiczne punkty szeregów inwolucyjnych stopni $n_\varkappa\nu_\varkappa$ i $n_\lambda\nu_\lambda$.

Zupełnie analogicznie otrzymać możemy (por. ust. 5) własności płaszczyzn ε, które przechodzą przez następujące punkty podstawowe: P^ι, P^ι; $P^\iota, P^\varkappa$; $P^\iota, P^\iota, P^\varkappa$; $P^\iota, P^\varkappa P^\lambda$, przyjętych pęków inwolucyjnych Π^ι, $\Pi^\varkappa$ i Π^λ.

Z dowolnego punktu podstawowego P^ι płaszczyzny π_ι rzućmy pęki $\Pi^\varkappa$ i Π^λ, to otrzymamy dwa jednokreślne spółwierzchołkowe pęki inwolucyjne stopni $n_\varkappa$ i n_λ powierzchni stożkowych $\nu_\varkappa$-, ν_λ-go rzędu — które utworzą (ust. 3) w ogólności stożek Γ $(n_\varkappa\nu_\varkappa + n_\lambda\nu_\lambda)$ go rzędu, z $\nu_\varkappa^2$ tworzącemi $n_\varkappa$-krotnemi i ν_λ^2 tworzącemi n_λ-krotnemi. Tworzące stożka Γ są n_ι-krotnemi promieniami badanej kongruencji, a tworzące, które leżą na płaszczyźnie π_ι, są $n_\iota\nu_\iota$-krotnemi promieniami kongruencji. Tworzące $P^\iota P^\varkappa$ i $P^\iota P^\lambda$ przecinają krzywą pęku Π^λ (wgl. $\Pi^\varkappa$) oraz odpowiadające im grupy krzywych pozostałych pęków.

Prosta $p^{\iota\varkappa} \equiv \pi_\iota\pi_\varkappa$ przecina pęki Π^ι i $\Pi^\varkappa$ w dwóch jednokreślnych szeregach $n_\iota\nu_\iota$-, $n_\varkappa\nu_\varkappa$-go stopnia i pierwszego gatunku, które posiadają $(n_\iota\nu_\iota + n_\varkappa\nu_\varkappa)$ punktów zjednoczonych A_0, B_0, ... Przez każdy z tych punktów, np. przez A_0 przechodzi ν_λ^2 promieni n^λ-krotnych A_0P^λ badanej kongruencji oraz ∞^1

promieni kongruencji, które są tworzącemi n_λ stożków rzędu ν_λ, o kierownicach schodzących się z krzywemi grupy $(A^{\nu_\lambda})n_\lambda$ pęku inwolucyjnego Π^λ.

7. Przyjmijmy cztery jednokreślne pęki inwolucyjne n_1-, n_2-, n_3-, n_4-go stopnia i pierwszego gatunku krzywych rzędu ν_1, ν_2, ν_3 i ν_4,

$$\Pi^1 \barwedge \Pi^2 \barwedge \Pi^3 \barwedge \Pi^4,$$

leżące na czterech różnych płaszczyznach $\pi_1, \dots, \pi_4$. Jeżeli przez K oznaczymy kongruencję promieni, badaną w ust. poprzednim, to promienie tej kongruencji, przecinające dowolnie przyjętą prostą l, utworzą[1] powierzchnię skośną Ψ $2(n_1 n_2 \nu_1 \nu_2 + n_2 n_3 \nu_2 \nu_3 + n_3 n_1 \nu_3 \nu_1) = 2r_0$-go stopnia z r_0-krotną kierownicą l.

