LEON LICHTENSTEIN.

O pewnych zagadnieniach Analizy, będących w związku z Hydrodynamiką płynów doskonałych.

Sur quelques problèmes d'analyse liés avec l'hydrodynamique des fluides parfaits.

W szeregu odczytów, wypowiedzianych przed kilkunastu laty i ogłoszonych w „Wiadomościach matematycznych",*) p. prof. Zaremba dał piękny zarys historyczny rozwoju nauki o zagadnieniach brzegowych, zawdzięczającej swe istnienie teorji sprężystości, Akustyce i Elektrodynamice. Znany jest związek pomiędzy Hydromechaniką czyli nauką o równowadze i ruchu płynów a teorją potencjału, tudzież teorją funkcyj zmiennej zespolonej. Niechaj mi wolno będzie w tej pracy wskazać na kilka zagadnień mniej znanych teorji równań różniczkowych zwyczajnych i równań o pochodnych cząstkowych, jakoteż Rachunku warjacyjnego, będących w związku z zagadnieniami Hydromechaniki.

Hydromechanika wcześniej, niż inne działy Fizyki, musiała z natury rzeczy zwrócić na siebie uwagę matematyków. Ciecze, a zwłaszcza płyny małościśliwe, są to — jako ciała niewypowiedzianie ruchliwe, nieskończenie subtelne i zmienne w swej postaci—istne wcielenia tworów idealnych czystej abstrakcji. To też niezadługo po wynalezieniu Rachunku nieskończonostkowego badania hydrodynamiczne zajmują matematyków tej miary, co Daniel Bernoulli, Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace. W 19-em stuleciu prace ich kontynuują: Cauchy, Poisson, Lejeune-Dirichlet, Riemann, Helmholtz, Stokes, S. W. Thomson, Poincaré, Liapounoff.

Pracom tych myślicieli zawdzięczamy szereg pięknych rezultatów. Wszelako nieskończenie zawiłą i trudną do odcyfrowania jest natura. Trudności nie do przezwyciężenia piętrzą się na każdym kroku, a każdy wyłom odsłania przed oczami badacza nowe zagadnienia wielkiej wagi.

*) Patrz Wiadomości matematyczne, t. XIII, 1919, st. 145—221.

§ 1.

Rozpoczynamy od kinematyki czyli nauki o ruchu cieczy bez względu na okoliczności zewnętrzne, t. zn. siły, ruch ten powodujące.

Uważajmy ciecz jednorodną, nieściśliwą, pozbawioną tarcia wewnętrznego. Niech cząstka cieczy, znajdująca się w chwili t_0 w punkcie (a, b, c), będzie w czasie t w punkcie (x, y, z). Składowe prędkości oznaczamy, jak zazwyczaj, przez

$$u = \frac{d}{dt}\,x(a, b, c, t),\quad v = \frac{d}{dt}\,y(a, b, c, t),\quad w = \frac{d}{dt}\,z(a, b, c, t). \tag{1}$$

Zakładamy, że funkcje x, y, z są określone dla wszystkich punktów przestrzeni (a, b, c) i dla wartości czasu w pewnym przedziale $< t_0, t^* >$, że są one ciągłe i mają pochodne ciągłe pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu. Równania

$$x = x(a, b, c, t),\quad y = y(a, b, c, t),\quad z = z(a, b, c, t) \tag{2}$$

określają pewne odwzorowanie ciągłe i jednojednoznaczne przestrzeni (a, b, c) na przestrzeń (x, y, z). Ponieważ ciecz jest nieściśliwa, jest więc

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Składowe wiru w punkcie (x, y, z) cieczy są

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4}$$

Z równań (4) wynika

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Zakładamy, że dla $R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$ składowe prędkości u, v, w zmierzają do zera. Powiadamy, że w nieskończoności ciecz jest w spoczynku.

Dokładniej, niech będzie, przy stosowaniu znanego symbolu L a n d a u'a,

$$u, v, w = O(R^{-\nu});\quad \xi, \eta, \zeta, = O(R^{-1-\nu}); \tag{6}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial z} = O(R^{-2-\nu})\quad (0 < \nu < 1).$$

Jak wiadomo, jest wtedy

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\infty}\frac{1}{r}\,\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\infty}\frac{1}{r}\,\zeta'\,d\tau', \\ v(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\infty}\frac{1}{r}\,\zeta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\infty}\frac{1}{r}\,\xi'\,d\tau', \\ w(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\infty}\frac{1}{r}\,\xi'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\infty}\frac{1}{r}\,\eta'\,d\tau', \end{aligned} \tag{7}$$

$$(d\tau' = dx'\,dy'\,dz',\quad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)$$

gdzie całkowicie rozciąga się na całkowitą przestrzeń zmiennych x', y', z'. Najwidoczniej w danym przypadku pole prędkości jest w zupełności określone przez pole wiru.

Uważajmy teraz ciecz, zawartą w naczynia sztywnem, zamkniętem, nieruchomem T, i wypełniającą je szczelnie. Niech ściana wewnętrzna S naczynia będzie powierzchnią o krzywiźnie ciągłej. Jak wiadomo, na powierzchni S składowa prędkość w kierunku normalnej jest równa zeru,

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0, \tag{8}$$

gdzie α, β, γ oznaczają dostawy kierunkowe normalnej wewnętrznej (n). Pytamy, czy i teraz pole wiru wystarcza do wyznaczenia pola prędkości.

Według H e l m h o l t z a odpowiedź jest twierdząca*): wystarcza dla wszystkich skończonych x, y, z wyznaczyć w jakibądźkolwiek sposób funkcje ξ_*, η_*, ζ_*, równe ξ, η, ζ wewnątrz T i czyniące zadość warunkom, podanym poprzednio. Niech teraz będzie

$$u_*(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\infty}\frac{1}{r}\,\eta_*'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\infty}\frac{1}{r}\,\zeta_*'\,d\tau',$$

(9) . . . .

Funkcje u, v, w spełniają wewnątrz T równania (3) i (4).

Na S może być wszakże

$$u_*\cos\alpha + v_*\cos\beta + w_*\cos\gamma \neq 0.$$

*) Porównaj H. v. H e l m h o l t z. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 55 (1858), str. 25 — 55 (str. 37).

Niech teraz φ oznacza funkcję potencjalną ciągłą wewnątrz T i na S, krócej w $T+S$, regularną wewnątrz T i taką, że na S mamy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -(u_* \cos\alpha + v_* \cos\beta + w_* \cos\gamma). \tag{10}$$

Z równania

$$\frac{\partial u_*}{\partial x} + \frac{\partial v_*}{\partial y} + \frac{\partial w_*}{\partial z} = 0 \tag{11}$$

wynika

$$\int\limits_S (u_* \cos\alpha + v_* \cos\beta + w_* \cos\gamma)\, d\sigma = -\int\limits_S \frac{\partial \varphi_*}{\partial n}\, d\sigma = 0, \tag{12}$$

($d\sigma$ element powierzchni), tak iż funkcja φ_* istnieje. Funkcje

$$u = u_* + \frac{\partial \varphi_*}{\partial x}, \quad v = v_* + \frac{\partial \varphi_*}{\partial y}, \quad + \; w = w_* \frac{\partial \varphi_*}{\partial z} \tag{13}$$

stanowią, według Hemlholtza, szukane rozwiązanie zagadnienia.

Wszakże wyznaczenie istotne funkcyj ξ_*, η_*, ζ_* nie zdaje się być rzeczą zupełnie łatwą. Znacznie prędzej dojdziemy do celu, jeżeli zauważymy, że równania (7) zachodzą i wtedy, jeżeli składowe wiru, ξ, η, ζ, doznają na pewnych powierzchniach nieciągłości pierwszego rodzaju, o ile przytem składowa normalna zmienia się w sposób ciągły *).

