pet n étant des nombres naturels quelconques. Or, x_0 étant un point quelconque appartenant par exemple à l'intérieur de l'intervalle $<-\frac{2\pi}{p}, 0>$, toutes ces fonctions satisfont dans le voisinage $<-\frac{4\pi}{p}, \frac{4\pi}{p}>$ de ce point aux conditions spécifiées au début; il suffit de poser $c_{ijk} = 0$, pour $i, j, k = 1, 2, 3, 4$, car les expressions

$$g_i g'_j - g_j g'_i$$

sont partout nulles. Néanmoins ces fonctions sont linéairement indépendantes dans l'intervalle $<-\frac{4\pi}{p}, \frac{4\pi}{p}>$ tout entier, comme il est aisé de voir.

4. Considérons un groupe continu de Lie des transformations d'une variable et supposons qu' il dépende de r paramètres essentiels.

D'après la théorie générale de Lie, il correspondent à ce groupe r transformations infinitésimales de la forme

$$X_i f = \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad i = 1, 2, \dots r,$$

où les fonctions $\xi_i(x)$ sont régulières et satisfont aux conditions suivantes: 1° Elles sout linéairement indépendantes; 2° il existe r^3 constantes c_{ijk}, $i, j, k = 1, 2, \dots, r$, telles que les relations de la forme (2)

$$\xi_i \xi'_j - \xi_j \xi'_i = \sum_{k=1} c_{ijk} \xi_k \quad , \quad i, j = 1, \dots, r$$

sont identiquement satisfaites.

Or, on a vu que cela ne peut avoir lieu que si $r \leqq 3$. Le groupe de Lie des transformations d'une variable ne peut donc dépendre de trois paramètres essentiels au plus.

A. WALFISZ.

Über die Idealfunktion quadratischer Zahlkörper.

O funkcji idealowej kwadratowych ciał liczbowych.

Es sei ein beliebiger quadratischer Zahlkörper gegeben. Für natürliches n bezeichne $F(n)$ die Anzahl aller Ideale mit der Norm n.

$$H(x) = \sum_{n \leqq x} F(n) \quad ^{1)}$$

sei die zugehörige Idealfunktion. Ist ρ das Residuum der dem Körper zugeordneten Zetafunktion in ihrem Pole, so hat man nach J. G. van der Corput [2])

$$H(x) = \rho x + O(x^{\theta}) \qquad \left(\theta < \frac{1}{3}\right). \tag{1}$$

Diese Beziehung soll im folgenden zu

$$H(x) = \rho x + O(x^{\frac{163}{494}}) \tag{2}$$

verbessert werden. Hierbei kommt eine Methode zur Anwendung, welche von van der Corput [3]) für das Dirichletsche Teilerproblem ausgear-

[1]) Falls die untere Summationsgrenze nicht explizit bezeichnet wird, ist sie stets Eins.

[2]) J. G. van der Corput „Neue zahlentheoretische Abschätzungen" [Mathematische Annalen **89** (1923), S. 215-254].

[3]) J. G. van der Corput „Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem" [Mathematische Annalen **87** (1922), S. 39-65].

Prace mat.-fiz. t. XXXIV.

beitet worden ist und dort denselben Restexponenten $\frac{163}{494}$ liefert. [4])

Bekanntlich hat man

$$F(n) = \sum_{d/n} \chi(d),$$

wo χ ein geeigneter reller Nichthauptcharakter mod. k ist, wenn k den absoluten Betrag der Körpergrundzahl bedeutet. Hieraus folgt

$$H(x) = \sum_{mn \leqq x} \chi(m),$$

und damit ist das Studium von $H(x)$ auf ein Teilerproblem in Restklassen zurückgeführt.

Ich möchte noch bemerken, dass man für den durch i erzeugten Gaussschen Zahlkörper bessere Abschätzungen als (1) besitzt. Nach J. E. Littlewood und dem Verfasser [5]) ist nämlich alsdann für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$H(x) = \frac{\pi}{4} x + O(x^{\frac{37}{112}+\varepsilon})$$

und nach E. Landau [6]), darüber hinaus,

$$H(x) = \frac{\pi}{4} x + O(x^{\frac{37}{112}} \log^{\frac{5}{56}} x).$$

Den betreffenden Spezialfall von (2), d. h.