Przy pomocy kongruencji K, powierzchni Ψ i prostej l ustanówmy[2] odpowiedniość pomiędzy krzywemi pęku inwolucyjnego Π^4 — która pozwoli nam wyznaczyć stopień powierzchni skośnej, której tworzące opierają się na czterech odpowiednich krzywych przyjętych pęków inwolucyjnych. Dowolnej krzywej Z^{ν_4} pęku Π^4 odpowiadają krzywe, należące do grup: $(Z^{\nu_1})_{n_1}$, $(Z^{\nu_2})_{n_2}$ i $(Z^{\nu_3})_n$ trzech pęków Π^1, Π^2 i Π^3. Istnieje $2n_1 n_2 n_3 \nu_1 \nu_2 \nu_3$ prostych z_0 kongruencji K, które przecinają l, $Z^{\nu_1}_\iota$, $Z^{\nu_2}_\varkappa$, $Z^{\nu_3}_\lambda$ $(\iota = 1, \dots n_1;\ \varkappa = 1, \dots n_2;\ \lambda = 1, \dots n_3)$. Każda prosta z_0 przecina jedną krzywą pęku Π^4, gdyż przez punkt $z_0 \cdot \pi_4$ przechodzi jedna i tylko jedna krzywa pęku Π^4. Wszystkie proste z_0 przecinają tedy $2n_1 n_2 n_3 \nu_1 \nu_2 \nu_3$ krzywych $Z^{\nu_4}_0$ pęku Π^4, które niechaj odpowiadają elementowi Z^{ν_4}. Dowolna krzywa $Z^{\nu_4}_0$ przecina $2r_0 \nu_4$ tworzących z_0, $s_0, \dots$ powierzchni Ψ, a każda z nich, jako promień kongruencji K, przecina trzy odpowiednie krzywe pęków inwolucyjnych Π^1, Π^2 i Π^3. Elementowi $Z^{\nu_4}_0$ podporządkujemy $2r_0 \nu_4 n_4$ krzywych pęku inwolucyjnego Π^4, które odpowiadają wymienionym ostatnio krzywym trzech pierwszych pęków. Pomiędzy krzywemi pęku Π^4 skonstruowaliśmy odpowiedniość $[2n_1 n_2 n_3 \nu_1 \nu_2 \nu_3, 2r_0 n_4 \nu_4]$, której elementy zjednoczone wyznaczają liczbę prostych, przecinających dowolną kierownicę l i cztery homologiczne krzywe przyjętych pęków.

Proste, które przecinają równocześnie cztery odpowiednie krzywe czterech rzutowych pęków inwolucyjnych n_1-, n_2-, n_3-, n_4-go stopnia i pierwszego gatunku krzywych ν_1-, ν_2-, ν_3-, ν_4-go rzędu, leżących na czterech różnych płaszczyznach, utworzą powierzchnię skośną stopnia $2(n_1 n_2 n_3 \nu_1 \nu_2 \nu_3 + n_2 n_3 n_4 \nu_2 \nu_3 \nu_4 + n_3 n_4 n_1 \nu_3 \nu_4 \nu_1 + n_4 n_1 n_2 \nu_4 \nu_1 \nu_2)$.

Płaszczyzna π_1 przecina pęki krzywych Π^2, Π^3 i Π^4 w trzech jednokreślnych szeregach inwolucyjnych $n_2 \nu_2$-, $n_3 \nu_3$-, $n_4 \nu_4$-go stopnia punktów, które

[1]) Dr. R. Sturm, Liniengeometrie in synth. Behandlung. I Teil, № 34. Leipzig 1892.

[2]) Analogiczne dowody należy porównać w „Geometrische Verwandtschaften" (Bd. I. Str. 257, Bd. IV, Str. 840) prof. R. Sturma.

posiadają[1] $(n_2 n_3 \nu_2 \nu_3 + n_3 n_4 \nu_3 \nu_4 + n_4 n_2 \nu_4 \nu_2)$ takich trójek odpowiednich punktów, z których każda trójka leży na jednej prostej. Te proste są $n_1 \nu_1$-krotnemi tworzącemi badanej powierzchni skośnej, gdyż przecinają po jednej krzywej pęków Π^2, Π^3, Π^4 i n_1 krzywych pęku Π^1, które sobie odpowiadają w owych pękach jednokreślnych.

Z dowolnego punktu podstawowego P^1 rzućmy pęki krzywych Π^2, Π^3 i Π^4, to otrzymamy trzy jednokreślne spółwierzchołkowe pęki inwolucyjne n_2-, n_3-, n_4-go stopnia powierzchni stożkowych ν_2-, ν_3-, ν_4-go rzędu. Pęki te (por. ust. 4) posiadają tę własność, że istnieje $(n_2 n_3 \nu_2 \nu_3 + n_3 n_4 \nu_3 \nu_4 + n_4 n_2 \nu_4 \nu_2)$ takich prostych s_0, przez które przechodzą równocześnie po trzy odpowiednie stożki uważanych pęków inwolucyjnych. Każda prosta s_0 jest n_1-krotną tworzącą powierzchni skośnej, gdyż przecina n_1 krzywych tworzących grupę pęku Π^1 i po jednej odpowiadającej im krzywej trzech pozostałych pęków Π^2, Π^3, Π^4.

Weźmy pod uwagę krawędź $p_{12} \equiv \pi_1 \pi_2$ przecięcia się płaszczyzn π_1 i π_2. Pęki inwolucyjne krzywych Π^1 i Π^2 wyznaczają na prostej p_{12} dwa jednokreślne szeregi inwolucyjne $n_1 \nu_1$-, $n_2 \nu_2$-go stopnia, które posiadają $(n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2)$ elementów zjednoczonych A_0, $B_0, \dots$ W punktach tych przecinają się kolejno odpowiednie krzywe A^{ν_1} i A^{ν_2}, B^{ν_1} i $B^{\nu_2}, \dots$ pęków Π^1 i Π^2. — Z punktu A_0 rzućmy krzywe, należące do grup $(A^{\nu_3})_{n_3}$ i $(A^{\nu_4})_{n_4}$ pęków Π^3 i Π^4, i wyznaczmy wspólne tworzące odpowiednich stożków, to z łatwością zauważymy, że przez punkt zjednoczony A_0 przechodzi $n_3 n_4 \nu_3 \nu_4$ tworzących badanej powierzchni skośnej. Wnosimy stąd, że na prostej $p_{12} \equiv \pi_1 \pi_2$ leży $(n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2)$ punktów $n_3 n_4 \nu_3 \nu_4$-krotnych powierzchni skośnej.