Niech tedy $\psi\,(x, y, z)$ oznacza funkcję potencjalną, określoną zewnątrz $T+S$, krócej w dziedzinie T_*, regularną wewnątrz T_*, w szczególności w nieskończoności, i taką, że na S jest

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma. \tag{14}$$

Niech teraz będzie

$$\begin{aligned} &\xi_* = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \eta_* = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \zeta_* = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{w dziedzinie } T_*, \\ &\xi_* = \xi, \quad \eta_* = \eta, \quad \zeta_* = \zeta \quad \text{w dziedzinie } T. \end{aligned} \tag{15}$$

Wewnątrz T_* mamy

$$\frac{\partial \xi_*}{\partial x} + \frac{\partial \eta_*}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_*}{\partial z} = \Delta\psi = 0. \tag{16}$$

*) Porównaj L. Lichtenstein, Bemerkung zur Vektoranatyvis, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Série A. Sciences Mathématiques 1926.

A dalej składowa normalna

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \psi}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial \psi}{\partial n} \tag{17}$$

jest wskutek równania (14) na S ciągła. Wzór

$$u\,(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_\infty \frac{1}{r}\,\eta_*'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_\infty \frac{1}{r}\,\zeta_*'\,d\tau' + \frac{\partial \varphi_*}{\partial x},$$

(18) . . . .

daje rozwiązanie zagadnienia.

§ 2.

Niech F_0 oznacza pewne pole ograniczone, jednospójne płaszczyzny zmiennych (a, b) i niech T_0 będzie walec prosty, mający jako podstawę F_0 i rozciągający się z obu stron do nieskończoności. Wyobraźmy sobie, że w chwili t_0 przestrzeń T_0 jest wypełniona cieczą jednorodną, nieściśliwą, i uważajmy najogólniejszy ruch posuwisty tej cieczy. W czasie t ciecz wypełnia dziedzinę T, mającą również postać walca prostego, rozciągającego się z obu stron do nieskończoności. Ruch uważany jest określony przez równania postaci

$$x = x\,(a, b, t), \quad y = y\,(a, b, t), \tag{19}$$

gdzie $x\,(a, b, t)$, $y\,(a, b, t)$ oznaczają funkcje ciągłe dla wszystkich (a, b) w F_0 i wszystkich t w pewnym przedziale $\langle t_0, t^* \rangle$, mogące nie posiadać pochodnych. A dalej jest

$$a = a\,(x, y, t), \quad b = b\,(x, y, t), \tag{20}$$

gdzie $a\,(x, y, t)$, $b\,(x, y, t)$ są również pewne funkcje ciągłe.

Równania (19) i (20) określają oczywiście pewne odwzorowanie ciągłe i jednojednoznaczne pola F_0, zależne w sposób ciągły od czasu.

Niech $\hat{F}_0$ oznacza jakiekolwiek pole mierzalne, położone wewnątrz F_0. Polu temu odpowiada, ze względu na nieściśliwość cieczy, w chwili t pole $\hat{F}$ mierzalne i takie, że powierzchnie obu pól są równe.

Uważajmy teraz jakiekolwiek odwzorowanie topologiczne dwóch pól, F_0 i F^*, dane przez równania

$$x^* = x^*(a, b), \quad y^* = y^*(a, b), \tag{21}$$
$$a = a^*(x^*, y^*), \quad b = b^*(x^*, y^*)$$

i takie, że wskazująca (indicatrix) obu pól jest jednakowa.

Wiadomo, że można wyznaczyć przekształcenia typu (19), (20) i takie, że

$$x(a, b, t_0) = a, \quad y(a, b, t_0) = b, \tag{22}$$
$$x(a, b, t^*) = x^*, \quad y(a, b, t^*) = y^*.$$

Twierdzenie to podał Tietze, — dowód jego jest wszakże nadzwyczajnie skomplikowany. Znacznie prostsze dowody podali Alexander II i v. Kerékjárto. *)

Niech $\hat{F}_0$ będzie znowu jakiekolwiek pole mierzalne, położone wewnątrz F_0. Zakładamy, że polu $\hat{F}_0$ odpowiada w F_0^* pole mierzalne $\hat{F}^*$ i takie, że powierzchnie obu pól są równe. Zapytujemy, czy istnieje przekształcenie typu (19), (20), spełniające warunek (22) i takie, że polu $\hat{F}_0$ odpowiada dla każdego t w przedziale $< t_0, t^* >$ pole mierzalne $\hat{F}$ tejże co $\hat{F}_0$ powierzchni. Innemi słowy, czy istnieje ruch posuwisty cieczy nieściśliwej, spełniający następujące warunki. W chwili t_0 ciecz wypełnia dziedzinę T_0 w czasie t^* zaś dziedzinę T^* **) przyczem dowolnej cząstce (a, b) w polu F_0 odpowiada przepisana z góry cząstka $x^* = x^*(a, b)$, $y^* = y^*(a, b)$ w polu $\hat{F}^*$. Jeżeli założymy, że funkcje $x^*(a, b)$, $y^*(a, b)$, $x(a, b, t)$, $y(a, b, t)$ mają pochodne pierwszego rzędu

$$\frac{\partial x^*}{\partial a}, \dots, \frac{\partial y^*}{\partial b}; \frac{\partial x}{\partial a}, \dots, \frac{\partial y}{\partial b}$$

ciągłe, to warunek zachowania powierzchni da się przedstawić w formie równań

$$\frac{\partial(x^*, y^*)}{\partial(a, b)} = 1, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = 1. \text{ ***)}. \tag{23}$$

*) Por. H. Tietze, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 38 (1914), str. 247—304; v. Kerékjárto Vorlesungen über Topologie, I. Flächentopologie, Berlin. 1923, S. 186—188.

**) T^* oznacza walec prosty, rozciągający się w obie strony do nieskończoności, mający jako podstawę F^*.

***) W. Süss w pracy, ogłoszonej w „The Tôhoku Mathematical Journal“ 26 (1925), str. 90—97, wykaz, że na zagadnienie, podane w tekście należy dać odpowiedź twierdzącą. Zachodzi pytanie, czy to samo ma miejsce, jeżeli założymy, że funkcje x^*, y^*, x, y posiadają pochodne pierwszego rzędu ciągłe.

§ 3.

Przechodzimy teraz do Hydrostatyki, czyli nauki o równowadze cieczy. Niech T oznacza jakąkolwiek dziedzinę skończoną przestrzeni zmiennych x, y, z jednospójną, ograniczoną powierzchnią S o krzywiźnie ciągłej. Zakładamy, że dziedzina T jest wypełniona cieczą jednorodną, nieściśliwą, pozbawioną tarcia wewnętrznego, znajdującą się w stanie równowagi. Niech ρ oznacza gęstość cieczy, $\rho X d\tau$, $\rho Y d\tau$, $\rho Z d\tau$ niechaj będą składowemi sił zewnętrznych, działających na element $\rho\, d\tau = \rho\, dx\, dy\, dz$ płynu w punkcie x, y, z; X, Y, Z są to funkcje ciągłe, mające pochodne pierwszego rzędu ciągłe. Zakładamy dla uproszczenia, że powierzchnia płynu jest swobodna, i że na powierzchnię S nie działają żadne siły zewnętrzne. Niech dalej $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ oznaczają jakiekolwiek funkcje ciągłe zmiennych x, y, z, posiadające pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe i czyniące zadość równaniu

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = 0. \tag{24}$$

W myśl zasady prac przygotowanych jest

$$\int \rho\,(X\mathbf{u} + Y\mathbf{v} + Z\mathbf{w})\, d\tau = 0. \tag{25}$$

Lagrange wyprowadza równania równowagi cieczy z zasady prac przygotowanych, posługując się następującem rozumowaniem*). Lagrange zakłada, że układ (24), (25) jest równoważny równaniu

$$\int \left\{ \rho\,(X\mathbf{u} + Y\mathbf{v} + Z\mathbf{w}) + \lambda \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \right) \right\} d\tau = 0, \tag{26}$$

zachodzącemu dla dowolnych $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, o ile funkcja λ, mająca pochodne pierwszego rzędu ciągłe, została we właściwy sposób określona.

