W. ŚLEBODZIŃSKI.

Recherches géométriques sur le champ statique de gravitation.

Własności geometryczne grawitacyjnego pola statycznego.

L'élément linéaire d'un champ statique d'Einstein est notamment donné par la formule

$$ds^2 = f^2\, dt^2 - d\sigma^2, \tag{1}$$

où

$$d\sigma^2 = \sum_{ik=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_x \tag{2}$$

désigne une forme définie positive, les coefficients f, g_{ik} étant des fonctions de trois seulement variables x_1, x_2, x_3. La forme (2) caractérise donc la métrique de l'espace proprement dit d'un champ statique; dans la suite nous désignerons cet espace par le symbole (V_3). Il est évident que l'espace (V_3) est assujetti à certaines conditions qui résultent des équations d'Einstein. Dans le Ch. I du présent mémoire nous obtenons ces conditions sous la forme des relations entre les grandeurs intimement liées avec les propriétés intrinsèques de l'espace (V_3). Les conditions trouvées deviennent particulièrement simples dans le cas de l'espace à deux courbures principales égales. Pour résoudre le problème proposé nous avons réduit les équations de gravitation à la forme canonique, en employant la méthode des congruences de G. Ricci. Dans le Ch. II nous nous proposons d'étudier les propriétés géométriques des trajectoires d'un point libre et des rayons lumineux dans un champ statique. Il résulte, en particulier, de ces recherches que les trajectoires d'un point libre sont des courbes planes, s'ils le sont les rayons lumineux, et réciproquement.

Le dernier Chapitre est consacré à la détermination des champs statiques dans lesquels les rayons lumineux sont des courbes planes. On trouve ainsi trois solutions des équations d'Einstein dont l'une est la forme bien connue de Schwarschild resp. de M. Trefftz.

CHAPITRE I.

Désignons par les symboles R_{iklm} les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel de la forme (2); on aura

$$R_{iklm} = \frac{\partial}{\partial x_m}\begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} im \\ k \end{bmatrix} + \sum_{pq=1}^{3} g^{(pq)} \left\{ \begin{bmatrix} im \\ q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} mk \\ p \end{bmatrix} \right\} \quad (3)$$

$$(i,\ k,\ l,\ m = 1,\ 2,\ 3),$$

où $g^{(pq)}$ sont les coefficients de la forme adjointe de la forme (2); ici et dans tout le mémoire les symboles de Christoffel se rapportent à la forme (2). Pour les composantes R_{ik} du tenseur réduit (verjüngter Tensor) nous obtiendrons les formules

$$R_{ik} = \sum_{l=1}^{3} R_{i}{}^{l}{}_{\cdot kl}. \quad (4)$$

Ce dernier tenseur donne naissance à la courbure scalaire R de Riemann

$$R = \sum_{ik=1}^{3} g^{(ik)} R_{ik}. \quad (5)$$

Désignons par les symboles f_i, f_{ik} les premières et les secondes dérivées covariantes de la fonction f par rapport à la forme (2) et par le symbole $\triangle_2 f$ le second paramètre différentiel de cette fonction par rapport à la même forme. Ces notations acceptées, les équations de gravitation d'Einstein obtiendront la forme suivante [1]),

$$\triangle_2 f = 0, \quad (6)$$

$$f_{ik} = f R_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \quad (7)$$

[1]) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 3. Aufl, 1919, p. 208.

Il suit de l'équation (6) que la fonction f est une fonction isothermique. Le paramètre $\triangle_2 f$ étant donné par la formule

$$\triangle_2 f = \sum_{ik=1}^{3} g^{ik} f_{ik},$$

il résulte des équations (6) et (7) la relation

$$\sum_{ik=1}^{3} g^{ik} R_{ik} = 0$$

ou, d'après la formule (5),

$$R = 0. \quad (8)$$

Dans les considérations suivantes nous ferons aussi usage d'un autre tenseur qui joue un rôle important dans plusieurs recherches de G. Ricci et dont les composantes contravarianses $\alpha^{(rs)}$ sont données par les formules [1])

$$\alpha^{(rs)} = \frac{R_{r+1\ r+2\ s+1\ s+2}}{g} \qquad (r,\ s = 1,\ 2,\ 3), \quad (9)$$

où g désigne le discriminant de la forme (2). (Ici et dans tout le mémoire nous regardons comme égaux deux indices dont la différence est égale à trois). Les composantes R_{ik} et α_{ik} sont liées par les relations [2])

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{2} R g_{ik} - R_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \quad (10)$$

En ayant égard à l'égalité (8), on peut à ces relations donner la forme qui suit

$$\alpha_{ik} = - R_{ik} \qquad (i,\ k = 1\ \ 2,\ 3), \quad (11)$$

ce qui nous permet de remplacer les équations (7) par les suivantes

$$f_{ik} = f \alpha_{ik} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3). \quad (12)$$

[1]) G. Ricci et T. Levi-Civita Méthodes de calcul différentiel absolu et ses applications, Math. Ann., Bd. 54 (1901), Ch. 1 § 6., trad. polonaise par M. S. Dickstein. Prace mat.-fizyczne t. XII (1901).

[2]) G. Ricci Direzioni e invarianti principali di una varietà qualunque, Atti del R. Istituto Veneto, 1904.

Considérons maintenant un système triple (S) formé de congruences [1], [2], [3] de courbes de l'espace (V_3) et supposons que dans chaque point deux courbes appartenant à deux quelconques de ces congruences sont normales l'une à l'autre. Soit M un point arbitraire de (V_3); désignons par (h) $(h = 1, 2, 3)$ la courbe appartenant à $[h]$ et passant par M, par σ_h son arc compté à partir d'un point pris à volonté et par $\overline{e}_h$ un vecteur unitaire tangent à (h) au point M et dirigé dans le sens des arcs croissants. Soient γ_{hij} $(h, i, j = 1, 2, 3)$ les rotations du trièdre (T) formé de vecteurs $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. En désignant par $\lambda_{h/1}, \lambda_{h/2}, \lambda_{h/3}$ les composantes covariantes du vecteur $\overline{e}_h$, par $\lambda_{h/rs}$ leurs dérivées covariantes, nous obtenons les relations [1])

$$\gamma_{hij} = \sum_{rs=1}^{3} \lambda_{h/rs}\, \lambda_i^{(r)}\, \lambda_j^{(s)} \qquad (h, i, j = 1, 2, 3). \tag{13}$$

Si $\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_h}$ est la dérivée de la fonction f par rapport à l'arc σ_h, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_h} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_l}\, \lambda_h^{(l)} \qquad (h = 1, 2, 3). \tag{14}$$

Les congruences du systeme (S) permettent de former 9 invariants

$$\omega_{hk} = \sum_{rs=1}^{3} \alpha_{rs}\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_k^{(s)} \qquad (h, k = 1, 2, 3), \tag{15}$$

satisfaisant aux relations $\omega_{hk} = \omega_{kh}$. Si l'on $\omega_{hk} = 0$ $(h, k = 1, 2, 3;$ $h \neq k)$, les congruences appartenant à (S) sont les congruences principales [2]) de l'espace (V_3) et les quantités $\omega_h = \omega_{hh}$ $(h = 1, 2, 3)$ sont les courbures principales de cet espace. En calculant les invariants ω_{hk} en fonction des rotations γ_{hij} et de leurs dérivées, on trouve les formules suivantes

[1]) Pour tout ce qui concerne les notations du calcul des congruen ces orthogonales nous renvoyons au Ch. II § 1 — 4 du Mémoire déjà cité de M. G. Ricci et I. Levi-Civita.

