K. ABRAMOWICZ.

O pierwiastkach urojonych pewnej klasy funkcyj przestępnych.

Sur les racines imaginaires d'une classe de fonctions transcendantes.

W pracy niniejszej zamierzamy podać pewną własność pierwiastków urojonych funkcji przestępnej $\varphi(z)$, spełniającej równanie

$$\varphi''(z) = W(z) \cdot \varphi(z), \tag{1}$$

w którem $W(z)$ jest funkcją wymierną o spółczynnikach rzeczywistych. Do tej klasy funkcyj $\varphi(z)$ należą funkcje Legendre'a i funkcje Bessela, o których wiadomo[1]), że nie posiadają pierwiastków urojonych. Do klasy tej należą też funkcje P i funkcje Q Riemanna; o pierwiastkach urojonych funkcji P istnieje szereg prac Kleina, Hurwitza, Van Vleck'a[2]), zajmujących się wyznaczeniem liczby pierwiastków urojonych funkcji P. Własność pierwiastków urojonych funkcji $\varphi(z)$, którą podajemy w pracy niniejszej, polega na tem, że można wskazać taki obszar płaszczyzny z, wewnątrz którego znajdują się wszystkie pierwiastki urojone funkcji $\varphi(z)$, czyli innemi słowy oddzielić pierwiastki urojone funkcji $\varphi(z)$. Mamy mianowicie twierdzenie:

Jeżeli przez r i s oznaczymy dwa dowolne pierwiastki sprzężone równania $\varphi(z)=0$, a wyrażenie

---

[1]) Np. Schafheitlin: Die Theorie der Besselschen Functionen: p. 122.

[2]) Klein: Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe (Math. An., 37, p. 579), Hurwitz: Ueber die imaginären Nullstellen der hypergeometrischen Reihe (Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wiss. zu Götlingen, 1906), Van Vleck: A determination of the number of real and imaginary roots of the hypergeometric series (Transactions of the Am. Math. Society, Vol. 3).

$$D(\zeta) = \varphi(r\zeta)\,\frac{d\varphi(s\zeta)}{d\zeta} - \varphi(s\zeta)\,\frac{d\varphi(r\zeta)}{d\zeta},$$

w którem ζ jest zmienną rzeczywistą, przyjmuje przy $\zeta = o$ wartość $D(o) = o$, to pierwiastki r i s równania $\varphi(z) = 0$ mają takie położenie na płaszczyźnie $z = x + iy$, że promienie Or i Os, wychodzące z początku O układu spółrzędnych, przecinają krzywą

$$(x+iy)^2 W(x+iy) = (x-iy)^2 W(x-iy); \tag{2}$$

jeżeli zaś przy $\zeta = \infty$ wyrażenie $D(\zeta)$ przyjmuje wartość $D(\infty) = o$, to pierwiastki r i s równania $\varphi(z) = o$ mają takie położenie na płaszczyźnie z, że przedłużenia promieni Or i Os poza punkty r i s przecinają krzywą (2).

§ 1.

Przy dowodzie wypowiedzianego twierdzenia opierać się będziemy na następującej własności elementarnej: jeżeli przy $b > a > o$ mamy

$$\int_a^b f(z)\,\psi(z)\,dz = 0$$

a funkcja $f(z)$ zachowuje znak w całym przedziale (a, b), to funkcja $\varphi(z)$ musi przynajmniej raz jeden zmieniać znak w przedziale (a, b).

Oznaczając przez

$$r = x_0 + iy_0,\; s = x_0 - iy_0$$

dwa pierwiastki sprzężone równania $\varphi(z) = 0$, a przez ζ zmienną rzeczywistą, utworzymy iloczyny $r\zeta$ i $s\zeta$, które przedstawią zbiór punktów, położonych na promieniach Or i Os, wychodzących z początku O układu spółrzędnych. Wtedy, jak łatwo widzieć, wyrażenie

$$D(\zeta) = \varphi(r\zeta)\,\frac{d\varphi(s\zeta)}{d\zeta} - \varphi(s\zeta)\,\frac{d\varphi(r\zeta)}{d\zeta} \tag{3}$$

będzie posiadało[1]) własność $D(1) = 0$ (ponieważ $\varphi(r) = \varphi(s) = 0$).