Całkując (26) częściowo, otrzymujemy

$$\int_T \left\{ \left(\rho X - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \mathbf{u} + \left(\rho Y - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) \mathbf{v} + \left(\rho Z - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \mathbf{w} \right\} d\tau \tag{27}$$
$$- \int_S \Big(\lambda\,(\mathbf{u} \cos(n, x) + \mathbf{v} \cos(n, y) + \mathbf{w} \cos(n, z) \Big) d\sigma = 0,$$

gdzie $\cos(n, x), \dots$ oznaczają dostawy kątów, które normalna do S w punkcie $\sigma = (x, y, z)$, skierowana nawewnątrz T, czyni z osiami spółrzędnych; $d\sigma$ oznacza element powierzchni S.

*) J. Lagrange, Mécanique analytique, por. J. N. Franke, Mechanika teoretyczna, Warszawa 1889, str. 507-509.

Z (27) wynika oczywiście, skoro funkcje **u, v, w** są dowolne,

$$(28)\qquad \rho X = \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \ \rho Y = \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \ \rho Z = \frac{\partial \lambda}{\partial z} \text{ wewnątrz } T, \qquad \lambda = 0 \text{ na } S.$$

Funkcję λ intepretujemy jako ciśnienie cieczy.

Założenie Lagrange'a, że układ równań (24), (25) jest równoważny równaniu (27) nie jest bynajmniej samo przez się zrozumiałe.

Nietrudno jest wszelako wyprowadzić równania równowagi (28) ze wzorów (24), (25) w sposób następujący.

Niech **U, V, W** będą trzy funkcje dowolne, określone wewnątrz i na powierzchni dziedziny T, posiadające pochodne pierwszego i drugiego rzędu ciągłe. Funkcje

$$(29)\qquad \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y}, \ \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}, \ \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}$$

czynią zadość warunkowi (24). Równanie (25) daje

$$(30)\qquad \int_T \rho \left\{ X\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\right)\right\} d\tau = 0,$$

lub, całkując częściowo,

$$(31)\qquad \begin{aligned} &\int_T \rho \left\{ \mathbf{U}\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \mathbf{V}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \mathbf{W}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right\} d\tau \\ &- \int_S \rho \Big\{ \mathbf{U}\Big(Z\cos(n,y) - Y\cos(n,z)\Big) + \mathbf{V}\Big(X\cos(n,z) \\ &- Z\cos(n,x)\Big) + \mathbf{W}\Big(Y\cos(n,x) - X\cos(n,y)\Big)\Big\} d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcje **U**, **V**, **W** są najzupełniej dowolne, przeto musi zachodzić

$$(32)\qquad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0, \ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \text{ wewnątrz } T,$$

$$(33)\qquad \begin{aligned} &X\cos(n,z) - Z\cos(n,x) = 0, \ Z\cos(n,y) - Y\cos(n,z) = 0, \\ &Y\cos(n,x) - X\cos(n,y) = 0 \qquad \text{na } S. \end{aligned}$$

Z równań (32) wynika istnienie funkcji jednowartościowej λ, czyniącej zadość równaniom

$$(34)\qquad X = \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \ Y = \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \ Z = \frac{\partial \lambda}{\partial z}.$$

Niech dl oznacza jakikolwiek element drogi, styczny do powierzchni S w punkcie σ. Ponieważ

$$(35)\qquad \cos^2(n,x) + \cos^2(n,y) + \cos^2(n,z) = 1,$$

przeto dostawy kątów (n, x), (n, y), (n, z) nie mogą jednocześnie być równe zeru. Zakładamy, że $\cos(n, x) \neq 0$. Z równań (33) wynika, że

$$(36)\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial l} = X\cos(l,x) + Y\cos(l,y) + Z\cos(l,z) = 0.$$

W samej rzeczy mamy

$$(37)\qquad \cos(n,x)\cos(l,x) + \cos(n,y)\cos(l,y) + \cos(n,z)\cos(l,z) = 0,$$

przeto

$$(38)\qquad X\cos(n,x)\cos(l,x) + X\cos(n,y)\cos(l,y) + X\cos(n,z)\cos(l,z) = 0$$

i wobec (33)

$$(39)\qquad \begin{aligned} &X\cos(n,x)\cos(l,x) + Y\cos(n,x)\cos(l,y) \\ &+ Z\cos(n,x)\cos(l,z) = 0, \end{aligned}$$

a ponieważ $\cos(n, x) \neq 0$, jak wyżej,

$$(40)\qquad X\cos(l,x) + Y\cos(l,y) + Z\cos(l,z) = 0.$$

Z równania $\frac{\partial \lambda}{\partial l} = 0$ wnosimy, że λ ma na powierzchni S wartość stałą λ_0. Zakładając

$$(41)\qquad \lambda - \lambda_0 = p,$$

otrzymujemy równania równowagi rozważanego płynu:

$$(42)\qquad X = \frac{\partial p}{\partial x}, \ Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \ Z = \frac{\partial p}{\partial z} \text{ wewnątrz } T; \ p = 0 \text{ na } S.$$

W podobny sposób można z zasady prac przygotowanych wyprowadzić równania równowagi w przypadku ogólniejszym cieczy nieściśliwej, niejednorodnej, zawartej w naczyniu otwartem, na której powierzchnię swobodną działają dowolne ciśnienia *)

*) Por. L. Lichtenstein, Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten, Annales de la Société Polonaise de Mathématique (1924), S. 20-28.

Spróbójmy teraz uogólnić w następujący sposób rozważane przed chwilą zagadnienie.

Niech T oznacza jakiekolwiek pole dwuwymiarowe, skończone, ograniczone przez krzywe zamknięte o krzywiźnie ciągłej S; niech a, b, c, f, g, h, będą jakiekolwiek funkcje ciągłe, określone wewnątrz T i na S, mające pochodne ciągłe pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu. Niech dalej X, Y oznaczają pewne funkcje ciągłe, mające pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe. Jakie są warunki konieczne i dostateczne, aby równanie

$$\int_T (X\mathbf{u} + Y\mathbf{v})\, dx\, dy = 0 \tag{43}$$

miało miejsce dla wszelkich funkcyj $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, posiadających pochodne pierwszego rzędu ciągłe i spełniających równanie

$$a \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + b \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + c\,\mathbf{u} + f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + g \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + h\mathbf{v} = 0? \tag{44}$$

Zakładając (45) $a = f = 1$, $b = c = g = h = 0$,

otrzymujemy równanie

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 0 \tag{45}$$

i zagadnienie nasze sprowadza się do zagadnienia, rozważanego przed chwilą. Rozwiązaliśmy je z łatwością, posługując się wzorami (29). Wzorów odpowiednich, rozwiązujących równanie (44), nie znamy, dlatego wypadnie nam użyć rozwinięć, nieco bardziej zawiłych.

Zanim się tym przedmiotem zajmiemy, zwróćmy uwagę na to, że równania typu (44), a raczej równania nieco bardziej ogólne, otrzymujemy m. i. traktując t. zw. zagadnienie rachunku warjacyjnego Lagrange'a w dziedzinie całek podwójnych.