[2]) G. Ricci, Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni, Memorie Soc. Ital. delle Sc. 1899.

$$\omega_{hk} = \frac{\partial \gamma_{h+1\ h+2\ k+1}}{\partial \sigma_{k+2}} - \frac{\partial \gamma_{h+1\ h+2\ k+2}}{\partial \sigma_{k+1}} + \sum_{j=1}^{3} \Big\{ \gamma_{h+1\ h+2\ j} \left(\gamma_{j\ k+1\ k+2} - \gamma_{j\ k+2\ k+1}\right) + \gamma_{j\ h+1\ k+2}\, \gamma_{j\ h+2\ k+1} - \gamma_{j\ h+1\ k+1}\, \gamma_{j\ h+2\ k+2} \Big\} \quad (h, k = 1, 2, 3) \tag{16}$$

Les équations d'Einstein sont, nous l'avons vu, équivalentes aux équations (8) et (12). Nous nous proposons de transformer ces équations à l'aide des formules précédentes. En résolvant les relations (14), nous obtenons les égatités

$$f_i = \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial \sigma_r}\, \lambda_{r/i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La dérivation covariante de ces formules nous donne

$$f_{ik} = \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial \sigma_r}\, \lambda_{r/ik} + \sum_{rs=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_s\, \partial \sigma_r}\, \lambda_{r/i}\, \lambda_{r/k} \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{17}$$

En ajoutant les équations (12) après les avoir multipliées par $\lambda_r^{(i)}\, \lambda_s^{(k)}$ il vient

$$\sum_{ik=1}^{3} f_{ik}\, \lambda_r^{(i)}\, \lambda_s^{(k)} + f \sum_{ik=1}^{3} \alpha_{ik}\, \lambda_r^{(i)}\, \lambda_s^{(k)} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, 3).$$

En tenant compte des formules (15) et (17), les équations ci-dessus deviennent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_s\, \partial \sigma_r} + \sum_{j=1}^{3} \gamma_{j\,rs}\, \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} + f\, \omega_{rs} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, 3). \tag{18}$$

Les équations précédentes sont donc équivalentes aux équations (12). — Nous allons transformer l'équation (8). Les relations (5) et (11) nous permettent de ramener cette équation à la forme suivante

$$\sum_{ik=1}^{3} g^{(ik)}\, \alpha_{ik} = 0. \tag{19}$$

Si l'on y remplace les composantes α_{ik} par leurs expressions tirées des formules (15), on trouve

$$\sum_{r=1}^{3} \omega_{rr} = 0. \tag{20}$$

Nous voyons donc que le système formé d'équations (18) et (20) est équivalent aux équations (8) et (12) et, par suite, aux équations d'Einstein (forme canonique [1]) des équations de gravitation).

Nous pouvons simplifier les équations (18) et (20) par un choix convenable des congruences [1], [2], [3]. Supposons en premier lieu que le système (S) est formé de congruences principales. En gardant les notations acceptées plus haut (p. 5), les équations (18) et (20) deviennent

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i^2} - \sum_{j=1}^{3} \gamma_{iji} \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} + \omega_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k} - \sum_{j=1}^{3} \gamma_{kji} \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k),
\end{gathered} \tag{18a}$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0. \tag{20a}$$

Rappelons que les dérivées $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k}$ d'une fonction arbitraire F satisfont aux identités [2])

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_k \partial \sigma_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k} = \sum_{j=1}^{3} (\gamma_{jki} - \gamma_{jik}) \frac{\partial F}{\partial \sigma_j} \qquad (i\ k = 1, 2\ 3).$$

En y posant $F = \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_l}$ $(l = 1, 2, 3)$ et en tenant compte des équations (18a), on en déduit

$$(\omega_{i+1} - \omega_i) \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} + \left\{ \frac{\partial \omega_{i+1}}{\partial \sigma_i} - \gamma_{i+1\, i\, i+1} (\omega_{i+1} - \omega_i) \right\} f = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{21}$$

[1]) G. Ricci et T. Levi-Civita, l. c., Ch. II. § 5.
[2]) Id. l. c., Ch. II § 2.

$$\gamma_{123}(\omega_1 - \omega_2) = \gamma_{231}(\omega_2 - \omega_3) = \gamma_{312}(\omega_3 - \omega_1). \tag{22}$$

Opservons que les expressions pour les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_i}$, tirées des équations (21), doivent satisfaire aux équations (18a). Cela nous conduit au système suivant

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \sigma_i} = \Omega_i^2 + \sum_{j=1}^{3} \gamma_{iji} \Omega_j + \omega_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{23}$$

$$\frac{\partial \Omega_k}{\partial \sigma_i} = \Omega_i \Omega_k + \sum_{j=1}^{3} \gamma_{kji} \Omega_j \qquad i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k), \tag{24}$$

où l'ona posé

$$\Omega_i = \frac{\dfrac{\partial \omega_{i+1}}{\partial \sigma_i} - \gamma_{i+1\, i\, i+1} (\omega_{i+1} - \omega_i)}{\omega_{i+1} - \omega_{i+2}} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Il résulte des considérations précedentes, où nous avons supposé $\omega_i \neq \omega_k$ $(i \neq k)$, que les relations (20a), (22) (23), (24) expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme définie positive à trois courbures principales différentes caractérise la métrique de l'espace dans un champ statique.