[4]) Der eleganteren Formulierung wegen schreibt van der Corput für die Restfunktion $R(x)$ des Teilerproblems

$$R(x) = O(x^M) \qquad \left(M < \frac{33}{100},\ \text{unabhängig von } x\right);$$

aus dem Beweise seines Satzes geht aber ohne weiteres

$$R(x) = O(x^{\frac{163}{494}})$$

hervor. Für das spätere sei hier vermerkt, dass auch $\frac{33}{100} < \frac{37}{112}$ ist.

[5]) J. E. Littlewood and A. Walfisz „The Lattice Points of a Circle" [Proceedings of the Royal Society, A **106** (1924), S. 478-487].

[6]) E. Landau „Note on the Preceding Paper" [ebenda, S. 487-488].

$$H(x) = \frac{\pi}{4} x + O(x^{\frac{163}{494}}),$$

habe ich kürzlich an anderer Stelle gegeben. [7])

Hilfssatz 1 — *Es ist*

$$(3) \qquad \sum_{n > \sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{n} = -\frac{1}{k\sqrt{x}} \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta)\beta - \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}\right] + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Beweis. Es seien $g_1, \ldots, g_\gamma$ diejenigen β im Intervall $1 \leqq \beta \leqq k-1$, wofür $\chi = 1$ wird, und analog $g_{\gamma+1}, \ldots, g_{2\gamma}$ die β mit $\chi = -1$. Dann wird

$$\sum_{n>\sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{n} = \sum_{k\alpha+\beta>\sqrt{x}} \frac{\chi(k\alpha+\beta)}{k\alpha+\beta} = \sum_{k\alpha+\beta>\sqrt{x}} \frac{\chi(\beta)}{k\alpha+\beta}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \sum_{\alpha > \frac{\sqrt{x}-\beta}{k}} \frac{1}{k\alpha+\beta}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \sum_{\alpha > \frac{\sqrt{x}}{k}} \frac{1}{k\alpha+\beta} + \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \sum_{\frac{\sqrt{x}-\beta}{k} < \alpha \leqq \frac{\sqrt{x}}{k}} \frac{1}{k\alpha+\beta}$$

$$(4) \qquad = S_1 + S_2;$$

$$S_1 = \sum_{\beta=1}^{\gamma} \sum_{\alpha > \frac{\sqrt{x}}{k}} \left(\frac{1}{k\alpha+g_\beta} - \frac{1}{k\alpha+g_{\beta+\gamma}}\right)$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\gamma} \int_{\frac{\sqrt{x}}{k}}^{\infty} \left(\frac{1}{ku+g_\beta} - \frac{1}{ku+g_{\beta+\gamma}}\right) du + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

[7]) A. Walfisz „Teilerprobleme" [Mathematische Zeitschrift **26** (1927), S. 66—88].

$$=\frac{1}{k}\sum_{\beta=1}^{\gamma}\log\frac{\sqrt{x}+g_{\beta+\gamma}}{\sqrt{x}+g_{\beta}}+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{1}{k\sqrt{x}}\sum_{\beta=1}^{\gamma}(g_{\beta}-g_{\beta+\gamma})+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{1}{k\sqrt{x}}\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\,\beta+O\left(\frac{1}{x}\right); \tag{5}$$

$$S_2=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\sum_{\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}<\alpha\leqq\frac{\sqrt{x}}{k}}1+\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\sum_{\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}<\alpha\leqq\frac{\sqrt{x}}{k}}\left(\frac{1}{k\alpha+\beta}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$=S_{21}+S_{22}; \tag{6}$$

$$S_{21}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\left(\left[\frac{\sqrt{x}}{k}\right]-\left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}\right]\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}\right]; \tag{7}$$

$$|S_{22}|\leqq\sum_{\beta=1}^{k-1}\sum_{\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}<\alpha\leqq\frac{\sqrt{x}}{k}}\frac{k}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}\leqq\frac{k^2}{x}$$

$$=O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{8}$$

Und nunmehr folgt (3) aus (4), (5), (6), (7) und (8).