[1]) Pochodna $d\varphi(z\zeta) : d\zeta$ przy $\zeta = 1$ nie może być ∞, gdyż funkcja miałaby wtedy punkt logarytmowy w r.

Ponieważ, na mocy równania (1), mamy

$$\frac{d^2\varphi(r\zeta)}{d\zeta^2} = r^2 W(r\zeta)\,\varphi(r\zeta),$$

to z łatwością otrzymujemy wyrażenie $dD(\zeta)$ na różniczkę $D(\zeta)$ w postaci

$$dD(\zeta) = \{s^2 W(s\zeta) - r^2 W(r\zeta)\}\,\varphi(r\zeta)\,\varphi(s\zeta)\,d\zeta,$$

co pozwoli nam wyrazić funkcję $D(\zeta)$ w postaci całki

$$D(\zeta) = \int_1^\zeta \left\{s^2 W(s\zeta) - r^2 W(r\zeta)\right\} \varphi(r\zeta)\,\varphi(s\zeta)\,d\zeta. \tag{4}$$

Otrzymane wyrażenie na $D(\zeta)$ prowadzi nas do rozpatrzenia następujących dwu przypadków: 1) $D(0) = 0$, 2) $D(\infty) = 0$, z których każdy omówimy osobno.

§ 2.

Niech przy $\zeta = 0$ wyrażenie $D(\zeta)$ otrzymuje wartość $D(o) = o$. Wtenczas wzór (4) da nam równość następującą:

$$o = \int_1^o \left\{s^2 W(s\zeta) - r^2 W(r\zeta)\right\} \varphi(r\zeta)\,\varphi(s\zeta)\,d\zeta. \tag{5}$$

W całce, będącej po prawej stronie, iloczyn $\varphi(r\zeta)\,\varphi(s\zeta)$ jest liczbą dodatnią, jako iloczyn dwu liczb sprzężonych; musi przeto przy pewnej wartości ζ, zawartej w przedziale $0 < \zeta < 1$, zachodzić równość: [1])

$$s^2 W(s\zeta) - r^2 W(r\zeta) = o.$$

Innemi słowy, mając na uwadze oznaczenia $r = x_0 + iy_0$, $s = x_0 - iy_0$, możemy powiedzieć, że równanie

$$(x_0\zeta + iy_0\zeta)^2 W(x_0\zeta + iy_0\zeta) = (x_0\zeta - iy_0\zeta)\, W(x_0\zeta - iy_0\zeta)$$

względem ζ mieć musi przynajmniej jeden pierwiastek między 0 i 1.

Otrzymaną własność możemy jeszcze wyrazić geometrycznie tak:

[1]) mianownik lewej strony zachowuje znak.

Jeżeli O jest początkiem układu spółrzędnych, to pierwiastki r i s są tak położone względem krzywej

$$(x+iy)^2 W(x+iy) = (x-iy)^2 W(x-iy)\,,$$

że odcinki Or i Os przecinają tę krzywą.

§ 3.

Rozpatrzmy teraz drugi przypadek, w którym przy $\zeta = \infty$ wyrażenie $D(\zeta)$ przyjmuje wartość $D(\infty) = 0$.

Z wzoru (4) otrzymamy wtedy następującą wartość:

$$0 = \int_1^\infty \left\{ r^2 W(r\zeta) - s^2 W(s\zeta) \right\} \varphi(r\zeta)\, \varphi(s\zeta)\, d\zeta.$$

Ponieważ w całce, będącej po prawej stronie iloczyn $\varphi(r\zeta)\,\varphi(s\zeta)$ jest liczbą dodatnią, to przy jednej przynajmniej wartości ζ, zawartej w przedziale $1 < \zeta < \infty$ musi wyrażenie

$$r^2 W(r\zeta) - s^2 W(s\zeta)$$

stawać się zerem.

Innemi słowy, równanie

$$(x_0\zeta + iy_0\zeta)^2 W(x_0\zeta + iy_0\zeta) - (x_0\zeta - iy_0\zeta)^2 W(x_0\zeta - iy_0\zeta) = O$$

względem ζ mieć musi przynajmniej jeden pierwiastek, zawarty w przedziale $(1, \infty)$.