En excluant de nos considérations le cas bien connu de la forme à trois coubures égales (le champ de Lorentz-Minkowski), nous allons étudier le second cas spécial, où deux seulement de courbures principales sont égales. Posons pour fixer les idées $\omega_1 = \omega_2$. Il suit alors des équations (21) et (22)

$$\gamma_{312} = \gamma_{321}, \tag{25}$$

$$\gamma_{131} = \gamma_{232}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = - \gamma_{313} f, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = - \gamma_{323} f. \tag{27}$$

Les relations (25) et (26) montrent que la congruence [3] est formée de trajectoires orthogonales d'une famille (F) de surfaces à courbures principales égales. La congruence [3] étant une congruence principale, il résulte d'un théorème de M. G. Rimini[1]) que la valeur commune des courbures principales des surfaces appartenant à (F) est constante sur chacune d'elles; ces surfaces sont donc des sphères de l'espace (V_3). J'ai montré dans un autre article qui paraîtra prochainement dans les „Annales de la Société Polonaise de Math". qu'une famille de surfaces à courbures principales égales est une famille de Lamé. Cette proposition admise, nous pouvons choisir les congruences principales [1] et [2] de manière que l'on ait aussi $\gamma_{123}=0$. Remarquons maintenant que les expressions (27) pour les dérivées $\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}$, $\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}$ doivent satisfaire aux équations (18a); on en déduit les conditions suivantes

$$\frac{\partial \gamma_{313}}{\partial \sigma_3}=\frac{\partial \gamma_{323}}{\partial \sigma_3}=0\,, \tag{28}$$

$$\gamma_{131}\frac{\partial f}{\partial \sigma_3}=\frac{\partial \gamma_{131}}{\partial \sigma_3}f-\gamma^2_{131}f,\ \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2_3}+(\gamma^2_{313}+\gamma^2_{323}+\omega_3)\,f=0\,. \tag{29}$$

Nous rappelons aussi la condition (20a)

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3=0\,. \tag{30}$$

On peut vérifier aisément que les équations (27) et (29) n'entraînent pas de conditions nouvelles, le système composé de ces équations étant complètement intégrable en vertu des relations (25), (26), (28) et (30). Ces dernières égalités forment donc des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme définie positive à deux courbures principales égales caractérise la métrique de l'espace d'un champ statique. On peut enoncer ces conditions d'une manière très simple. Remarquons, en effet, que nous avons pour la courbure et la torsion d'une courbe de la congrueme [3] les formules suivantes[2])

$$K^2_3=\gamma^2_{313}+\gamma^2_{323},\ S_3=\frac{\gamma_{323}\dfrac{\partial \gamma_{313}}{\partial \sigma_3}-\gamma_{331}\dfrac{\partial \gamma_{323}}{\partial \sigma_3}}{\gamma^2_{313}+\gamma^2_{323}}\,.$$

[1]) D. J. Struik, Grundzüge der mehrdimentionalen Differentialgeometrie, 1922, p. 143.

[2]) W. Ślebodziński Contribution â la théorie des courbes et des congruences d'un espace riemannien á trois dim„ Prace mat.- fiz. t. XXXIV, § 2.

Le rapprochement de ces formules et des relations (28) montre que la torsion des courbes (3) est nulle et que leur courbure est constante, la congruence [3] est donc formée de cercles de la variété (V_3). Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Pour qu'une forme définie positive à deux courbures égales caracterise la métrique de l'espace dans un champ statique, il faut et il suffit qu'une de ses congruences principales soit formée de cercles normaux à une famille de sphères et que la somme de ses courbures principales soit nulle.

En terminant le Ch. présent, nous allons faire un second choix du système (S) (v. p. 6): supposons que la congruence [3] soit formée de courbes normales aux surfaces $f=\text{const.}$ Dans ce cas le système (18) se réduit aux équations suivantes:

$$\frac{\partial \log f}{\partial \sigma_1}=0,\ \frac{\partial \log f}{\partial \sigma_2}=0,\ \frac{\partial \log f}{\partial \sigma_3}=\frac{\omega_{ik}}{\gamma_{i3k}} \qquad (i=1,2;\ k=1,2,3), \tag{31}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2_3}+\omega_{33}f=0\,,$$

l'équation (20) restant inaltérée.

CHAPITRE II.

Les équations du mouvement d'un point libre dans un champ statique sont de la forme suivante[1]):

$$f^2\frac{dt}{ds}=a\,, \tag{32}$$

$$\frac{d^2x_j}{ds^2}+\sum_{ik=1}^{3}\left\{ {ik \atop j} \right\}\frac{dx_i}{ds}\,\frac{dx_k}{ds}+f\,f^{(j)}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=0 \qquad (j=1,2,3), \tag{33}$$

où a désigne une constante arbitraire. Nous nous proposons de transformer les équations (33) en y substituant aux dérivées $\frac{dx_i}{ds}$, $\frac{d^2x_i}{ds^2}$ les

[1]) H. Weyl, l. c., p. 220.

dérivées par rapport à l'arc σ de la trajectoire du point mobile. On trouve, en combinant les égalités (1) et (2):

$$f^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2-\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2=1;$$

l'équation (32) devient donc

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{\sqrt{a^2-f^2}}{f}. \tag{34}$$

En différentiant cette équation par rapport à s, nous obtenons

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2}=-\frac{a}{f^2\sqrt{a^2-f^2}}\frac{df}{ds}$$

ou, en vertu de la relation (34),

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2}=-\frac{a^2}{f^3}\frac{df}{d\sigma}. \tag{35}$$

Les formules ci-dessus nous permettent de réaliser la transformation proposée, on aura

$$f(a^2-f^2)\left[\frac{d^2x_j}{d\sigma^2}+\sum\left\{{ik \atop j}\right\}\frac{dx_i}{d\sigma}\frac{dx_k}{d\sigma}\right]-a^2\frac{df}{d\sigma}\frac{dx_j}{d\sigma}=a^2f^{(j)}=0 \qquad (j=1,2,3). \tag{36}$$

Posons

$$\lambda^{(j)}=\frac{dx_j}{d\sigma} \qquad (j=1,2,3);$$

les quantités $\lambda^{(j)}$ sont des composantes contravariantes d'un vecteur unitaire $\bar{e}$ tangent à la trajectoire. Désignons par $\mu^{(r)}$ les composantes contravariantes du vecteur normal principal $\bar{n}$ et par $\nu^{(r)}$ les composantes contravariantes du vecteur binormal $\bar{b}$ de la trajectoire. En faisant usage de ces notations et des formules de Frenet[2]), les équations (36) deviennent

$$f(a^2-f^2)K\mu^{(j)}-a^2\frac{df}{d\sigma}\lambda^{(j)}+a^2f^{(j)}=0 \qquad (j=1,2,3), \tag{37}$$

[2]) W. Ślebodziński, l. c. § 1.

où K désigne la courbure de la trajectoire. Dans les considérations suivantes nous adopterons le choix du système (S) dont nous avons parlé à la fin du Ch. précédent. Les composantes covariantes du vecteur $\bar{e}_3$ (v. p. 4) seront donc proportionnelles aux dérivées f_i de la fonction f et l'on aura

$$f_i=\rho\,\lambda_{3/i} \qquad (i=1,2,3), \tag{38}$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. Or, d'après la définition du symbole $\frac{df}{d\sigma}$, on a

$$\frac{df}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{3}f_i\lambda^{(i)}.$$

En vertu des relations (38) cette formule devient

$$\frac{df}{d\sigma}=\rho\sum_{i=1}^{3}\lambda^{(i)}\lambda_{3/i}$$

ou

$$\frac{df}{d\sigma}=\rho\cos\Theta,$$

où l'on a désigné par Θ l'angle des vecteurs $\bar{e}$ et $\bar{e}_3$. En faisant usage de cette formule et des relations (38), on peut ramener les équations (37) à la forme suivante

$$f(a^2-f^2)K\mu^{(j)}=a^2\rho(\lambda^{(j)}\cos\Theta-\lambda_3^{(j)}) \qquad (j=1,2,3). \tag{39}$$