Niech $F\,(x, y, z_1, \ldots, z_6)$ i $\Phi\,(x, y, z_1, \ldots, z_6)$ oznaczają funkcje holomorficzne zmiennych niezależnych $x, y, z_1, \ldots, z_6$ w pewnej dziedzinie ośmiowymiarowej R_8 i niech pole dwuwymiarowe T, używane poprzednio, będzie zawarte w rzucie R_8 na płaszczyznę x-y. Uważajmy całkę

$$I = \int_T F(x, y, z, t, z_x, z_y, t_x, t_y)\, dx\, dy,\quad z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, t_y = \frac{\partial t}{\partial y}. \tag{46}$$

Problematem Lagrange'a nazywamy zagadnienie następujące. Znaleźć funkcje z i t zmiennych x i y, określone w dziedzinie $T + S$, ciągłe i mające pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe, czyniące zadość warunkowi

$$\Phi\,(x, y, z, t, z_x, z_y, t_x, t_y) = 0 \tag{47}$$

jakoteż ewentualnie pewnym warunkom na powierzchni S (warunkom brzegowym) i nadające całce I wartości ekstremalne. Dla uproszczenia przypuśćmy, że wartość z i t na S mogą być dowolne.

Niech z i t będą funkcje szukane i niech $z + \varepsilon\,\mathbf{u}$, $t + \varepsilon\,\mathbf{v}$ oznaczają jakiekolwiek funkcje w otoczeniu pierwszego rzędu funkcyj z i t. Niech innemi słowy $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ będą dowolne funkcje ciągłe, mające pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe, i niech ε oznacza parametr rzeczywisty nieskończenie mały. Wprowadzając we wzorach (46) i (47) Φ funkcje $z + \varepsilon\,\mathbf{u}$ i $t + \varepsilon\,\mathbf{v}$ zamiast z i t, otrzymujemy, całkując częściowo,

$$\begin{aligned} \triangle I = \delta I + O(\varepsilon^2) &= \varepsilon \int_T \Big(F'_z\,\mathbf{u} + F'_t\,\mathbf{v} + \\ &F'_{z_x} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + F'_{z_y} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + F'_{t_x} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + F'_{t_y} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\Big)\, dx\, dy + O(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \int_T \Big\{\Big(F'_z - \frac{d}{dx} F'_{z_x} - \frac{d}{dy} F'_{z_y}\Big)\mathbf{u} + \Big(F'_t - \frac{d}{dx} F'_{t_x} \\ &\qquad - \frac{d}{dy} F'_{t_y}\Big)\mathbf{v}\Big\}\, dx\, dy \\ &+ \varepsilon \int_S \Big\{(F'_{z_x}\, dy - F'_{z_y}\, dz)\,\mathbf{u} + (F'_{t_x}\, dy - F'_{t_y}\, dx)\,\mathbf{v}\Big\} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \triangle \Phi = \delta \Phi + O(\varepsilon^2) &= \varepsilon\,\Big(\Phi'_z\,\mathbf{u} + \Phi'_t\,\mathbf{v} \\ &+ \Phi'_{t_x} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \Phi'_{t_y} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \Phi'_{t_x} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \Phi'_{t_y} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\Big) + O(\varepsilon^2) = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Zakładamy, że warunkiem koniecznym, choć oczywiście nie dostatecznym, aby funkcje z i t nadawały całce I wartości ekstremalne, jest $\delta I = 0$ dla wszelkich $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, spełniających warunek $\delta\Phi = 0$. Założenie to wymaga, nawiasem mówiąc, starannego uzasadnienia. Kładąc dla uproszczenia

$$\begin{gathered} F'_z - \frac{d}{dx} F'_{z_x} - \frac{d}{dy} F'_{z_y} = X(x, y),\quad F'_t - \frac{d}{dx} F'_{t_x} - \frac{d}{dy} F'_{t_y} = Y(x, y), \\ P(s) = F'_{z_x} \frac{dy}{ds} - F'_{z_y} \frac{dx}{ds},\quad Q(s) = F'_{t_x} \frac{dy}{ds} - F'_{t_y} \frac{dx}{ds}, \\ \Phi'_z = c,\ \Phi'_{z_x} = a,\ \Phi'_{z_y} = b,\ \Phi'_t = h,\ \Phi'_{t_x} = f,\ \Phi'_{t_y} = g, \end{gathered} \tag{50}$$

otrzymujemy

$$\int_T (X\mathbf{u} + Y\mathbf{v})\, dx\, dy + \int_S (P(s)\, \mathbf{u} + Q(s)\, \mathbf{v})\, ds = 0, \tag{51}$$

$$a\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + c\,\mathbf{u} + f\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + g\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + h\,\mathbf{v} = 0. \tag{52}$$

Przejdźmy teraz do układu (43), (44). Metoda heurystyczna Lagrange'a polega, jakeśmy już widzieli, na założeniu, że równania (43), (44) są równoważne równaniu

$$\int_T \left\{X\mathbf{u} + Y\mathbf{v} + \lambda\left(a\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + c\,\mathbf{u} + f\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + g\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + h\,\mathbf{v}\right)\right\} dx\, dy = 0, \tag{53}$$

zachodzącemu dla dowolnych **u** i **v**, o ile funkcja λ, ciągła i mająca pochodne pierwszego rzędu ciągłe, została we właściwy sposób określona. Całkując częściowo, otrzymujemy

$$\int_T \left\{\left(X - \frac{\partial}{\partial x}(a\lambda) - \frac{\partial}{\partial y}(b\lambda) + c\lambda\right)\mathbf{u} + \left(Y - \frac{\partial}{\partial x}(f\lambda) - \frac{\partial}{\partial y}(g\lambda) + h\lambda\right)\mathbf{v}\right\} dx\, dy$$
$$+ \int_S \lambda \left\{(a\,dy - b\,dx)\,\mathbf{u} + (f\,dy - g\,dx)\,\mathbf{v}\right\} = 0. \tag{54}$$

Przypuśćmy, że na S

$$\left(a\frac{dy}{ds} - b\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(f\frac{dy}{ds} - g\frac{dx}{ds}\right)^2 > 0. \tag{55}$$

Natenczas z (54) i (55) wynika

$$X = \frac{\partial}{\partial x}(a\lambda) + \frac{\partial}{\partial y}(b\lambda) - c\lambda,\quad Y = \frac{\partial}{\partial x}(f\lambda) + \frac{\partial}{\partial y}(g\lambda) - h\lambda \tag{56}$$

w dziedzinie $T + S$,

$$\lambda = 0 \quad \text{na } S. \tag{57}$$

Musi więc istnieć funkcja λ równa zeru na S taka, iż wewnątrz T zachodzą związki (56). Nietrudno jest wykazać, że funkcje X i Y postaci (56) czynią w samej rzeczy zadość równaniu (43), (44) dla wszelkich **u** i **v**, spełniających (52). Istotnie mamy

$$\int_T (X\mathbf{u} + Y\mathbf{v})\, dx\, dy = \int_T \left\{\mathbf{u}\left(\frac{\partial}{\partial x}(a\lambda) + \frac{\partial}{\partial y}(b\lambda) - c\lambda\right)\right.$$
$$\left. + \mathbf{v}\left(\frac{\partial}{\partial x}(f\lambda) + \frac{\partial}{\partial y}(g\lambda) - h\lambda\right)\right\} dx\, dy \tag{58}$$

$$= -\int_T \lambda\left(a\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + c\,\mathbf{u} + f\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + g\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + h\,\mathbf{v}\right) dx\, dy$$
$$+ \int_S \lambda\left\{(a\,dy - b\,dx)\,\mathbf{u} + (f\,dy - g\,dx)\,\mathbf{v}\right\} = 0.$$

Równania (56), (57) stanowią zatem warunek dostateczny, aby równanie (43) zachodziło dla wszelkich **u** i **v**, spełniających równanie (44). Chodzi teraz o wykazanie, że stanowią one jednocześnie warunek konieczny, i tu właśnie twierdzenie Lagrange'a wymaga uzasadnienia.