Hilfssatz 2. — *Es werde für reelles u.*

$$\psi(u)=u-[u]-\frac{1}{2}$$

gesetzt. Dann ist

$$H(x)=\rho x-\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\sum_{n\leqq\frac{\sqrt{x}}{k}}\psi\left(\frac{x}{kn+\beta}\right) \tag{9}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\psi\left(\frac{x}{kn}+\frac{k-\beta}{k}\right)+O(1).$$

Beweis. Zunächst wird

$$H(x)=\sum_{mn\leqq x}\chi(m)=\sum_{\substack{mn\leqq x\\ m\leqq\sqrt{x}}}\chi(m)+\sum_{\substack{mn\leqq x\\ n\leqq\sqrt{x}}}\chi(m)-\sum_{\substack{m\leqq\sqrt{x}\\ n\leqq\sqrt{x}}}\chi(m)$$

$$=S_3+S_4+S_5; \tag{10}$$

$$S_3=\sum_{m\leqq\sqrt{x}}\chi(m)\sum_{n\leqq\frac{x}{m}}1=\sum_{m\leqq\sqrt{x}}\chi(m)\left[\frac{x}{m}\right]$$

$$=\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\sum_{0\leqq\alpha\leqq\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}}\left[\frac{x}{k\alpha+\beta}\right]; \tag{11}$$

$$S_4=\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\sum_{m\leqq\frac{x}{n}}\chi(m)=\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\sum_{0\leqq\alpha\leqq\frac{1}{k}\left(\frac{x}{n}-\beta\right)}1$$

$$=\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\left[\frac{x}{kn}+\frac{k-\beta}{k}\right]; \tag{12}$$

$$S_5=[\sqrt{x}]\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\sum_{0\leqq\alpha\leqq\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}}1$$

$$=[\sqrt{x}]\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\left[\frac{\sqrt{x}+k-\beta}{k}\right]$$

$$= [\sqrt{x}] \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}\right].$$

Die hier auftretende Summe ist beschränkt, wie man sofort aus ihrer Darstellung

$$\sum_{\beta=1}^{\gamma} \left(\left[\frac{\sqrt{x}-g_\beta}{k}\right] - \left[\frac{\sqrt{x}-g_{\beta+\gamma}}{k}\right] \right)$$

ersehen kann. Somit ist

$$S_5 = \sqrt{x} \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}\right] + O(1). \tag{13}$$

Aus (10), (11), (12) und (13) ergibt sich

$$H(x) = \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \Bigg\{ \sum_{0 \leqq \alpha \leqq \frac{\sqrt{x}-\beta}{k}} \left[\frac{x}{k\alpha+\beta}\right]$$

$$+ \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{kn} + \frac{k-\beta}{k}\right] - \sqrt{x} \left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}\right] \Bigg\} + O(1),$$

und hieraus weiter, indem man ψ - Funktionen einführt,

$$H(x) = \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \Bigg\{ \sum_{0 \leqq \alpha \leqq \frac{\sqrt{x}-\beta}{k}} \frac{x}{k\alpha+\beta} - \frac{1}{2} \sum_{0 \leqq \alpha \leqq \frac{\sqrt{x}-\beta}{k}} 1 \tag{14}$$

$$- \sum_{0 \leqq \alpha \leqq \frac{\sqrt{x}-\beta}{k}} \psi\left(\frac{x}{k\alpha+\beta}\right) + \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{kn} + 1 - \frac{\beta}{k}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n \leqq \sqrt{x}} 1$$

$$- \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{kn} + \frac{k-\beta}{k}\right) - \sqrt{x} \left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}\right] \Bigg\} + O(1).$$

Hierin ist erstens

$$\sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \sum_{0 \leqq \alpha \leqq \frac{\sqrt{x}-\beta}{k}} \frac{x}{k\alpha+\beta} = x \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{n};$$

zweitens

$$-\frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \sum_{0 \leqq \alpha \leqq \frac{\sqrt{x}-\beta}{k}} 1 = -\frac{1}{2} \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \chi(n) = O(1);$$

drittens

$$\sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{kn} + 1 - \frac{1}{2}\right) = 0;$$

und viertens

$$-\sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{\beta}{k} = -\frac{[\sqrt{x}]}{k} \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta)\beta = -\frac{\sqrt{x}}{k} \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta)\beta + O(1).$$