En ajoutant ces égalités après les avoir multipliées par μ_j, on en déduit la formule suivante pour la courbure de la trajectoire

$$K=\varepsilon\frac{a^2\rho\sin\Theta}{f(a^2-f^2)}, \qquad \varepsilon \pm 1. \tag{40}$$

En portant cette valeur dans les équations (39), nous pouvons les écrire comme il suit

$$\varepsilon\sin\Theta\,\mu^{(i)}=\cos\Theta-\lambda_3^{(i)} \qquad (i=1,2,3). \tag{41}$$

Les relations (41) entraînent comme conséquence immédiate l'égalité

$$\sum_{i=1}^{3} \nu^{(i)} \lambda_{3/i} = 0,$$

ce qui nous permet d'énoncer la proposition suivante:

Th. I. Le vecteur binormal en un point quelconque de la trajectoire est tangent à la surface $f=$ const. passant par ce point.

La formule (40) nous montre aussi que, si la trajectoire est normale en un de ses points à la surface $f=$ const, sa courbure est nulle dans ce point.

Désignons par D la dérivation d'un vecteur le long de la trajectoire et appliquons cette opérations aux relations (41); en tenant compte des formules de Frenet, il vient

$$\varepsilon \cos\Theta \frac{d\Theta}{d\sigma}\mu^{(i)} - \varepsilon K \sin\Theta \lambda^{(i)} - S \sin\Theta \nu^{(i)} = K\cos\Theta \mu^{(i)} - \sin\Theta \frac{d\Theta}{d\sigma}\lambda^{(i)} - (D\bar{e}_3)^{(i)} \qquad (i=1,2,3),$$

où l'on a désigné par S la torsion de la trajectoire. En ajoutant ces égalités après les avoir multipliées par $r^{(i)}$, on obtient la relation

$$\varepsilon S \sin\Theta = \sum_{i=1}^{3} \nu^{(i)} (D\bar{e}_3)_i \qquad (42)$$

Or, d'après la définiton du symbole D nous avons

$$(D\bar{e}_3)_i = \sum_{k=1}^{3} \lambda_{3/ik} \lambda^{(k)} \qquad (i=1,2,3);$$

d' autre part les dérivées covariantes $\lambda_{3/ik}$ s'expriment en fonction des rotations au moyen des formules[1])

$$\lambda_{3/ik} = \sum_{jl=1}^{3} \gamma_{3lj} \lambda_{l/i} \lambda_{j/k} \qquad (i,k=1,2,3).$$

[1]) G. Ricci et T. Levi-Civita, l. c., Ch. II.

En se servant des égalités ci dessus, la relation (42) devient

$$\varepsilon S \sin\Theta = \sum_{ij\,kl=1}^{3} \gamma_{3lj} \lambda_{l/i} \lambda_{j/k} \nu^{(i)} \lambda^{(k)}. \qquad (43)$$

Le vecteur binormal étant dans chaque point de la trajectroire tangent à la surface $f=$ const. passant par ce point (Th. I), nous pouvons poser

$$\lambda^{(i)} = (-\lambda_1^{(i)} \sin\varphi + \lambda_2^{(i)}\cos\varphi)\sin\Theta + \lambda_3^{(i)}\cos\Theta \qquad (i=1,2,3),$$

$$\nu^{(i)} = \lambda_1^{(i)}\cos\varphi + \lambda_2^{(i)}\sin\varphi \qquad (i=1,2,3),$$

où φ désigne l'angle des vecteurs $\bar{b}$ et $\bar{e}_1$. Si nous portons ces expressions dans la formule (43), nous obtiendrons la relation

$$\varepsilon S \sin\Theta = (\gamma_{131} - \gamma_{232})\sin\varphi\cos\varphi\sin\Theta + \gamma_{313}\cos\Theta\cos\varphi + \gamma_{323}\cos\Theta\sin\varphi + \gamma_{312}\cos^2\varphi\sin\Theta - \gamma_{321}\sin^2\varphi\sin\Theta.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $\frac{d\log f}{d\sigma_3}$ et en tenant compte des équations (31), il vient

$$\varepsilon S \frac{d\log f}{d\sigma_3}\sin\Theta = (\omega_{11}-\omega_{22})\sin\varphi\cos\varphi\sin\Theta - \omega_{13}\cos\varphi\cos\Theta - \omega_{23}\sin\varphi\cos\Theta - \omega_{12}\cos^2\varphi\sin\Theta + \omega_{21}\sin^2\varphi\sin\Theta.$$

Supposons maintenant, ce qu'il est toujour permis, que les congruences [1] et [2] soient choisies de manière qu'elles appartiennent au système canonique[1]) de la congruence [3]. Les congruences [1] et [2] seront alors composées de lignes de courbure des surfaces $f=$ const. Le choix adopté entraîne les égalités $\gamma_{312} = \gamma_{321} = 0$; en tenant compte des équations (31), nous en déduisons $\omega_{12} = \omega_{21} = 0$. Ceci posé, la dernière formule pour la torsion se simplifie et devient

$$\varepsilon S \frac{d\log f}{d\sigma_3} = (\omega_{11}-\omega_{22})\sin\varphi\cos\varphi - (\omega_{13}\cos\varphi + \omega_{23}\sin\varphi)\operatorname{cotg}\Theta. \qquad (44)$$

[1]) G. Ricci et T. Levi-Civita, l. c., Ch. II § 3.

Supposons maintenant que les trajectoires du point libre soient des courbes planes (à torsion nulle); il en résulte que l'équation

$$(\omega_{11} - \omega_{22}) \sin\varphi \cos\varphi - (\omega_{13} \cos\varphi + \omega_{23} \sin\varphi) \operatorname{cotg}\Theta = 0.$$

doit être satisfaite pour toutes les valeurs des angles φ et Θ.
On en déduit les conditions suivantes:

$$\omega_{11} = \omega_{22} \quad \omega_{13} = \omega_{23} = 0.$$

En remarquant que nous avons obtenu plus haut $\omega_{12} = \omega_{21} = 0$, nous voyons que le système (S) doit être formé de congruences principales. Cela nous permet d'énoncer le théorème suivant:

Th. 2. Pour que les trajectoires d'un point libre dans un champ statique soient des courbes planes, il faut et il suffit que la congruence de trajectoires orthogonales des surfaces $f=$ const. et les congruences de lignes de courbure de ces surfaces soient les congruences principales de l'espace (V_3) et que les courbures principales correspondant à ces dernières congruences soient égales.

Observons encore que les égalités $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$ et les équations (31) entraînent comme conséquence $\gamma_{313} = \gamma_{323} = 0$, d'où il résulte que les surfaces f = const. sont géodésiquement parallèles.

