AL. RAJCHMAN

O pierwszej pochodnej uogólnionej.

(Sur la derivèe première géneralisée).

§ 1.

W „Pracach Matem.-Fizycznych“ (Tom XXVIII, str. 79 85) podaje p. Mazurkiewicz dowód następującego twierdzenia:

Wszelka funkcja ciągła, spełniająca dla $a < x < b$ warunek:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = 0, \tag{1}$$

jest stała w przedziale (a, b).

Celem niniejszej notatki jest wykazanie, iż powyższe twierdzenie jest prostym wnioskiem ze znanego twierdzenia Schwarza o drugiej pochodnej uogólnionej.[1]) Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą, spełniającą warunek (1). Kładziemy

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt;$$

[1]) Jeśli funcja ciągła w przedziale (a, b) ma drugą pochodną uogólnioną równą zeru, wówczas jest ona funkcją linjową, czyli:
jeśli

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = 0,$$

to

$$F(x) = ax + b.$$

będzie oczywiście

$$F'(x) = f(x).$$

Kładziemy dalej

$$\varphi(h) = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) = \int_0^h \left[f(x+t) - f(x-t) \right] dt.$$

Oczywiście jest:

$$\varphi(0) = 0.$$

Na zasadzie twierdzenia o wartości pośredniej będzie

$$\varphi(h) = \varphi(h) - \varphi(0) = h\,\varphi'(\Theta h) = h\,[f(x+\Theta h) - f(x-\Theta h)],$$

gdzie $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$.

Dzielimy obie strony równania przez h^2:

$$\left|\frac{\varphi(h)}{h^2}\right| = \left|\frac{f(x+\Theta h) - f(x-\Theta h)}{\Theta h}\right| \Theta < \left|\frac{f(x+\Theta h) - f(x-\Theta h)}{\Theta h}\right|.$$

Na zasadzie założenia (1) prawa strona powyższej nierówności równocześnie z h dąży do zera, a więc też

$$\frac{\varphi(h)}{h^2} \longrightarrow 0$$

czyli

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = 0$$

$F(x)$ ma więc drugą pochodną uogólnioną równą zeru, a więc, według twierdzenia Schwarza, $F(x)$ jest funkcją linjową, zatem $f(x)$ ma wartość stałą.

C. b. d. d.

§ 2.

W rozumowaniu powyższem nie korzystaliśmy bynajmniej z ciągłości funkcji $f(x)$, tylko zaś z faktu istnienia jej funkcji pierwotnej.

Twierdzenie więc uogólnia się na funkcje nieciągłe, będące wszędzie pochodnemi funkcji ciągłej.

W uogólnieniu można posunąć się dalej.

Uwzględnijmy jeszcze prawdziwość następującego uogólnienia twierdzenia Schwarza[2]) wszelka funkcja ciągła i „gładka“,[3]) o drugiej pochodnej uogólnionej „niemal wszędzie“ [4]) równej zeru, — jest funkcją linjową.

Jest widoczne, że każda funkcja różniczkowalna jest „gładka“.

Rozumowanie powyższe prowadzi ostatecznie do następującego wyniku:

Wszelka funkcja ciągła (lub ogólniej - wszelka funkcja, będąca dokładną pochodną) o pierwszej pochodnej uogólnionej „niemal wszędzie“ równej zeru — jest stała.

RÉSUMÉ.

M. Mazurkiewicz (Prace Matem.-Fiz. t. 28. p. 79-85) a prouvé directement que toute fonction continue, satisfaisant pour $a < x < b$ l'égalité

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = 0$$

est constante.

Dans cette note nous faisons observer, que ce résultat est un corollaire immédiat du théorème bien connu de Schwarz sur la dérivée seconde généralisée. En utilisant une généralisation de ce théorème, due à de la Vallée Poussin, on arrive immédiatement à la conclusion suivante: toute fonction continue (ou plus généralement: toute derivée exacte) satisfaisant à la condition (1) partout, sauf peut être aux points d'un ensemble dénombrable, est constante.

---

[2]) De la Vallée Poussin (Acad. de Belgique, 1912, str. 705); dowód powtórzony np. w „Pracach Mat.-Fiz. t. 30 str. 24. (Al. Rajchman).

[3]) „Gładką“ nazywamy tu funkcję $f(x)$, jeśli dla każdego x spełnia warunek:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h} = 0.$$

[4]) „Niemal wszędzie“ — znaczy tu wszędzie, prócz może wartości x, tworzących zbiór przeliczalny.