Otrzymaną własność możemy, podobnie jak poprzednią, wyrazić geometrycznie tak:

Jeżeli $D(\infty) = 0$, to pierwiastki urojone r i s funkcji $\varphi(z)$, spełniającej równanie (1), mają takie położenie na płaszczyźnie z, że przedłużenia promieni Or i Os przecinają krzywą

$$(x+iy)^2 W(x+iy) = (x-iy)^2 W(x-iy).$$

Zostały w ten sposób udowodnione obie części przytoczonego na początku twierdzenia.

§ 4.

Zastosowanie otrzymanej własności funkcji $\varphi(z)$ do funkcji P Riemanna daje wynik, który, jak nam się wydaje, znany nie jest.

Otrzymujemy mianowicie własność następującą:

Jeżeli wszystkie spółczynniki $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \gamma', \gamma''$ funkcji P, jak również i jej punkty osobliwe a, b, c, są rzeczywiste i jeżeli położymy $\alpha'' - \alpha' = \alpha$, $\beta'' - \beta' = \beta$, $\gamma'' - \gamma' = \gamma$, to przy $\alpha < 1$ wszystkie pierwiastki urojone gałęzi $P^{(\alpha')}$, $P^{(\alpha'')}$ funkcji P leżą wewnątrz trójkąta kołowego z wierzchołkiem b i kątami

$$\pi,\ \pi,\ arc\sin \frac{1-\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}\,,$$

utworzonego przez okrąg koła

$$\lambda(x^2+y^2) + 2\mu x + \nu = o, \tag{7}$$

gdzie

$$\lambda = (c-b)^2 - 2\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)(c-b) + \frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)^2,$$

$$-\mu = (c-b)^2 a - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)(c-b)(a+b) + \frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)^2 b,$$

$$\nu = (c-b)^2 a^2 - 2\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)(c-b)\,ab + \frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)^2 b^2\,,$$

i okręgi kół:

$$x^2 + y^2 - x(a+b) + \frac{y}{m}(b-a) + ab = 0\,,$$

$$x^2 + y^2 - x(a+b) + \frac{y}{m}(b-a) + ab = 0\,,$$

w których m ma wartość:

$$\frac{1}{m} = +\sqrt{\left\{\frac{\alpha^2-\beta^2}{1-\gamma^2}\right\}^2 - 1}$$

Jeżeli $\beta < 1$, to wszystkie pierwiastki urojone gałęzi $P^{(\alpha')}$, $P^{(\alpha'')}$ leżą wewnątrz trójkąta, utworzonego przez te same koła, lecz z wierzchołkiem w a; jeżeli zaś jednocześnie $\alpha < 1, \beta < 1$, to wszystkie pierwiastki urojone gałęzi $P^{(\alpha')}, P^{(\alpha'')}$ leżą wewnątrz koła (7).

Wyniki analogiczne dla pierwiastków urojonych gałęzi $P^{(\alpha')}$, $P^{(\alpha'')}$, $P^{(\gamma')}$ $P^{(\gamma'')}$ otrzymujemy z przytoczonego twierdzenia za pomocą podstawień: $(ab)\,(\alpha\beta)$, $(ac)\,(\alpha\gamma)$.

§ 5.

Aby doprowadzić równanie funkcji P do postaci (1), położymy $P=u\varphi$, gdzie

$$u=(z-a)^{\frac{\alpha'+\alpha''}{2}}(z-b)^{\frac{\beta'+\beta''}{2}}(z-c)^{\frac{\gamma'+\gamma''-1}{2}}\ ;$$

oznaczając wtedy

$$(zab\,c)=\frac{z-a}{z-b}\cdot\frac{c-b}{c-a}$$

i zważając na wzór:

$$\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)^2\frac{d^2\varphi(z)}{d\log(zab\,c)^2}=\varphi''(z)+\varphi'(z)\left\{\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}\right\},$$

otrzymamy na funkcję $\varphi(z)$ równanie:

$$\frac{d^2\varphi(z)}{d\log(zabc)^2}=\frac{Az^2+Bz+C}{4\,(a-b)^2\,(z-c)^2}\,\varphi(z),$$