En terminant les considérations sur les trajectoires du point libre, posons

$$A^{(j)} = \frac{d^2 x_j}{d\sigma^2} + \sum_{ik=1}^{3} \begin{Bmatrix} ik \\ j \end{Bmatrix} \frac{d x_i}{d s} \frac{d x_k}{d s} \qquad (j = 1, 2, 3);$$

les $A^{(j)}$ sont évidemment les composantes contravariantes de l'accélération du mobile dans l'espace (V_3). Si nous substituons les expressions ci-dessus et la valeur $\frac{dt}{ds}$ tirée de l'équation (32) dans les équations (33), nous obtenons

$$A^{(j)} + \frac{a^2}{f^3} f^{(j)} = 0 \text{ ou } A_j + \frac{a^2}{f^3} f_j = 0 \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{44}$$

Si nous posons

$$\Phi = \frac{a^2}{2 f^2},$$

les équations (44) prendront la forme

$$A_j = \Phi_j \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{45}$$

où nous avons désigné par Φ_j les dérivées covariantes de la fonction Φ. On vérifie aisément que l'intégrale première des équations du mouvement (45) est donnée par égalité

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \Phi + C,$$

où la constante des forces vives a la valeur $-\frac{1}{2}$ (v. la relation (34)). Les équations du mouvement d'un point libre peuvent donc être déduites de l'unique condition.

$$\delta \int \sqrt{\frac{a^2}{2 f^2} - \frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{ik=1}^{3} g_{ik}\, d_{x_i}\, d_{x_k}} = 0.$$

Proposons nous maintenant d'étudier les propriétés géométriques des rayons lumineux dans un champ statique. Leurs équations sont déterminées par la condition [1])

$$\delta \int \frac{1}{f} \sqrt{\sum_{ik=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k} = 0. \tag{47}$$

Supposons que la forme (2) soit réduite à la suivante

$$d\sigma^2 = \sum_{i=1}^{3} H_i^2\, d x_i^2$$

et posons pour abréger

$$F = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{H_i}{f} \dot{x}_i\right)^2},$$

[1]) H. Weyl, l. c., p. 211.

où nous avons désigné par $\dot{x}_i$ la dérivée da la coordonnée x_i par rapport à l'arc σ du rayon lumineux. La condition (47) entraîne les équations suivantes

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{48}$$

Or, de l'identité $\sum_{i=1}^{3} H_i x_i^2 = 1$ résultent les égalités

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{3} H_k \dot{x}_k^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{H_k}{f}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = \frac{H_i}{f}\dot{x}_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En portant ces expressions dans les équations (48), on est ramené aux relations

$$\ddot{x}_i + \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial x_i}\dot{x}_i^2 - \frac{H_{i+1}}{H_i^2}\frac{\partial H_{i+1}}{\partial x_i}\dot{x}_{i+1}^2 - \frac{H_{i+2}}{H_i^2}\frac{\partial H_{i+2}}{\partial x_i}\dot{x}_{i+2}^2$$

$$+ \frac{2}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial x_{i+1}}\dot{x}_i\dot{x}_{i+1} + \frac{1}{H_i^2}\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{49}$$

$$- \dot{x}_i \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_k}\dot{x}_k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En employant les notations $\lambda^{(i)} = \dot{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ et en désignant par $\bar{e}$ le vecteur de composantes $\lambda^{(i)}$, les équations (49) peuvent être écrites comme il suit

$$f\,(D\bar{e})^{(i)} = \lambda^{(i)} \sum_{k=1}^{3} f_k\,\lambda^{(k)} - f^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{50}$$

où D est le symbole de la dérivation d'un vecteur le long du rayon lumineux. On voit bien que les équations (50) ont la forme indépendante du choix de coordonnées.

Introduisons maintenant dans nos calculs le système (S) dont nous avons parlé à la fin du Ch. I et considérons un quelconque des rayons lumineux (L) et un point arbitraire M situé sur (L). En désignant par Θ

l'angle des vecteurs $\bar{e}$ et $\bar{e}_3$, par $\mu^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ les composantes du vecter normal principal $\bar{n}$ du rayon (L) au point M, par $\bar{K}$ la courbure de celui-ci au même point, l'application des formules de Frenet aux équations (50) nous donne les relations suivantes

$$f\,\bar{K}\,\mu^{(i)} = \rho\,(\lambda^{(i)} \cos\Theta - \lambda_3^{(i)}) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{51}$$

ρ étant un facteur déterminé par la formule

$$\frac{df}{d\sigma} = \rho\cos\Theta\,.$$

Pour la courbure $\bar{K}$ nous avons donc l'expression suivante

$$\bar{K} = \eta\,\frac{\rho\sin\Theta}{f}, \quad \eta = \pm 1\,. \tag{52}$$

En substituant l'expression (52) dans les équations (51), nous obtenons les formules

$$\eta\,\mu^{(i)} \sin\Theta = \lambda^{(i)} \cos\Theta - \lambda_3^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{53}$$

En suivant le calcul effectué plus haut (p. 12) pour les trajectoires d'un point libre, nous trouvons facilement la formule pour la torsion $\bar{S}$ du rayon (L); il viendra

$$\eta\,\bar{S}\sin\Theta = \sum_{i=1}^{3} \nu^{(i)}\,(D\bar{e}_3)_i\,, \tag{54}$$

$\nu^{(i)}$ désignant les composantes du vecteur binormal du rayon (L) au point M.

Considérons maintenant un rayon lumineux (L) et une trajectoire (C) d'un point libre, partant d'un même point M dans la même direction. Le rapprochement des formules (40) et (52) nous montre qu'il doit être $\varepsilon = \eta$. L'angle Θ ayant la même valeur pour les deux courbes, on déduit des formules (41) et (53) que (L) et (C) ont dans le point M les mêmes trièdres de Frenet. Il s'en suit, d'après les formules (42)et(54), que les torsions de ces courbes sont égales au poit M.

Th. 3. *Le rayon lumineux et la trajectoire d'un point libre partant d'un même point dans la même direction ont dans ce point les trièdres de Frenet* communs et les torsions égales, leurs courbures ayant le rapport

$$K : \bar{K} = (a^2 - f^2) : f^2,$$

indépendant du choix de la direction de deux courbes.

Du Th. 3 on déduit immédiatement la proposition suivante:

Th. 4. Si dans un champ statique les rayons lumineux sont des courbes planes, les trajectoires du point libre le sont aussi, et réciproquement.

Nous remarquerons enfin que les équations différentielles des rayons lumineux et des trajectoires d'un point libre se déduisent d'une même condition

$$\delta \int \sqrt{\frac{a^2}{2f^2} + C} \sqrt{\sum_{ik=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k} = 0;$$

dans le premier cas il faut poser $C = 0$, dans le second $C = -\frac{1}{2}$. Pour s en convaincre il suffit de rapprocher les équations (46) et (47).

CHAPITRE III.