Dla $\iota = 1, 2, 3, 4$; $\varkappa = 2, 3, 4, 1$; $\lambda = 3, 4, 1, 2$; $\mu = 4, 1, 2, 3$ otrzymamy następujące własności badanej powierzchni skośnej:

Na płaszczyźnie π_ι pęku Π^ι leży w ogólności $(n_\varkappa n_\lambda \nu_\varkappa \nu_\lambda + n_\lambda n_\mu \nu_\lambda \nu_\mu + n_\mu n_\varkappa \nu_\mu \nu_\varkappa)$ tworzących $n_\iota \nu_\iota$-krotnych, a przez każdy punkt podstawowy P^ι pęku Π^ι przechodzi $(n_\varkappa n_\lambda \nu_\varkappa \nu_\lambda + \dots)$ tworzących n_ι-krotnych badanej powierzchni skośnej. Na prostej $p_{\iota\varkappa} \equiv \pi_\iota \pi_\varkappa$ leży w ogólności $(n_\iota \nu_\iota + n_\varkappa \nu_\varkappa)$ punktów $n_\lambda n_\mu \nu_\lambda \nu_\mu$-krotnych tej powierzchni.

8. Oprócz czterech poprzednich, przyjmijmy nadto na płaszczyźnie π_5 piąty pęk inwolucyjny n_5-go stopnia i pierwszego gatunku krzywych rzędu ν_5, oraz ustalmy związek rzutowości pomiędzy pękiem Π^5 a poprzedniemi pękami krzywych. Przy pomocy (badanej w ustępie poprzednim) powierzchni skośnej Φ stopnia $\omega = 2(n_1 n_2 n_3 \nu_1 \nu_2 \nu_3 + \dots)$ skonstruujemy[2] odpowiedniość pomiędzy krzywemi pęku Π^5, która pozwoli nam wyznaczyć ilość prostych,

[1]) por. uwagę 1 w ust. 6, na str. 74.

[2]) por. uwagę 2 na str. 76.

przecinających równocześnie pięć homologicznych krzywych uważanych jednokreślnych pęków inwolucyjnych.

Dowolnej krzywej Z^{ν_5}, należącej do grupy $(Z^{\nu_5})_{n_5}$ pęku Π^5, odpowiadają krzywe grup $(Z^{\nu_i})_{n_i}$ $(i=1, 2, 3, 4)$ czterech pierwszych pęków. Zauważmy, że istnieje $2n_1n_2n_3n_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4$ prostych r_0 powierzchni Φ, które przecinają równocześnie krzywe $Z_\iota^{\nu_1}$, $Z_\varkappa^{\nu_2}$, $Z_\lambda^{\nu_3}$ i $Z_\mu^{\nu_4}$ $(\iota=1, \dots n_1;\ \varkappa=1, \dots n_2;\ \lambda=1, \dots n_3,\ \mu=1, \dots n_4)$. Ponieważ każda tworząca r_0 przecina jedną i tylko jednę krzywą pęku Π^5, przechodzącą przez punkt $r_0\pi_5$, — przeto wszystkie proste r^0 przecinają $2n_1n_2n_3n_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4$ krzywych $Z_0^{\nu_5}$ pęku Π^5. Krzywej Z^{ν_5} podporządkujmy wszystkie krzywe $Z_0^{\nu^5}$. — Dowolna krzywa $Z_0^{\nu^5}$ przecina $\omega\nu_5$ tworzących $r_0, s_0, \dots$ powierzchni Φ, a każda z tych tworzących przecina cztery krzywe homologicznych grup jednokreślnych pęków $\Pi^1, \dots \Pi^4$. Tym ostatnim grupom odpowiada $\omega\nu_5$ grup pęku Π^5, a $\omega n_5\nu_5$ elementów tych grup podporządkujmy krzywej $Z_0^{\nu^5}$. Skonstruowaliśmy w ten sposób odpowiedniość $[2n_1n_2n_3n_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4, \omega n_5\nu_5]$ pomiędzy krzywemi pęku Π^5. Z łatwością zauważymy, że dla każdego elementu zjednoczonego tej odpowiedniości odnośna prosta r_0 przecina pięć homologicznych krzywych przyjętych pęków $\Pi^1, \dots \Pi^5$.