Ferner kann man, mit einem Fehler $O(1)$, die erste innere ψ – Summe in (14) über $1 \leqq \alpha \leqq \frac{\sqrt{x}}{k}$ laufen lassen. Wird dann noch n für α geschrieben, so folgt aus (14)

$$H(x) = -\sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \sum_{n \leqq \frac{\sqrt{x}}{k}} \psi\left(\frac{x}{kn+\beta}\right) - \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{kn} + \frac{k-\beta}{k}\right) \tag{15}$$

$$+ x \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{\chi(n)}{n} - \frac{\sqrt{x}}{k} \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta)\beta - \sqrt{x} \sum_{\beta=1}^{k-1} \chi(\beta) \left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}\right] + O(1).$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} = \rho$$

ist nach dem vorigen Hilfssatz

$$x\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(n)}{n}=\rho x-x\sum_{n>\sqrt{x}}\frac{\chi(n)}{n}$$

$$=\rho x+\frac{\sqrt{x}}{k}\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\,\beta+\sqrt{x}\sum_{\beta=1}^{k-1}\chi(\beta)\left[\frac{\sqrt{x}-\beta}{k}\right]+O(1).$$

Wird dies in (15) eingesetzt, so kommt (9).

Die folgende Definition eines Exponentensystems, sowie die Hilfssätze 3., 4. und 5., sind der van der Corputschen Abhandlung[3]) entnommen, wo sie S. 51—53,64 zu finden sind. Die weiter unten auftretenden $c_1, \ldots, c_{12}$ sind, bei festgelegtem k, geeignete positive absolute Konstanten.

Definition. — *Wir werden sagen, dass die Zahlenpaare $(l_1, m_1), (l_2, m_2), \ldots, (l_\nu, m_\nu)$, deren Anzahl und deren Werte konstant vorausgesetzt werden, ein Exponentensystem bilden, wenn*

$$0\leq l_p\leq\frac{1}{2},\quad 0\leq m_p\leq 1 \qquad (1\leq p\leq\nu)$$

ist, und es zu jeder positiven Zahl s zwei nur von s abhängige Zahlen r und $c\left(r \text{ ganz} \geq 3,\ 0<c<\frac{1}{2}\right)$ gibt, derart, dass stets die Ungleichung

$$\left|\sum_{a\leq n\leq b} e^{2\pi i f(n)}\right| \leq K\sum_{p=1}^{\nu} z^{l_p} a^{m_p} \tag{16}$$

mit einem nur von s und t abhängigen $K>0$ gilt, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

$$t>0,\quad 1\leq a<b<at,\quad y>0,\quad z=ya^{-s}>1\,; \tag{17}$$

$f(n)$ ist im Intervall $a\leq n\leq b$ definiert, reell, r-mal differentiierbar (in den Endpunkten eventuell nur einseitig), und für $a\leq n\leq b$, $0\leq p\leq r-1$ ist

$$|f^{(p+1)}(n)-(-1)^p y s(s+1)\ldots(s+p-1)\,n^{-s-p}| < c\,y s(s+1)\ldots(s+p-1)\,n^{-s-p} \tag{18}$$

(für $p=0$ bezeichne $s(s+1)\ldots(s+p-1)$ die Zahl Eins).

Hilfssatz 3. — *Es sei $a<b$, $f(n)$ im Intervall $a\leq n\leq b$ definiert, reell und zweimal differentiierbar (in den Endpunkten eventuell nur einseitig), $|f'(b)-f'(a)|<2$, $f''(n)$ stets $\geq\omega$ oder stets $\leq-\omega$, wo ω eine von n unabhängige positive Zahl bezeichnet. Dann ist*

$$\left|\sum_{a\leq n\leq b} e^{2\pi i f(n)}\right| \leq c_1\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}+1\right).$$

Hilfssatz 4. — *Falls N und P positive ganze Konstanten, $u_n\ (\geq 0)$ und $v_p\ (>0)$ $(1\leq n\leq N,\ 1\leq p\leq P)$ Konstanten bezeichnen, A_n und B_p $(1\leq n\leq N,\ 1\leq p\leq P)$ positiv sind, gibt es ein positives w mit der Eigenschaft*

$$\sum_{n=1}^{N} A_n w^{u_n}+\sum_{p=1}^{P} B_p w^{-v_p}\leq c_2\sum_{n=1}^{N}\sum_{p=1}^{P}\left(A_n^{v_p} B_p^{u_n}\right)^{\frac{1}{u_n+v_p}}.$$