Nous nous proposons dans ce Chapitre de déterniener tous les champs statiques dans lesquels les rayons lumineux et, par conséquent, les trajectoires d'un point libre sont des courbes planes (à torsion nulle). Pour rósoudre ce problème nous emploierons les équations d'Einstein dans la forme (31). Il résulte des théorèmes 2 et 4 du Ch. précédent que les congruences [1], [2], [3] seront les congruences les eongruences principales de l'espace (V) et que les ω_{11} et ω_{22} seront égales. D'après cela les équations (31) conduiront au système suivant.

$$\omega_{12} = \omega_{23} = \omega_{31} = 0, \tag{55}$$

$$\omega_{11} = \omega_{22}, \quad \omega_{11} + \omega_{22} = \omega_{33} = 0, \tag{56}$$

$$\gamma_{313} = \gamma_{323} = 0, \quad \gamma_{131} = \gamma_{232}, \quad \gamma_{312} = \gamma_{321} = 0, \tag{57}$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \sigma_1} = 0, \quad \frac{\partial \log f}{\partial \sigma_2} = 0, \quad \frac{\partial \log f}{\partial \sigma_3} = \frac{\omega_{11}}{\gamma_{131}}, \tag{58}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_3^2} + \omega_{33} f = 0. \tag{59}$$

Pour simplifier le calcul nous transformerons les variables de manière que l'équation $x_3 =$ const. représente les surfaces $f =$ const.

Les trajectoires orthogonales de ces surfaces étant, d'après les égalités (57), des géodésiques, la forme (2) deviendra

$$d\sigma^2 = \sum_{ik=1}^{2} g_{ik}\, dx_i\, dx_k + dx_3^2$$

On peut donc poser

$$\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0, \quad \lambda_3^{(3)} = 1. \tag{60}$$

Observons que les composantes des vecteurs $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ et les rotations du trièdre (T) sont liées par les relations [1]).

$$\frac{\partial \lambda_{h/r+2}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h/r+1}}{\partial x_{r+1}} = \lambda \left[\sigma \lambda_h^{(r)} - \sum_{i=1}^{2} \gamma_{i+1\, i+2\, h}\, \lambda_i^{(r)} \right] \quad (h.r = 1, 2, 3) \tag{61}$$

et σ étant définis par les formules

$$\lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{1/1} & \lambda_{1/2} & \lambda_{1/3} \\ \lambda_{2/1} & \lambda_{2/2} & \lambda_{2/3} \\ \lambda_{3/1} & \lambda_{3/2} & \lambda_{3/3} \end{vmatrix}, \quad \sigma = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{i+1\, i+2\, i}.$$

En égard aux relations (57) et (60), les formules (61) donnent

$$\frac{\partial \lambda_{1/1}}{\partial x_3} = \gamma_{123}\, \lambda_{2/1} - \gamma_{131}\, \lambda_{1/1}, \tag{62}$$

$$\frac{\partial \lambda_{1/2}}{\partial x_3} = \gamma_{123}\, \lambda_{2/2} - \gamma_{131}\, \lambda_{1/2}, \tag{63}$$

$$\frac{\partial \lambda_{2/1}}{\partial x_3} = - \gamma_{123}\, \lambda_{1/1} - \gamma_{131}\, \lambda_{2/1}, \tag{64}$$

$$\frac{\partial \lambda_{2/2}}{\partial x_3} = - \gamma_{123}\, \lambda_{1/2} - \gamma_{131}\, \lambda_{2/2}. \tag{65}$$

[1]) G. Ricci Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseque date a priori, Rend. Accad. Lincei (V) t. XIX, 1910.

Le système de congruences [1], [2], [3] étant orthogonal on a

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_{1/i}\, \lambda_3^{(i)} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} \lambda_{2/i}\, \lambda_3^{(i)} = 0,$$

d'où il résulte, d'après les égalités (60), $\lambda_{1/3} = \lambda_{2/3} = 0$ et, par suite [2]),

$$g_{11} = \lambda_{1/1}^2 + \lambda_{2/1}^2, \quad g_{12} = \lambda_{1/1}\, \lambda_{1/2} + \lambda_{2/2}\, \lambda_{2/1}, \quad g_{22} = \lambda_{1/2}^2 + \lambda_{2/2}^2. \tag{66}$$

Sur les egalités (62) — (65) nous effectuerons les opérations suivantes: nous ajouterons d'abord les égalités (62) et (69) après les avoir multipliées resp. par $\lambda_{1/1}$, $\lambda_{2/1}$; nous ajouterons ensuite les égalités (62), (63), (64), (65) après les avoir multipliées resp. par $\lambda_{1/2}$, $\lambda_{1/1}$, $\lambda_{2/2}$, $\lambda_{2/1}$; nous ajouterons enfin les égalités (64) et (65) après les avoir multipliées resp. par $\lambda_{2/1}$, $\lambda_{2/2}$. En tenant compte des formules (66), nous obtenons

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial x_3} = -2\gamma_{131}\, g_{11}, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial x_3} = -2\gamma_{131}\, g_{12}, \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial x_3} = -2\gamma_{131}\, g_{22} \tag{67}$$

Or, les relations (55) comprennent les conditions $\omega_{23} = \omega_{31} = 0$. D'après la définition des quantités ω_{hk} donnée par la formule (16) et d'après l'égalité $\gamma_{131} = \gamma_{232}$ (équations (57)), les conditions mentionnées plus haut donnent

$$\frac{\partial \gamma_{131}}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial \gamma_{131}}{\partial \sigma_2} = 0.$$

Ces égalités montrent que la rotation γ_{131} ne dépend que de la variable x_3. Les équations (67) donnent alors

$$g_{11} = X_3^2\, E(x_1, x_2), \quad g_{12} = X_3^2\, F(x_1, x_2), \quad g_{22} = X_3^2\, G(x_1, x_2),$$

où nous avons désigné par X_3 une fonction de la seule variable x_3. L'élément linéaire de l'espace (V_3) devient donc

$$d\sigma^2 = X_3^2\, (E\, dx_1^2 + 2F\, dx_1\, dx_2 + G\, dx_2^2) + dx_3^2.$$

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que l'on ait $F = 0$ en changeant convenablement la variable x_3, l'élément $d\sigma^2$ peut être ramené à la forme

[2]) G. Ricci et T. Levi-Civita, l. c. Ch. II § 1.

$$d\sigma^2 = x_3^2\, (E\, dx_1^2 + G\, dx_2^2) + a^2\, dx_3^2, \tag{68}$$

la lettre a désignant une seconde fonction de la seule variable x_3. Calculons les rotations du système formé de congruences de lignes coordonnées de la variété caractérisée par la forme (68); en désignant par $[i]$ $(i = 1, 2, 3)$ la congruence de courbes $x_{i+2} = \text{const.}$, $x_{i+2} = \text{const}$, on trouve d'après les formules (13)

$$\gamma_{121} = -\frac{1}{x_3}\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial x_2}, \quad \gamma_{131} = \gamma_{232} = -\frac{1}{a x_3}, \quad \gamma_{212} = -\frac{1}{x_3}\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x_1}, \tag{69}$$

toutes les autres rotations étant nulles. On vérifiera aisément que les équations (55), (57) et la première des équations (56) sont satisfaites identiquement en vertu des formules (69). Nous allons satisfaire à la seconde des équations (56). D'après les formules (16) cette équation peut être ramenée dans le cas actuel à la forme

$$\frac{\partial \gamma_{121}}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial \gamma_{212}}{\partial \sigma_1} - \gamma_{121}^2 - \gamma_{212}^2 = -2\frac{\partial \gamma_{131}}{\partial \sigma_3} + 3\gamma_{131}^2.$$