Istnieje $2(n_1n_2n_3n_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4+n_2n_3n_4n_5\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5+\dots+n_5n_1n_2n_3\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3)$ **prostych, z których każda przecina równocześnie pięć odpowiednich krzywych pięciu rzutowych pęków inwolucyjnych** n_i**-go stopnia** $(i=1,2,3,4,5)$ **i pierwszego gatunku krzywych** ν_i**-go rzędu, leżących na pięciu różnych płaszczyznach.**

RÉSUMÉ.

Un faisceau de courbes planes d'ordre ν $\Pi(A^\nu, B^\nu, \dots)$ est projectif au faisceau de rayons $P(a, b, \dots)$, dont les éléments sont tangents en un point fondamental P aux courbes du faisceau Π. Si le faisceau P est involutif du degré n et du premier rang $P(a_1 \dots a_n, (b)_n, \dots)$, le faisceau de courbes est aussi un faisceau involutif $\Pi(A_1^\nu \dots A_n^\nu, (B^\nu)_n, \dots)$.

La projectivité de deux faisceaux involutifs de courbes planes est déterminée, quand trois groupes d'éléments d'un faisceau correspondent à trois groupes arbitraires de courbes d'un autre faisceau.

Considérons dans un plan deux faisceaux involutifs des degrés n_1 et n_2 de courbes planes des ordres ν_1 et ν_2, qui sont homographiques. Le lieu d'intersection de courbes correspondantes de ces faisceaux est une courbe plane d'ordre $(n_1\nu_1+n_2\nu_2)$, ayant pour ν_1^2 de points multiples d'ordre n_1 et ν_2^2 de points multiples d'ordre n_2 les points fondamentaux de ces faisceaux.

Prenons dans un même plan trois faisceaux involutifs des degrés n_1-, n_2-, n_3 de courbes d'ordres ν_1-, ν_2-, ν_3, qui sont projectifs. Les faisceaux possè-

dent $(n_1n_2\nu_1\nu_2+n_2n_3\nu_2\nu_3+n_3n_1\nu_3\nu_1)$ triples de courbes correspondantes, dont chaque triple concourt en un point.

Considérons deux faisceaux involutifs des degrés n_1 et n_2 de courbes planes d'ordres ν_1 et ν_2, qui sont homographiques et situés resp. sur les plans π_1 et π_2. Les droites, qui coupent les couples d'éléments homologues de ces faisceaux, engendrent un complexe de rayons du degré $(n_1\nu_1+n_2\nu_2)$. Les génératrices multiples d'ordre $n_1\nu_1$-, resp. $n_2\nu_2$ de ce complexe engendrent un système plan π_1, resp. π_2. Les génératrices multiples d'ordre n_1-, resp. n_2 de ce complexe engendrént ν_1^2, resp. ν_2^2 gerbes; dont les centres sont les points fondament aux des faisceaux considérés.

Prenons maintenant trois faisceaux involutifs des degrés n_1-, n_2-, n_3 de courbes planes d'ordre ν_1, ν_2, ν_3, projectifs et situés resp. dans les plans π_1-, π_2-, π_3. Les droites, qui coupent les triples de courbes correspondantes de ces faisceaux, engendrent une congruence de rayons d'ordre et de la classe $(n_1n_2\nu_1\nu_2+n_2n_3\nu_2\nu_3+n_3n_1\nu_3\nu_1)$.

Considérons quatre faisceaux involutifs des degrés n_1-, n_2-, n_3-, n_4 de courbes planes d'ordres ν_1-, ν_2-, ν_3-, ν_4, homographiques et situés resp. sur les plans π_1-, π_2-, π_3-, π_4-. Les droites, qui coupent les quadruples d'éléments homologues de ces faisceaux, engendrent une surface gauche de degré $2(n_1n_2n_3\nu_1\nu_2\nu_3+n_2n_3n_4\nu_2\nu_3\nu_4+n_3n_4n_1\nu_3\nu_4\nu_1+n_4n_1n_2\nu_4\nu_1\nu_2)$.

Nous étudions les propriétés différentes de ces complexe, congruence et surface.

Prenons enfin cinq faisceaux involutifs des degrés n_1-, $\dots n_5$ de courbes planes d'ordres ν_1-, $\dots \nu_5$, projectifs et situés resp. sur les plans $\pi_1, \dots \pi^5$. Il existe $2(n_1n_2n_3n_4\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4+n_2n_3n_4n_5\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5+\dots+n_5n_1n_2n_3\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3)$ de telles droites, dont chaque droite coupe les quintuples de courbes homologues de ces faisceaux homographiques.