gdzie

$$A=\alpha^2(a-b)(a-c)+\beta^2(b-a)(b-c)+\gamma^2(c-a)(c-b),$$

$$-B=\alpha^2(a-b)(a-c)(b+c)+\beta^2(b-a)(b-c)(a+c)$$
$$+(\gamma^2-1)(c-a)(c-b)(a+b),$$

$$C=\alpha^2(a-b)(a-c)\,bc+\beta^2(b-a)(b-c)\,ac+(\gamma^2-1)(c-a(c-b)\,ab\,.$$

Otrzymane tak równanie napiszemy w postaci:

$$\text{(8)}\qquad \frac{d^2\varphi(z)}{d\log(zab\,c)^2}=\frac{K(zabc)^2+L(zab\,c)+M}{4\left\{(zab\,c)-1\right\}^2}\,\varphi(z)$$

gdzie spółczynniki K, L, M mieć będą wartości

$$\text{(9)}\qquad K=\beta^2,\ L=\gamma^2-\alpha^2-\beta^2-1,\ M=\alpha^2\,.$$

Jeżeli oznaczymy dla skrócenia

$$(zabc)=\zeta,\ \varphi(z)=\Phi(zabc)=\Phi(\zeta),$$

to równanie (8) mieć będzie postać:

$$\text{(10)}\qquad \frac{d^2\Phi(\zeta)}{(d\log\zeta)^2}=w(\zeta)\,\Phi(\zeta),$$

gdzie

$$w(\zeta)=\frac{K\zeta^2+L\zeta+M}{4\,(\zeta-1)^2}\,.$$

§ 6.

Oznaczając przez $r=x_0+iy_0$ dwa dowolne pierwiastki sprzężone równania $\Phi(\zeta)=o$ i stosując do równania (10) wynik ogólny, otrzymamy dla wyrażenia

$$\text{(11)}\qquad D(\zeta)=\Phi(r\zeta)\frac{d\,\Phi(s\zeta)}{d\log\zeta}-\Phi(r\zeta)\frac{d\,\Phi(r\zeta)}{d\log\zeta}$$

różniczkę $dD(\zeta)$ w postaci:

$$dD(\zeta)=\left\{w(s\zeta)-w(r\zeta)\right\}\Phi(r\zeta)\,\Phi(s\zeta)\,d\log\zeta\ .$$

Całka (4), ze względu na równość:

$$\frac{d^2\,\Phi(r\zeta)}{d\log(r\zeta)^2}=\frac{d^2\,\Phi(r\zeta)}{(d\log\zeta)^2},$$

będzie miała postać:

$$D(\zeta)=\int_1^{\zeta}\left\{w(s\zeta)-w(r\zeta)\right\}.\,\Phi(r\zeta)\,\Phi(s\zeta)\,d\log\zeta,$$

lub też po dokonaniu rachunków:

$$\text{(12)}\ D(\zeta)=\frac{s-r}{4}\int_1^{\zeta}\left\{2M+L+(K-M)(r+s)\zeta-(2K+L)rs\zeta^2\right\}\frac{\Phi(r\zeta)\,.\,\Phi(s\zeta)}{(r\zeta-1)^2(s\zeta-1)^2}\,d\zeta.$$

Mając to wyrażenie, rozpatrzymy, przy jakich warunkach będzie: 1^0, $D(0)=0$, 2^0 $D(\infty)=0$. Biorąc pod uwagę pierwiastki urojone (różne od a, b, c) gałęzi $P^{(\alpha')}$, mieć będziemy rozwinięcie (ze względu na wartość u w iloczynie $P = u\varphi$):

$$\Phi(\zeta) = \zeta^{-\frac{\alpha}{2}}\,\mathfrak{P}(\zeta),$$

gdzie $\mathfrak{P}(\zeta)$ jest szeregiem potęgowym z różnym od zera wyrazem stałym.

Z wzoru (11) obliczymy wtedy, że $D(\zeta)$ w pobliżu punktu $z=a$ mieć będzie rozwinięcie:

$$D(\zeta) = (z-a)^{-\alpha+1}\,\mathfrak{P}(z-a),$$

gdzie $\mathfrak{P}$ jest szeregiem potęgowym z różnym od zera wyrazem stałym.