Si nous y remplaçons les rotations par les expressions (69), on aura

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial x_2}\right)\right] = \frac{1}{a^3} - \frac{2a'}{a^3}x_3.$$

Le premier membre étant indépendant de la variable x_3 et le second des variables x_1, x_2, leur valeur commune est une constante que nous désignerons par K. On obtient ainsi deux équations

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial x_2}\right)\right] = K, \tag{70}$$

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2a'}{a^2}\, x_3 = K. \tag{71}$$

Il suffit, sans restreindre la généralité, de distinguer les trois cas: I. $K = 0$, II. $K = +1$, III. $K = -1$.

I. $K = 0$.

On peut évidemment supposer $E = G = 1$. L'élément linéaire (68) prend alors la forme

$$d\sigma^2 = x_3^2\, (dx_1^2 + dx_2^2) + a^2 dx_3^2.$$

et l'équation (71) se réduit à la suivante:

$$2 x_3 a' = a,$$

d'où l'on a $a^2 = C x_3$, C désignant une constante arbitraire. En effectuant un changement convenable de variables, on trouve la forme

$$d\sigma^2 = z^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{A_1}$$

satisfaisant complètement aux conditions (55) — (59). Il nous reste à déterminer la fonction $f(z)$ de manière qu'elle satisfasse aux équations (58) et (59). Or, nous avons dans le cas de la forme (A_1) les formules suivanres:

$$\gamma_{131} = -\frac{2}{z^3}, \quad \omega_{11} = \frac{2}{z^6}, \frac{\partial \log f}{\partial \sigma_3} = \frac{1}{z^2} \frac{d \log f}{dz}.$$

La troisième des équations (58) se réduit donc à la relation $\frac{d\log f}{dz} = -\frac{1}{z}$, d'on l'on déduit

$$f = \frac{k}{z}, \tag{B_1}$$

k désignant une constante arbitraire. Il est facile de vérifier que la fonction $f = \frac{k}{z}$ satisfait aussi à l'équation (59). Les formules (A_1) et (B_1) expriment la p r e m i è r e s o l u t i o n du problème traité dans le Ch. présent. Ajoutons que dans le champ statique correspondant à cette solution les rayons lumineux et les trajectoires d'un point libre sont situés dans les plans (surfaces totalement géodésiques) définis par l'équation

$$Ax + By + C = 0.$$

Pour établir cette proposition il suffit de se reporter aux équations (33) et (49).

II. $K = +1$.

On satisfait dans ce cas à l'équation (70), en posant $E = 1$, $G = \sin^2 x_1$. Il est évident que cela ne restreint pas la généralité de la solution. L'équation (71) devient alors

$$2 x_3 a' - a + a^3 = 0$$

et, par suite,

$$a^2 = \frac{x_3}{x_3 - \alpha},$$

où α est une nouvelle constante. Si nous acceptons les notations $x_1 = \vartheta$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = r$, il vient

$$d\sigma^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2) + \frac{r}{r-\alpha} dr^2, \tag{A_2}$$

$$f = c \sqrt{\frac{r-\alpha}{r}} \tag{B_2}$$

Les formules (A_2) et (B_2) constituent la solution bien connue de S c h w a r z s c h i l d des équations d'Einstein. Ici encore les rayons lumineux sont situés dans les plans de l'espace (A_2).

III. $K = -1$.

En posant $E = 1$, $G = \sinh^2 x_1$, l'élément linéaire $d\sigma^2$ prend la forme

$$d\sigma^2 = x_3^2 (d x_1^2 + \sinh^2 x_1 \, d x_2^2) + a^2 \, d x_3^2.$$

et l'équation (71) se ramène à la suivante

$$2 x_3 a' - a - a^3 = 0.$$

On a donc

$$a^2 = \frac{x_3}{\alpha - x_3},$$

où α désigne une constante que nous supposons positive. Nous trouvons ensuite

$$f = k \sqrt{\frac{\alpha - x_3}{x_3}},$$

k étant une constante arbitraire. En adoptant les notations $x_1 = \vartheta$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = r$, la solution peut être écrite comme il suit

$$d\sigma^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \sinh^2\vartheta \, d\varphi^2) + \frac{r}{\alpha - r} dr^2, \tag{A_3}$$

$$f = k \sqrt{\frac{\alpha - r}{r}}, \quad 0 < r < \alpha. \tag{B_3}$$

Les formules (A_i), (B_i) $(i=1,2,3)$ constituent les **trois solutions** du problème posé dans ce Chapitre et il est évident qu'il n'y a pas d'autres eu dehors de celles-ci.

On sait que M. Einstein a donnéa ux équations de gravitation encore une autre forme un peu différente de la primitive[1]). En adoptant toutes les notations du Ch. I, on peut écrire ces équations, dans le cas d'un champ statique, comme il suit

$$\Delta_2 f = \lambda . f,$$
$$f_{ik} = (R_{ik} + \lambda\, g_{ik})\, f \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

λ désignant une constante. Il en résulte la relation $R = -2\lambda$. On peut donc ramener le système precedent aux équations suivantes (v. Ch. I):

$$\Delta_2 f = \lambda f,$$
$$f_{ik} = -f\, \alpha_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

Les équations de la seconde ligne étant identiques aux équations (12), un calcul déjà employé montre que le système ci-dessus est équivalent au système formé d'équations (31) et d'équation

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = -\lambda,$$

cette dernière équation remplaçant l'équation (20). Cela prouve que les résultats du Ch. II conservent leur valeur pour la nouvelle forme des équations d'Einstein. Cette remarque se justifie aisément, si l'on remarque que la démonstration de ces résultats n'etait basée que sur les équations (31) indépendemment de l'équation (20). En répétant les calculs effectués dans le commencement du Chapitre présent, nous pouvons démontrer que les rayons lumineux dans un champ statique sont des courbes planes (à torsion nulles), si l'élément linéaire (2) prend la forme

$$d\sigma^2 = x_3^2\,(E\,dx_1^2 + G\,dx_2^2) + a^2\,dx_3^2,$$

E, G étant des fonctions de deux variables x_1, x_2; la forme binaire $E\,dx_1^2 + G\,dx_2^2$ doit être une forme à courbure constante K et la lettre a doit désigner une fonction de la seule variable x_3, satisfaisant à l'équation

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2a'}{a^3}\,x_3 - \lambda x_3^2 = K.$$

[1]) A. S. Eddington. Relativitätstheorie in mathemattscher Behandlung, 1925, p. 113.