Hilfssatz 5. — *Die Zahlenpaare $\left(\frac{43}{104}, \frac{54}{104}\right)$, $\left(\frac{147}{344}, \frac{177}{344}\right)$, $\left(\frac{71}{176}, \frac{92}{176}\right)$ und $\left(\frac{17}{38}, \frac{19}{38}\right)$ bilden ein Exponentensystem.*

Hilfssatz 6. — *Die Zahlenpaare (l_p, m_p) mit $l_p>0$ $(1\leq p\leq\nu)$ mögen ein Exponentensystem bilden. x sei >1, und für jedes n im Intervall $a\leq n\leq b$ $(1\leq a<b<2a)$ habe $\varphi(n)$ eine der $2(k-1)$ Gestalten*

$$\varphi(n)=\frac{x}{kn+\beta},\quad \frac{x}{kn}+\frac{k-\beta}{k} \qquad (1\leq\beta\leq k-1)$$

Dann ist

$$\left|\sum_{a\leq n\leq b}\psi(\varphi(n))\right|\leq c_3\left(x^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}+\sum_{p=1}^{\nu}\left(x^{l_p}a^{m_p-l_p}\right)^{\frac{1}{1+l_p}}\right). \tag{19}$$

Beweis. Für $w>0$ liefert eine Fourierentwickelung

$$w\int_0^{\pm\frac{1}{w}}\psi(u+v)\,dv=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2n\pi u i}$$

mit

$$a_0 = 0\,;\ |a_n| \leqq \frac{1}{|n|}\ ,\ |a_n| \leqq \frac{w}{n^2} \qquad (n \neq 0)\ .$$

Hieraus folgt

$$w\left|\sum_{a\leqq n\leqq b}\int_0^{\pm\frac{1}{w}} \psi(\varphi(n)+v)\,dv\right| \leqq 2\sum_{h=1}^{\infty}\left|\sum_{a\leqq n\leqq b} e^{2\pi h\varphi(n)i}\right| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{h},\frac{w}{h^2}\right)$$

(20) $$= 2\sum_{h\leqq\frac{ka^2}{x}} + 2\sum_{h>\frac{ka^2}{x}} = 2S_6 + 2S_7\ .$$

In S_6 ist nach Hilfssatz 3. mit

$$f(n) = -h\varphi(n)$$

(f habe hinfort diese Bedeutung),

$$1 \geqq \omega = \frac{hx}{2kb^3} \geqq c_4\,hx\,a^{-3}$$

anwendbar und liefert

$$S_6 \leqq c_5 \sum_{h=1}^{\infty} h^{-\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}}\, a^{\frac{3}{2}} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{h},\frac{w}{h^2}\right)$$

$$\leqq c_5\, x^{-\frac{1}{2}}\, a^{\frac{3}{2}} \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^{\frac{3}{2}}}$$

(21) $$\leqq c_6\, x^{-\frac{1}{2}}\, a^{\frac{3}{2}}\ .$$

Bei der Abschätzung von S_7 darf $a \geqq c_7$ für ein geeignetes c_7 angenommen werden, da andernfalls die Behauptung (19) trivial ist. Ich setze

$$s = 2\,,\ t = 2\,,\ y = \frac{hx}{k}\,,\ z = \frac{hx}{ka^2}\,.$$

Dann sind zunächst die Ungleichungen (17) erfüllt. Da s, t festgelegt sind, werden K, r und c absolute Konstanten. f ist unbeschränkt oft, also r-mal differentiierbar, und für geeignetes c_7 gilt auch (18). Also ist (16) anwendbar und liefert

$$\left|\sum_{a\leqq n\leqq b} e^{2\pi h\varphi(n)i}\right| \leqq c_8 \sum_{p=1}^{\nu} z^{l_p} a^{m_p} \leqq c_8 \sum_{p=1}^{\nu} h^{l_p} x^{l_p} a^{m_p - 2l_p}\ .$$

Wegen $l_p > 0$ $(1 \leqq p \leqq \nu)$ wird somit

$$S_7 \leqq c_8 \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\nu} h^{l_p} x^{l_p} a^{m_p-2l_p} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{h},\frac{w}{h^2}\right)$$

$$\leqq c_8 \sum_{p=1}^{\nu} x^{l_p} a^{m_p-2l_p}\left(\sum_{h\leqq w} h^{l_p-1} + w\sum_{h>w} h^{l_p-2}\right)$$