Z otrzymanego rozwinięcia wynika, że przy $\alpha < 1$ będzie $D(0) = 0$ ponieważ przy $z = a$ mamy $\zeta = 0$.

Stosując wynik ogólny do rozważanego przypadku, otrzymamy, że przy $\alpha < 1$ musi istnieć w przedziale $(0, 1)$ taka wartość ζ, przy której spełnia się równość:

$$(2K+L)\,rs\,\zeta^2 - (K-M)(r+s)\,\zeta - (2M+L) = 0\,;$$

innemi słowy, równanie

$$(x_0^2\zeta^2 + y_0^2\zeta^2)(2K+L) - 2(K-M)\,x_0\,\zeta - (2M+L) = 0$$

względem ζ mieć będzie pierwiastek, zawarty między o i 1.

Geometrycznie wyrazimy to tak: prosta, łącząca punkt $r = x_0 + iy_0$ z początkiem 0 spółrzędnych, spotyka koło

$$(2K+L)(x^2+y^2) - 2(K-M)\,x - (2M+L) = 0\,,$$

lub też na podstawie (9) koło:

$$(13)\qquad (x^2+y^2)(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1) - 2x(\alpha^2-\beta^2) + \alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1 = 0\,,$$

Lecz $r = x_0 + iy_0$ jest pierwiastkiem fnnkcji $P^{(\alpha')}(\zeta)$ o argumencie ζ, przeto, jeżeli oznaczymy przez ρ pierwiastek urojony funkcji $P^{(\alpha')}(z)$, tc, zgodnie z przyjętem oznaczeniem, będzie

$$r = (\rho\, abc)\,.$$

Innemi słowy: przy $\alpha < 1$ każdy pierwiastek urojony ρ gałęzi $P^{(\alpha')}(z)$ funkcji P ma takie położenie na płaszczyźnie z, że prosta łącząca początek O układu spółrzędnych z punktem $(\rho\, abc)$, spotyka koło (13).

§ 7.

W pobliżu punktu $z = b$ funkcja $D(\zeta)$ ma rozwinięcie[1])

$$D(\zeta) = (z-b)^{-\beta+1}\,\mathfrak{P}(z-b),$$

gdzie $\mathfrak{P}$ jest szeregiem potęgowym o wyrazie stałym różnym od 0.

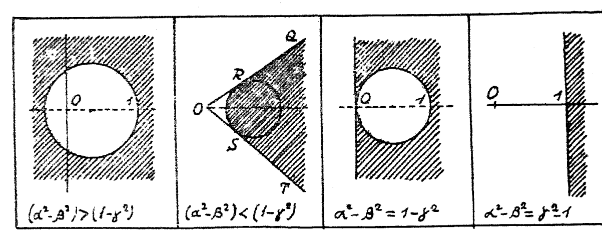
Jeżeli założymy $\beta < 1$, to przy $z = b$ będzie $\zeta = \infty$ i przeto $D(\infty) = 0$. Stosując więc wynik ogólny, dochodzimy, podobnie jak poprzednio, do wniosku, że równanie

$$(x_0^2\zeta^2 + y_0^2\zeta^2)(2K+L) - 2(K-M)\,x_0\,\zeta - (2M+L) = 0$$

względem ζ mieć musi pierwiastek zawarty między 1 i ∞.

Oznaczając przez ρ pierwiastek urojony gałęzi $P^{(\alpha)}(z)$ o argumencie z, wnioskujemy dalej, że: przy $\beta < 1$ każdy pierwiastek ρ gałęzi $P^{(\alpha')}$ funkcji $P(z)$ ma takie położenie na płaszczyźnie z, że przedłużenie prostej, łączącej punkt O z punktem $(\rho\, abc)$ przecina koło (13).

Koło (13) przechodzi przez punkt $x = 1$ na płaszczyźnie. Rozróżniamy cztery przypadki. Jeżeli $|\alpha^2-\beta^2| > |1-\gamma^2|$, to punkt O leży zewnątrz koła

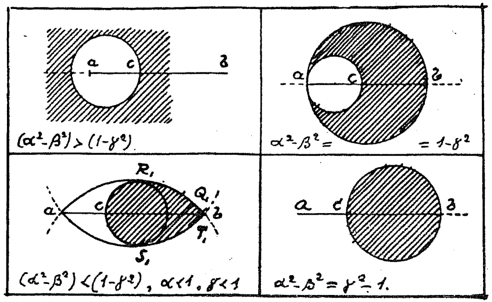


Rys. 1.