Ograniczymy się w tem, co następuje, do przypadku szczególnego

$$ag - \frac{1}{4}(b + f)^2 > 0. \tag{59}$$

Ponieważ obie strony równania (44) można podzielić przez dowolną wielkość nierówną zeru, przeto możemy przypuścić — co uprości nieco dalsze rachunki, — że

$$ag - \frac{1}{4}(b + f)^2 = 1. \tag{60}$$

Równanie o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu

$$L(U) \equiv a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (b+f)\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + g\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + c\frac{\partial U}{\partial x} + h\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{61}$$

jest wobec (60) równaniem typu eliptycznego. Uważajmy równanie

$$M(U) \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(aU) + \frac{\partial^2}{\partial \xi\,\partial \eta}\Big((b+f)\,U\Big) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}(gU)$$
$$- \frac{\partial}{\partial \xi}(cU) - \frac{\partial}{\partial \eta}(hU) = 0. \tag{62}$$

Jest to również równanie typu eliptycznego. Niech teraz (x, y) będzie jakikolwiek punkt, leżący wewnątrz T, i niech $\mathfrak{H}(x, y;\, \xi, \eta)$ oznacza funkcję Greena równania (62) t. j. funkcję ciągłą wewnątrz T i na S, z wyjątkiem w punkcie (x, y), mającą wewnątrz T dla $r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 > 0$ pochodne pierwszego i drugiego rzędu ciągłe, równą zeru na powierzchni S i taką, że funkcje

$$\mathfrak{H}(x, y;\, \xi, \eta) - \log\frac{1}{r},\quad \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \xi}\right)\left|\log\frac{1}{r}\right|^{-1},\quad \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \eta}\right)\left|\log\frac{1}{r}\right|^{-1}$$

są ograniczone. Jak wiadomo, funkcja Greena $\mathfrak{H}(x, y;\, \xi, \eta)$, uważana, jako funkcja zmiennych (x, y), czyni zadość równaniu (61) i równa jest zeru dla wszystkich (x, y) na S.

Niech dalej $\varphi(\xi, \eta)$ oznacza jakąkolwiek funkcję, określoną w $T+S$, ciągłą i mającą pochodne pierwszego i drugiego rzędu ciągłe.

Powiadamy, że funkcje

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(x, y) &= \varphi(x, y) + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\left\{ a(\xi, \eta)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\,\varphi \right\} d\xi\, d\eta \\
\mathbf{v}(x, y) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\left\{ a(\xi, \eta)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\,\varphi \right\} d\xi\, d\eta
\end{aligned}
\tag{63}
$$

czynią zadość warunkowi (44). Istotnie, kładąc dla uproszczenia

$$
\psi(\xi, \eta) = a(\xi, \eta)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + b(\xi, \eta)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\,\varphi, \tag{64}
$$

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(x, y) &= \psi(x, y) + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\,\psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \\
\mathbf{v}(x, y) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\,\psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,
\end{aligned}
\tag{65}
$$

a zatem

$$
\begin{aligned}
a\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + c\,\mathbf{u} + f\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + g\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + h\,\mathbf{v} &= a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi}{\partial y} + c\,\varphi \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} L\left\{ \int_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\,\psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right\}
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Funkcja $\psi(x, y)$ ma pochodne pierwszego rzędu ciągłe. Jak wiadomo, jest

$$
\frac{1}{2\pi} L\left\{ \int_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\,\psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \right\} = -\psi(x, y). \tag{67}
$$

Z równań (66) i (67) wynika oczywiście

$$
a\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + c\,\mathbf{u} + f\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + g\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + h\,\mathbf{v} = 0. \tag{68}
$$

Wprowadzając teraz w równanie (43) dla funkcyj $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ ich wartości (65), otrzymujemy

$$
\int_T \left\{ X\varphi + \frac{1}{2\pi} X\frac{\partial}{\partial x}\int_T \mathfrak{H}\,\psi\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi} Y\frac{\partial}{\partial y}\int_T \mathfrak{H}\,\psi\, d\xi\, d\eta \right\} dx\, dy = 0, \tag{69}
$$

albo, całkując częściowo i biorąc pod uwagę, że funkcja Greena $\mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)$ jest równa zeru dla wszystkich (ξ, η) wewnątrz T, jeżeli (x, y) leży na S,

$$
\int_T \left\{ X\varphi - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial X}{\partial x}\int_T \mathfrak{H}\,\psi\, d\xi\, d\eta - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial Y}{\partial y}\int_T \mathfrak{H}\,\psi\, d\xi\, d\eta \right\} dx\, dy = 0, \tag{70}
$$

lub wobec (64).

$$
\int_T \left\{ X\varphi - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\int_T \mathfrak{H}\left(a\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + b\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + c\,\varphi \right) d\xi\, d\eta \right\} dx\, dy = 0. \tag{71}
$$

Całkowanie częściowe daje, co łatwo jest stwierdzić,

$$
\int_T \left\{ X\varphi + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\int_T \left(\frac{\partial (a\mathfrak{H})}{\partial \xi} + \frac{\partial (b\mathfrak{H})}{\partial \eta} - c\,\mathfrak{H} \right) \varphi\, d\xi\, d\eta \right) dx\, dy = 0, \tag{72}
$$

lub, co na jedno wychodzi,

$$
\begin{aligned}
\int_T \varphi(x, y)\, dx\, dy \Big\{ X + \frac{1}{2\pi}\int_T \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta}\right) \Big[&\frac{\partial}{\partial x}\Big(a(x, y)\,\mathfrak{H}(\xi, \eta; x, y) \Big) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\Big(b(x, y)\,\mathfrak{H}(\xi, \eta; x, y) \Big) - c(x, y)\,\mathfrak{H}(\xi, \eta) \Big] d\xi\, d\eta \Big\} = 0.
\end{aligned}
\tag{73}
$$

Związek powyższy zachodzi dla wszelkich funkcyj φ ciągłych i mających pochodne ciągłe pierwszego i drugiego rzędu. Wnosimy stąd, że

$$
\begin{aligned}
X(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta}\right) \Big[&\frac{\partial}{\partial x}\Big(a(x, y)\,\mathfrak{H}(\xi, \eta; x, y) \Big) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\Big(b(x, y)\,\mathfrak{H}(\xi, \eta; x, y) \Big) - c(x, y)\,\mathfrak{H}(\xi, \eta; x, y) \Big],
\end{aligned}
\tag{74}
$$

lub, zakładając

$$
\lambda(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \mathfrak{H}(\xi, \eta); x, y)\left[\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right] d\xi\, d\eta, \tag{75}
$$

ostatecznie

$$X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(a\lambda) + \frac{\partial}{\partial y}(b\lambda) - c\lambda. \tag{76}$$

Zauważmy, że wewnątrz T jest

$$M(\lambda) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a\lambda) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Big((b+f)\lambda\Big) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(g\lambda) - \frac{\partial}{\partial x}(c\lambda) - \frac{\partial}{\partial y}(h\lambda) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}, \tag{77}$$

na S mamy

$$\lambda = 0. \tag{78}$$

Niech teraz $\chi(x, y)$ będzie dowolna funkcja ciągła, mająca pochodne pierwszego i drugiego rządu ciągłe. Rzecz naturalna, że i funkcje

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\Big\{f(\xi, \eta)\frac{\partial \chi}{\partial \xi} + g(\xi, \eta)\frac{\partial \chi}{\partial \eta} \\ &\quad + h(\xi, \eta)\chi\Big\}\, d\xi\, d\eta, \\ \mathbf{v}(x, y) &= \chi(x, y) + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \mathfrak{H}(x, y; \xi, \eta)\Big\{f(\xi, \eta)\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \\ &\quad + g(\xi, \eta)\frac{\partial \chi}{\partial \eta} + h(\xi, \eta)\chi\Big\}\, d\xi\, d\eta \end{aligned} \tag{79}$$

czynią zadość warunkowi (44). Wprowadzając do równania (43) dla funkcyj $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ ich wartości (79) otrzymujemy, jak wyżej

$$\begin{aligned} Y(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(x, y)\, \mathfrak{H}(\xi, \eta; x, y)\Big) \\ + \frac{\partial}{\partial y}\Big(g(x, y)\, \mathfrak{H}(\xi, \eta; x, y)\Big) + h(x, y)\, \mathfrak{H}(\xi, \eta; x, y)\Big]\, d\xi\, d\eta, \end{aligned} \tag{80}$$

a zatem

$$Y(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(f\lambda) + \frac{\partial}{\partial y}(g\lambda) - h\lambda. \tag{81}$$

Równania (76), (78) i (81) nie różnią się niczem od równań (56) i (57). Znaleźliśmy zatem uzasadnienie twierdzenia Lagrange'a.