En envisageant les différentes valeurs de la constante K, on obtient trois solutions suivantes

$$d\sigma^2 = x_3^2\,(dx_1^2 + dx_2^2) + \frac{dx_3^2}{\frac{\lambda}{3}x_3^2 + \frac{\alpha}{x_3}}, \tag{A_1'}$$

$$f^2 = k^2\left(\frac{\lambda}{3}\,x_3^2 + \frac{\alpha}{x_3}\right); \tag{B_1'}$$

$$d\sigma^2 = r^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) + \frac{dr^2}{1 + \frac{\lambda}{3}r^2 - \frac{\alpha}{r}}, \tag{A_2'}$$

$$f^2 = c^2\left(1 + \frac{\lambda}{3}\,r^2 - \frac{\alpha}{r}\right); \tag{B_2'}$$

$$d\sigma^2 = r^2\,(d\vartheta^2 + \sin h^2\vartheta\, d\varphi^2) + \frac{dr^2}{-1 + \frac{\lambda}{3}r^2 + \frac{\alpha}{r}}, \tag{A_3'}$$

$$f^2 = k^2\left(-1 + \frac{\lambda}{3}\,r^2 + \frac{\alpha}{r}\right), \tag{B_3'}$$

où α, c, k désignent des constantes que nous supposons positives. Ces solutions correspondent aux valeurs $0, +1, -1$ de la constante K. La solution déterminée par les formules (A_2') et (B_2') est la solution de M. Trefftz[1]).

[1]) E. Trefftz. Das statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der Einsteinischen Theorie, Math. Ann. t. 86, 1022. V. aussi M. v. Laue. Die Lösungen der Feldgleichungen der Schwere von Schwarschild, Einstein u. Trefftz, Sitrungsberichte d. Preuss. Akademie d. Wissenschaften 1923.

STRESZCZENIE.

Jeżeli pole grawitacyjne Einsteina jest polem statycznem, to charakteryzujący je element linjowy można napisać w następujący sposób[1])

$$ds^2 = f^2\, dt^2 - \sum_{ik=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k\,;$$

we wzorze powyższym spółczynniki f, g_{ik} są funkcjami spółrzędnych przestrzennych x_1, x_2, x_3, niezależnemi od zmiennej t. Cechą charakterystyczną pola statycznego jest więc wyodrębnienie czasu od przestrzeni we właściwem znaczeniu. Ta ostatnia określona jest tutaj dodatnią formą trójkową $d\sigma^2 = \sum_{ik=1}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$. Jest rzeczą widoczną, że element $d\sigma^2$ nie może być obrany w sposób dowolny, lecz musi podlegać pewnym warunkom, wynikającym z równań grawitacyjnych. Treścią I Rozdz. niniejszej pracy jest właśnie wyznaczenie warunków koniecznych i wystarczających, ażeby dodatnia forma kwadratowa o trzech zmiennych charakteryzowała metrykę przestrzenną pola grawitacyjnego. Celem znalezienia tych warunków użyłem metody kongruencyj stworzonej przez G. Ricci'ego i T. Levi-Civita'ę i przy jej pomocy przekształciłem równania (18) i (20) (postać kanoniczna równań grawitacyjnych według G. Ricci'ego). Równania grawitacyjne w postabi kanonicznej doznają znacznego uproszczenia, jeżeli przyjmiemy, że trójka kongruencyj służąca za podstawę badań składa się z kongruencyj głównych przestrzeni: równania (18a) i (20a). Te ostatnie równania posłużyły bezpośrednio do znalezienia szukanych warunków, pozwalając je napisać w postaci niezmienniczej jako związki między krzywiznami głównemi i pochodnemi ich względem łuków krzywych głównych (równości (20a), (22), (23), (28)). Oddzielnie został zbadany przypadek przestrzeni, w któ-

[1]) Symbole użyte w tym wzorze mają znaczenie przyjęte w książce H. Weyl Raum. Zeit., Materie, 3. Aufl. 1919. §§ 28, 30.

rej dwie krzywizny główne są równe. Treścią II Rozdz. są badania własności geometrycznych promieni świetlnych i trajektoryj punktu swobodnego w polu statystycznem przy pomocy wzorów Freneta dla przestrzeni Riemanna. Ze wzorów uzyskanych w ten sposób wynika między innemi, że promień świetlny i trajektorja, wychodzące z tego samego punktu i w tym samym kierunku, mają w tymże punkcie wspólne trójściany Freneta i równe skręcenia (*Tw* 3). Stąd mamy dalszy wniosek: jeżeli w pewnem polu statycznem, promienie świetlne są krzywemi płaskiemi, to trajektorje punktu swobodnego posiadają tę samą własność, i nawzajem (*Tw* 4). Dodajmy wreszcie, że wyznaczenie promieni świetlnych i trajektoryj punktu swobodnego w polu statycznem zostało sprowadzone do rozwiązania jednego i tego samego zagadnienia z rachunku warjacyjnego. Ostatni rozdział został poświęcony następującemu zagadnieniu: wyznaczyć te pola statyczne, w których promienie świetlne, a zatem także i trajektorje punktu swobodnego, są krzywemi płaskiemi. Zagadnienie to posiada trzy jedynie rozwiązania, określone wzorami (A_i), (B_i) $(i = 1, 2, 3)$ względnie wzorami (A_i'), (B_i') $(i=1, 2, 3)$, zależnie od tego, czy równania Einsteina przyjmujemy w pierwotnej formie czy też w formie późniejszej, uogólnionej. Z pośród tych trzech rozwiązań jedno jest znanem rozwiązaniem Schwarzschilda względnie Trefftz'a, dwa inne, o ile wiem, nie były dotychczas wyznaczone.

EDWARD STAMM.

Geometrische Theorie logischer Funktionen.

Beitrag zur Algebra der Logik.

Teorja geometryczna funkcyj logicznych.

Przyczynek do Algebry Logiki.

§ 1. **Einleitung.** Whiteheads Theorie der logischen Funktionen[1]) behandelt die Funktionen nur im allgemeinen. In der vorliegenden Abhandlung untersuchen wir verschiedene spezielle Funktionen der Algebra der Logik auf Grund einer Klassifikation, welche sich durch logische Transformationen begründen lässt. Wir geben unserer Theorie geometrisches Gepräge; sie ist eine „analytische Geometrie" im 2-dim „logischen Raume"[2])

[1]) Mem. on the alg. of symb. log., Amer. Journ. of. Math., XXIII, 1901. Vgl auch dessen Abh. „The logic of relations, log. subst. groups etc." l. c. XXV, 1903.

[2]) Wir beschänken uns auf 2 — dim. Raum, die „Ebene", d. h. auf Funktionen einer unabhängigen Variablen. Es steht aber nihts im Wege eine analoge Theorie für Funktionen mehrerer Variablen, d. h. eine mehrdimensionale Geometrie zu bilden