(13), jeżeli zaś $|\alpha^2-\beta^2| < |1-\gamma^2|$, to punkt O leży wewnątrz koła. W pierwszym przeto przypadku (fig. 2, rys. 1) przy $\alpha < 1$ liczby $(\rho\, abc)$ leżą w obszarze $RQTS$, utworzonym przez styczne z punktu O do koła (13), a przy $\beta < 1$ w obszarze $OR1SO$; w drugim zaś przypadku przy $\alpha < 1$ (fig. 1) liczby $(\rho\, abc)$ leżą poza kołem, a przy $\beta < 1$ wewnątrz koła (13). Jeżeli $\alpha^2-\beta^2 = 1-\gamma^2$, to koło (13) przechodzi przez punkt O;

[1]) Ponieważ mamy $P^{(\alpha')} = m_1 P^{(\beta')} + m_2 P^{(\beta'')}$, przy m_1 i m_2 stałych, oraz $\alpha\beta'' > \beta'$

wtedy przy $\alpha < 1$ liczby $(\rho\, abc)$ leżą w obszarze, wskazanym na fig. 3 rys. 1, przy $\beta < 1$ wewnątrz koła (13); przy $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2 - 1$ koło (13) redukuje



Rys. 2

się do $x = 1$; wszystkie liczby $(\rho\, abc)$ przy $\alpha < 1$ leżą po prawej stronie (fig. 4) prostej $x = 1$; przy $\beta < 1$ po lewej stronie tej prostej.

§ 8.

Rozpatrzmy teraz, w jakim obszarze płaszczyzny z leżą pierwiastki ρ funkcji $P^{(\alpha')}(z)$. Jeżeli na podstawie powiedzianego punkty $(\rho\, abc)$, stosownie do zależności między α, β, γ, muszą leżeć (przy $\alpha < 1$) wewnątrz obszarów, wskazanych na rys. 1, to wynika z tego, że pierwiastki ρ powinny leżeć wewnątrz takich obszarów płaszczyzny z, na jakie przy pomocy funkcji

(13) $$z' = (z\, abc)$$

odwzorowują się obszary, wskazane na rys. 1.

Kładąc $z = x + iy$, $z_0 = x - iy$, równanie koła (13) napiszemy w postaci:

$$z' z'_0 - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(z'+z'_0) + \frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1} = 0\,,$$

skąd po dokonaniu przekształcenia (14) otrzymamy koło:

$$\lambda\, z z_0 + \mu\,(z+z_0) + \nu = o,$$

w którem

$$\lambda = (c-b)^2 - 2\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)(c-b) + \frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)^2\,,$$

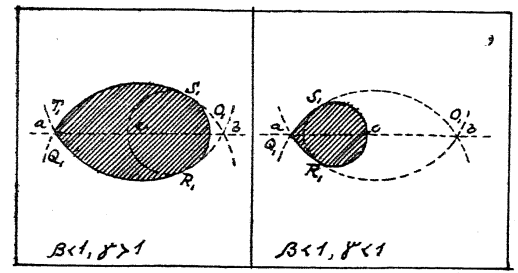
$$-\mu = (c-b)^2 a - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)(c-b)(a+b) + \frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)^2 b\,,$$

$$\nu = (c-b)^2 a^2 - 2\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)(c-b)\,ab + \frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}(c-a)^2 b^2\,,$$

lub też

(15) $$\lambda\,(x^2+y^2) + 2\mu\, x + \nu = 0\,;$$

koło to przecina oś x w punkcie c.