§ 4.

Uważajmy teraz ruch cieczy nieściśliwej, pozbawionej tarcia wewnętrznego, rozciągającej się ze wszech stron do nieskończoności. Zakładamy,

że w chwili $t = t_0$ zarówno gęstość cieczy, ρ, jak i składowe prędkości jej cząstek, u_0, v_0, w_0, są wiadome:

$$\rho = \rho_0(a, b, c), \quad u_0 = u_0(a, b, c), \quad v_0 = v_0(a, b, c), \quad w_0 = w_0(a, b, c), \tag{82}$$

gdzie u_0, v_0, w_0 oznaczają spółrzędne rozważanej cząstki, t. zw. spółrzędne Lagrange'a. Zakładamy, że funkcja ρ_0 jest ciągła i ma pochodne pierwszego i drugiego rzędu ciągłe i czyniące zadość warunkom

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial \rho_0}{\partial c} = O(R_0^{-3}); \quad \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial a^2}, \ldots, \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial c^2} = O(R_0^{-4}), \quad R_0^2 = a^2 + b^2 + c^2, \tag{83}$$

skąd wynika oczywiście, że ρ zmierza do pewnej granicy, ρ_∞, dla $R \to \infty$.

Niech dalej $S_o^{(1)}, .., S_o^{(n)}$ oznaczają pewne powierzchnie Jordanowskie o krzywiźnie ciągłej w przestrzeni zmiennych a, b, c, nie mające punktów wspólnych; $S_o^{(1)}, \ldots, S_o^{(n)}$ dzielą przestrzeń (a, b, c) na $(n+1)$ dziedzin $T_o^{(i)}$ $(i = 1, \ldots n)$, z których jedna zawiera, jako punkt wewnętrzny, punkt w nieskończoności. Zakładamy, że funkcje u_0, v_0, w_0 są ciągłe i mają wewnątrz i na powierzchni każdej dziedziny $T_o^{(i)}$ pochodne pierwszego i drugiego rzędu ciągłe. Wszelako, gdy przekroczymy którąkolwiek z powierzchni $S_o^{(k)}$ i tem samem przejdziemy z jednej dziedziny $T_o^{(i)}$ do dziedziny sąsiedniej, funkcje $\frac{\partial u_0}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial^2 w_0}{\partial c^2}$ mogą się zmieniać w sposób nieciągły. Oczywiście zachodzą tu tylko nieciągłości pierwszego rodzaju.

Z założenia powyższego wynika, że i składowe wiru

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c}\right), \quad \eta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial c} - \frac{\partial w_0}{\partial a}\right), \quad \zeta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b}\right) \tag{84}$$

mogą mieć na $S_o^{(i)}$ nieciągłości pierwszego rodzaju: możliwe jest naprzykład, że wewnątrz pewnych dziedzin $T_o^{(i)}$ ruch cieczy w czasie t_0 jest wirówy, w pozostałych dziedzinach natomiast niewirowy. Łatwo jest wszelako wykazać, że składowa normalna wiru jest na wszystkich powierzchniach $S_o^{(i)}$ ciągła.

W nieskończoności zachodzą związki

$$u_0, v_0, w_0 = O(R_0^{-1}), \quad \frac{\partial u_0}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial w_0}{\partial c} = O(R_0^{-2}), \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial a^2}, \ldots, \frac{\partial^2 w_0}{\partial c^2} = O(R_0^{-3}). \tag{85}$$

Zakładamy, że w nieskończoności ciecz jest w spoczynku.

Ponieważ ciecz jest nieściśliwa, więc jest

$$\frac{\partial u_0}{\partial a} + \frac{\partial v_0}{\partial b} + \frac{\partial w_0}{\partial c} = 0. \tag{86}$$

Niech x, y, z będą spółrzędne cząstki a, b, c w czasie t,

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t). \tag{87}$$

Oczywiście jest

$$x(a, b, c, t_0) = a, \quad y(a, b, c, t_0) = b, \quad z(a, b, c, t_0) = c. \tag{88}$$

Uważajmy niech cieczy, czyniący zadość następującym warunkom:

Funkcje (87) są ciągłe i mają wewnątrz i na powierzchni każdej dziedziny $T_o^{(i)}$ pochodne pierwszego rzędu

$$\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}; \frac{\partial y}{\partial a}, \dots, \frac{\partial z}{\partial c}$$

ciągłe i spełniające warunek Höldera

$$\left| \frac{\partial}{\partial a} x(a, b, c, t) - \frac{\partial}{\partial a} x(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, t) \right|, \dots \leqq c_1 \bar{d}^{\lambda}, \quad (c, \text{ stała}) \tag{89}$$

$$\bar{d}^2 = (a - \bar{a})^2 + (b - \bar{b})^2 + (c - \bar{c})^2, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Składowe prędkości

$$u = \frac{d}{dt} x(a, b, c, t), \quad v = \frac{d}{dt} y(a, b, c, t), \quad w = \frac{d}{dt} z(a, b, c, t) \tag{90}$$

istnieją i są ciągłe. Wewnątrz $T_o^{(i)}$ $(i = 1, \dots (n+1)$ na powierzchni każdej z tych dziedzin istnieją wreszcie pochodne

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial a} x(a, b, c, t), \dots \quad , \frac{\partial w}{\partial c} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial c} z(a, b, c, t), \tag{91}$$

ciągłe i czyniące zadość warunkowi Höldera.

Powierzchniom $S_o^{(i)}$ odpowiadają jedno-jednoznacznie w przestrzeni zmiennych (x, y, z) pewne powierzchnie Jordanowskie $S^{(i)}$, dziedzinom $T_o^{(i)}$ dziedziny $T^{(i)}$. Uważajmy u, v, w jako funkcje zmiennych (Eulerowskich) x, y, z, t:

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t). \tag{92}$$

Funkcje (92) są oczywiście ciągłe i mają wewnątrz i na powierzchni każdej z dziedzin $T^{(i)}$ pochodne pierwszego rzędu

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z} \text{ ciągłe i spełniające warunek Höldera.}$$

Zakładamy, że i pochodne

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{93}$$

istnieją i są ciągłe.