(22) $$\leqq c_9 \sum_{p=1}^{\nu} w^{l_p} x^{l_p} a^{m_p-2l_p}\ .$$

Aus (20), (21) und (22) folgt

(23) $$w\left|\sum_{a\leqq n\leqq b}\int_0^{\pm\frac{1}{w}} \psi(\varphi(n)+v)\,dv\right| \leqq c_{10}\left(x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} + \sum_{p=1}^{\nu} w^{l_p} x^{l_p} a^{m_p-2l_p}\right).$$

Da für jedes Zahlenpaar u_1 und $u_2 > u_1$ die Ungleichung

$$\psi(u_2) - \psi(u_1) \leqq u_2 - u_1$$

gilt, ist

$$-\frac{b-a+1}{2w} + w\sum_{a\leqq n\leqq b}\int_0^{\frac{1}{w}} \psi(\varphi(n)+v)\,dv \leqq \sum_{a\leqq n\leqq b}\psi(\varphi(n))$$

$$\leqq \frac{b-a+1}{2w} + w\sum_{a\leqq n\leqq b}\int_{-\frac{1}{w}}^{0} \psi(\varphi(n)+v)\,dv\ .$$

Wegen $b - a + 1 \leqq a$ folgt also aus (23)

$$\Bigl|\sum_{a \leqq n \leqq b} \psi(\varphi(n))\Bigr| \leqq c_{11}\Bigl(x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} + \sum_{p=1}^{\nu} w^{l_p} x^{l_p} a^{m_p - 2l_p} + \frac{a}{w}\Bigr).$$

Das erste Glied rechts hat bereits die Form der Behauptung, die Summe der beiden anderen nimmt aber diese Form an, sobald ein geeignetes w nach Hilfssatz 4. gewählt wird.

B e w e i s d e s H a u p t s a t z e s. — Es sei $x > 1$ und, zur Abkürzung,

$$\xi = \frac{\sqrt{x}}{k} \text{ oder } = \sqrt{x} \; ; \; \eta = \left[\frac{\log \xi}{\log 2}\right].$$

Ferner liege ein Exponentensystem (l_p, m_p) mit $0 < l_p < m_p$ vor.

Eine Anwendung von Hilfssatz 6. ergibt sodann

$$\Bigl|\sum_{n \leqq \xi} \psi(\varphi(n))\Bigr| \leqq \sum_{h=0}^{\eta} \Bigl|\sum_{1+\left[\frac{\xi}{2^{h+1}}\right] \leqq n \leqq \left[\frac{\xi}{2^h}\right]} \psi(\varphi(n))\Bigr|$$

$$\leqq c_3 \sum_{h=0}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{\nu} \left(x^{l_p} \xi^{m_p - l_p} 2^{-h(m_p - l_p)}\right)^{\frac{1}{1+l_p}} + x^{-\frac{1}{2}} \xi^{\frac{3}{2}} 2^{-\frac{3}{2}h} \right\}$$

$$\leqq c_3 \sum_{h=0}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{\nu} \left(x^{l_p + \frac{1}{2}(m_p - l_p)} 2^{-h(m_p - l_p)}\right)^{\frac{1}{1+l_p}} + x^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} 2^{-\frac{3}{2}h} \right\}$$

$$\leqq c_{12}\Bigl(\sum_{p=1}^{\nu} x^{\frac{l_p + m_p}{2(1+l_p)}} + x^{\frac{1}{4}}\Bigr).$$

Setzt man hierin für l, m die vier Paare aus Hilfssatz 5. ein, so treten fünf x-Potenzen auf, deren höchster Exponent $\frac{163}{494}$ wird.

Somit ist

$$\sum_{n \leqq \xi} \psi(\varphi(n)) = O\Bigl(x^{\frac{163}{494}}\Bigr).$$

Beachtet man die Definition von ξ und φ, so folgt, dass jede innere Summe rechts in (9)

$$O\Bigl(x^{\frac{163}{494}}\Bigr)$$

ist. Daher ergibt sich aus (9)

$$H(x) = \rho x + O\Bigl(x^{\frac{163}{494}}\Bigr),$$

womit (2) erreicht ist.