Rys. 3

Równania stycznych OQ i OT na fig. 2 rys. 1 napiszemy w postaci $y = mx$, gdzie

$$\frac{1}{m} = \pm\sqrt{\left\{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2-1}\right\}^2 - 1},$$

lub też w postaci:

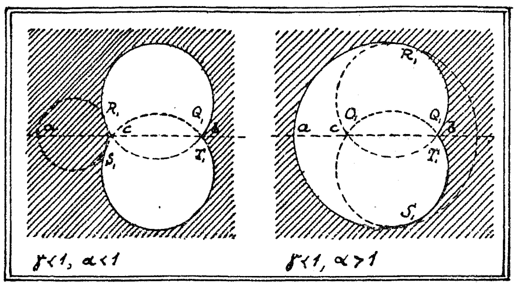
$$z'(1-mi) = z'_0(1+mi)\,.$$

Po przekształceniu za pomocą (14) otrzymamy dwa równania kół:

(16)
$$x^2 + y^2 - x(a+b) + \frac{y}{m}(b-a) + ab = 0\,.$$
$$x^2 + y^2 - x(a+b) - \frac{y}{m}(b-a) + ab = 0\,,$$

przecinających oś x w punktach a i b i będących obrazami stycznych OQ i OT, poprowadzonych z punktu O do koła (13).

Kreśląc koła (15) i (16), podaliśmy na rys. 2 odpowiednie obszary, w których leżą pierwiastki urojone ρ gałęzi $P^{(\alpha')}(z)$, $P^{(\alpha'')}(z)$ funkcji [1]) $P(z)$; odpowiednie zależności między α, β, γ są wskazane przy każdym obszarze.



Rys. 4

Łatwo widzieć, że wszystko co powiedziano o gałęziach $P^{(\alpha')}$ i $P^{(\alpha'')}$, stosuje się do par $P^{(\beta')}$, $P^{(\beta'')}$ i $P^{(\gamma')}$, $P^{(\gamma'')}$ po zastosowaniu podstawień $(ab)(\alpha\beta)$ i $(\alpha\gamma)$.

W samej rzeczy, wystarczy wtedy przekształcić równanie funkcji $P(z)$ do postaci (8), lecz o argumentach odpowiednio $(zbac)$, $(zcab)$.

Rys. 3 i 4 dają obszary, w których leżą pierwiastki urojone gałęzi $P^{(\beta')}$ i $P^{(\gamma')}$ w przypadku, kiedy $|\alpha^2-\beta| > |1-\gamma^2|$.

[1]) Dla gałęzi $P^{(\alpha'')}$ rozwinięcie funkcji $\Phi(\zeta)$ zacznie się od potęgi $\zeta^{\frac{\alpha}{2}}$, a rozwinięcie $D(\zeta)$ od potęgi $(z-a)^{\alpha+1}$; $\alpha<1$ i $z=a$ będzie $D(0)=0$; do $P^{(\alpha'')}$ odnosi się wszystko, co powiedziano o $P^{(\alpha')}$.

RÉSUMÉ.

Dans notre travail nous donnons la propriété suivante de la fonction $\varphi(z)$ satisfaisant à l'équation $\varphi''(z) = W(z)\,.\,\varphi(z)$, où $W(z)$ désigne une fonction rationnelle aux coefficients réels: si l'on désigne par r et s deux racines imaginaires conjùguées de la fonction $\varphi(z)$ et si l'expression

$$D(\zeta) = \varphi(r\zeta)\frac{d\varphi(s\zeta)}{d\zeta} - \varphi(s\zeta)\frac{d\varphi(r\zeta)}{d\zeta}$$

a pour $\zeta = 0$ la valeur $D(0) = 0$, les racines r et s ont une telle position sur le plan de la variable z que les droites Or et Os joignant les points r et s à l'origine O de coordonnées coupent la courbe

$$(x+iy)^2\, W(x+iy) = (x-iy)^2\, W(x-iy).$$

Si l'on a au contraire $D(\infty) = 0$ les racines imaginaires r et s de la fonction $\varphi(z)$ ont une telle position sur le plan que les prolongements des segments Or et Os au delà de r et s coupent la courbe ci dessus.

En appliquant les resultats obtenus à la fonction P de Riemann nous développons les calculs nécessaires et nous obtenons des divers triangles circulaires à l'intérieur desquels se trouvent les racines imaginaires des différentes branches de la fonction P; nous distingons 4 cas, suivant les rélations entre paramètres α, β, γ de la fonction.