A teraz słów kilka o zachowaniu się cieczy w nieskończoności,— „warunkach brzegowych". Zakładamy, ze dla $R_o \to \infty$ zachodzą związki

$$\begin{gathered} x - a, \ y - b, \ z - c; \ u = \frac{dx}{dt}, \ v = \frac{dy}{dt}, \ w = \frac{dz}{dt} = O(R^{-1}), \\ \frac{\partial x}{\partial a} - 1, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}; \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial b} - 1, \frac{\partial y}{\partial c}; \frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial c} - 1; \frac{\partial u}{\partial a}, \frac{\partial u}{\partial b}, \frac{\partial u}{\partial c}; \\ \frac{\partial v}{\partial a}, \dots, \frac{\partial w}{\partial c} = O(R_0^{-2}), \end{gathered} \tag{94}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{\bar{d}^{\lambda}} \left(\frac{\partial x}{\partial a}(a, b, c) - \frac{\partial x}{\partial a}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \right), \dots \quad = O(R_0^{-2-\lambda}), \\ \frac{1}{\bar{d}^{\lambda}} \left(\frac{\partial u}{\partial a}(a, b, c) - \frac{\partial u}{\partial a}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \right), \dots \quad = O(R_0^{-2-\lambda}). \end{gathered} \tag{95}$$

Z (94) i (95) wnosimy w jednej chwili, że

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z} = O(R^{-2}), \qquad R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{96}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{d_{12}^{\lambda}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y_1, z_1) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, y_2, z_2) \right), \dots \quad = O(R_1^{-2-\lambda}), \\ R_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \ d_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2. \end{gathered} \tag{97}$$

Jak wiadomo, gęstość cząstki (a, b, c) cieczy nie zależy od czasu. W czasie t cząstka ta znajduje się w punkcie (x, y, z). Uważając gęstość ρ jako funkcję zmiennych x, y, z, t, mamy

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(a, b, c) = \rho. \tag{98}$$

Funkcja ρ jest ciągła i ma wewnątrz i na powierzchni każdej dziedziny $T^{(i)}$ pochodne pierwszego rzędu $\frac{\partial \rho}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial y}, \frac{\partial \rho}{\partial z}$ ciągłe i spełniające warunek Höldera.

A dalej co się tyczy ciśnienia cieczy p, zakładamy, że funkcja p jest ciągła i ma wewnątrz i na powierzchni każdej dziedziny $T^{(i)}$ pochodne $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ ciągłe i spełniające warunek Höldera. W nieskończoności jest

$$
(99)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} = O\,(R^{-2}),\\
&\frac{1}{d_{12}^{\lambda}}\left(\frac{\partial p}{\partial x}(x_1, y_1, z_1) - \frac{\partial p}{\partial x}(x_2, y_2, z_2)\right), \ldots = O\,(R_1^{-2-\lambda}).
\end{aligned}
$$

W nieskończoności p spełnia pewne warunki brzegowe i w szczególności z (99) wynika, że p zmierza dla $R \to \infty$ do pewnej granicy, p_∞. Zakładamy, że p_∞ ma być wiadomą ciągłą funkcją czasu.

Co się wreszcie tyczy sił, działających na cząstki cieczy, to zakładamy, że składowe $X\,(x, y, z, t)$, $Y\,(x, y, z, t)$, $Z\,(x, y, z, t)$ sił, działających na jednostkę masy w punkcie (x, y, z), są funkcje ciągłe i mające pochodne pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu względem x, y, z ciągłe.

W nieskończoności zachodzą związki

$$
(100)\qquad \frac{\partial X}{\partial x}, \ldots = O\,(R^{-3}), \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \ldots = O\,(R^{-4}), \quad \frac{\partial^3 X}{\partial x^3}, \ldots = O\,(R^{-5}).
$$

Powiadamy teraz, że w przedziale czasu $< t_0, t >$ dostatecznie małym istnieje w samej rzeczy ruch cieczy, spełniający wszystkie powyższe warunki; ruch ten jest najzupełniej określony. Innemi słowy, dla wartości $t - t_0 > 0$, dostatecznie małych, istnieje pewien ściśle określony układ funkcyj $x\,(a, b, c, t)$, $y\,(a, b, c, t)$, $z\,(a, b, c, t)$, $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$, czyniących zadość równaniom ruchu Eulera

$$
(101)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned}
$$

i warunkom początkowym i brzegowym, podanym wyżej.

Uważajmy równania (101) nieco bliżej. Stosując pewne przekształcenie, używane często w teorji równań o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu typu eliptycznego, otrzymujemy przedewszystkiem wzór

$$
(102)\qquad
\begin{aligned}
4\pi\left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_\infty}{\rho_\infty}\right) = &\int p'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\rho'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\rho'}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\rho'}\right)\right\} d\tau'\\
&- \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'}\right) d\tau' + \int \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)^2\right.\\
&\left. + 2\,\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial v'}{\partial x'} + 2\,\frac{\partial u'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial x'} + 2\,\frac{\partial v'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial y'}\right\} d\tau',
\end{aligned}
$$

$$
d\tau' = dx'\,dy'\,dz', \quad p' = p\,(x', y', z'), \quad \rho' = \rho\,(x', y', z'), \ldots, \quad r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,
$$

gdzie całkowanie rozciąga się na przestrzeń całkowitą zmiennych x', y', z'. Jest to równanie całkowe linjowe, mające, jak bliższe badanie wykazuje, jedno jedyne rozwiązanie $p\,(x, y, z)$ ciągłe, posiadające pochodne pierwszego rzegu ciągłe i spełniające warunek Höldera, i prócz tego takie, iż zachodzą związki (99).

Równanie całkowe (102) daje ciśnienie, jeżeli składowe prędkości u, v, w są wiadome. Przedewszystkiem otrzymujemy tą drogą ciśnienie początkowe, t. j. wartości funkcji p dla $t = t_0$.

Wzory (101) stanowią układ równań o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu dla niewiadomych $u\,(x, y, z, t)$, $v\,(x, y, z, t)$, $w\,(x, y, z, t)$.

Gdyby można było zastosować twierdzenie zasadnicze teorji równań o pochodnych cząstkowych, znane jako twierdzenie Cauchy-Kowalewskiej, zadanie nasze byłoby w jednej chwili rozwiązane, albowiem dla $t = t_0$ wartości funkcyj u, v, w, p są wiadome. Wszelako twierdzenie Cauchy-Kowalewskiej nie stosuje się, a to dla następujących powodów. Przedewszystkiem układ (101), jak łatwo widzieć, nie jest układem normalnym, gdyż równania nie pozwalają wyrazić pochodnych $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t}$ przez zmienne $x, y, z, u, v, w, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}$. W teorji klasycznej równań o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu rozważa się przeważnie układy funkcyj holomorficznych, — istnienie rozwiązania bywa zazwyczaj ustalane w przedziałach lub dziedzinach ograniczonych. Wobec tego poważną komplikację stanowi warunek, że pochodne $\frac{\partial u_0}{\partial a}, \dots, \frac{\partial w_0}{\partial c}$, zgodnie z założeniem, nie są koniecznie funkcjami ciągłemi, a tem mniej holomorficznemi. Zauważmy, że założenie takie musimy wprowadzić np. w badaniach nad teorją wirów Helmholtza. A dalej w uważanem przez nas zagadnieniu ciecz wypełnia całkowitą przestrzeń zmiennych x, y, z. Z tych to racyj teorja klasyczna nie daje się zastosować, wypada tedy użyć innych metod.

Punktem wyjścia naszego dowodu istnienia rozwiązań są wzory A. Friedmanna, obejmujące jako przypadek szczególny wzory klasyczne Cauchy'ego. Niech ξ, η, ζ oznaczają składowe wiru w punkcie x, y, z w czasie t,

$$(103) \qquad \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Z równań (101) dają się wyprowadzić związki następujące

$$\xi = \boldsymbol{\xi}_0 \frac{\partial x}{\partial a} + \boldsymbol{\eta}_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \boldsymbol{\zeta}_0 \frac{\partial x}{\partial c}, \quad \boldsymbol{\xi}_0 = \xi^0 + \xi^* + \xi_*, \quad \boldsymbol{\eta}_0 = \eta_0 + \eta_* + \eta_*,$$

$$(104) \quad \eta = \boldsymbol{\xi}_0 \frac{\partial y}{\partial a} + \boldsymbol{\eta}_0 \frac{\partial y}{\partial b} + \boldsymbol{\zeta}_0 \frac{\partial y}{\partial c}, \qquad \boldsymbol{\zeta}_0 = \zeta_0 + \zeta^* + \zeta_*,$$

$$\zeta = \boldsymbol{\xi}_0 \frac{\partial z}{\partial a} + \boldsymbol{\eta}_0 \frac{\partial z}{\partial b} + \boldsymbol{\zeta}_0 \frac{\partial z}{\partial c}, \quad 2\,\xi^* = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial X}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial Y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial Y}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial Z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right) dt$$

$$2\,\xi_* = \int_{t_0}^{t} \left\{\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial p}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial p}{\partial c}\right\} dt, \dots$$

W szczególności, gdy ciecz jest jednorodna, a siły, działające na cząstki cieczy, mają potencjał, mamy

$$(105) \qquad \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

przeto, jak łatwo wykazać

$$(106) \qquad \xi^* = \eta^* = \zeta^* = 0, \quad \xi_* = \eta_* = \zeta_*.$$

Równania (104) dają tedy wzory klasyczne Cauchy'ego będące podstawą teorji wirów Helmholtza.

Z równań (103) wynikają, jak wiadomo, dalsze równania

$$(107) \qquad \begin{aligned} u(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{1}{r}\,\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{1}{r}\,\zeta'\,d\tau' \\ v(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{1}{r}\,\zeta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{1}{r}\,\xi'\,d\tau', \\ w(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{1}{r}\,\xi'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{1}{r}\,\zeta'\,d\tau', \end{aligned}$$

gdzie całkowanie rozciąga się na całkowitą przestrzeń zmiennych x', y', z'. Z (107) wynika w jednej chwili

$$(108) \qquad \begin{aligned} x &= a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{1}{r}\,\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{1}{r}\,\zeta'\,d\tau'\right\}, \\ y &= b + \int_{t_0}^{t} dt \left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{1}{r}\,\zeta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{1}{r}\,\xi'\,d\tau'\right\}, \\ z &= c + \int_{t_0}^{t} dt \left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{1}{r}\,\xi'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{1}{r}\,\eta'\,d\tau'\right\}. \end{aligned}$$

Wzory (104) i (108) stanowią układ równań różniczkowo-całkowych dla funkcyj $x\,(b, b, c, t)$, $y\,(a, b, c, t)$, $z\,(a, b, c, t)$.

Dowód istnienia rozwiązań przeprowadzamy, posługując się metodą przybliżeń kolejnych. W pierwszem przybliżeniu przyjmujemy, że prędkość cząstki a, b, c równa jest ciągle prędkości początkowej, u_0, v_0, w_0, innemi słowy że

$$(109) \qquad u_1 = u_0, \quad v_1 = v_0, \quad w_1 = w_0.$$

Spółrzędne cząstki (a, b, c) w chwili t są

$$x_1 = a + u_1\,t = a + u_0\,t = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial c}\int_{\infty_0} \frac{1}{r_0}\,\eta_0'\,d\tau'_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial b}\int_{\infty_0} \frac{1}{r_0}\,\zeta_0'\,d\tau_0'\right\},$$

(110) . . . .

$$z_1 = c + w_1\, t = c + w_0\, t = c + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial b}\int_{\infty_0} \frac{1}{r_0}\, \xi_0'\, d\tau_0' \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_{\infty_0} \frac{1}{r_0}\, \eta_0'\, d\tau_0' \right\},$$

$$(\, d\tau_0' = da'\, db'\, dc' \;,\; r_0^2 = (a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2 \,)$$

gdzie całki $\int_{\infty_0}$ rozciągają się na całkowitą przestrzeń zmiennych a, b, c.

Powierzchniom $S_0^{(1)}, \dots, S_0^{(n)}$, krócej powierzchniom S_0, odpowiadają dla dostatecznie małych wartości $t - t_0$ w przestrzeni x_1, y_1, z_1 jedno-jednoznacznie pewne powierzchnie $S_1^{(1)}, \dots, S_1^{(n)}$, krócej S_1, na których pochodne $\frac{\partial u_1}{\partial a}, \frac{\partial u_1}{\partial b}, \dots, \frac{\partial w_1}{\partial c}$ mogą doznawać nieciągłości pierwszego rodzaju. Cząstce (a, b, c) w punkcie (x_1, y_1, z_1) przypisujemy teraz gęstość

(111) $$\rho_1\,(x_1, y_1, z_1) = \rho\,(a, b, c),$$

a składowym siły w punkcie (x_1, y_1, z_1) wartości

(112) $$X_1 = X\,(x_1, y_1, z_1, t), \quad Y_1 = Y\,(x_1\, y_1, z_1, t), \quad Z_1 = Z\,(x_1, y_1, z_1, t).$$

Uważajmy teraz równanie całkowe

$$4\pi\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_\infty}{\rho_\infty}\right) = \int_{\infty_1} p_1' \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1'}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1'}\left(\frac{1}{\rho_1'}\right) + \frac{\partial}{\partial y_1'}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial}{\partial y_1'}\left(\frac{1}{\rho_1'}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z_1'}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial}{\partial z_1'}\left(\frac{1}{\rho_1'}\right) \right\} d\tau_1'$$

(113)

$$-\int_{\infty_1} \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial X_1'}{\partial x_1'} + \frac{\partial Y_1'}{\partial y_1'} + \frac{\partial Z_1'}{\partial z_1'}\right) d\tau_1' + \int_{\infty_1} \frac{1}{r_1}\left\{ \left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1'}{\partial y_1'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1'}{\partial z_1'}\right)^2 \right.$$

$$\left. 2\,\frac{\partial u_1'}{\partial y_1'}\frac{\partial v_1'}{\partial x_1'} + 2\,\frac{\partial u_1'}{\partial z_1'}\frac{\partial w_1'}{\partial x_1'} + 2\,\frac{\partial v_1'}{\partial z_1'}\frac{\partial w_1'}{\partial y_1'} \right\} d\tau_1',$$

$$(\, d\tau_1' = d\,x_1'\, d\,y_1\, d\,z_1',\; r_1^2 = (x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2 + (z_1 - z_1')^2 \,)$$

gdzie całki $\int_{\infty_1}$ rozciągają się na całkowitą przestrzeń zmiennych x_1, y_1, z_1. Niech p_1 oznacza rozwiązanie tego równania, zmierzające dla $R_1 \to \infty$ $(R_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)$ do p_∞. Funkcję $p_1 = p_1\,(x_1, y_1, z_1, t)$ uważamy jako ciśnienie cieczy w pierwszem przybliżeniu.

Niech teraz będzie

$$2\,\xi_1^* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial b}\frac{\partial x_1}{\partial c} - \frac{\partial X_1}{\partial c}\frac{\partial x_1}{\partial b} + \frac{\partial Y_1}{\partial b}\frac{\partial y_1}{\partial c} - \frac{\partial Y_1}{\partial c}\frac{\partial y_1}{\partial b} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial Z_1}{\partial b}\frac{\partial z_1}{\partial c} - \frac{\partial Z_1}{\partial c}\frac{\partial z_1}{\partial b} \right\} dt, \dots$$

$$2\,\xi_{*1} = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial p_1}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial p_1}{\partial c} \right\} dt, \dots$$

(114)

$$\xi_{01} = \xi_0 + \xi_1^* + \xi_{*1}, \dots$$

$$\xi_1 = \xi_{01}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \eta_{01}\frac{\partial x_1}{\partial b} + \zeta_{01}\frac{\partial x_1}{\partial c}, \quad \eta_1 = \xi_{01}\frac{\partial y_1}{\partial a} + \eta_{01}\frac{\partial y_1}{\partial b}$$

$$+ \zeta_{01}\frac{\partial y_1}{\partial c}, \quad \zeta_1 = \xi_{01}\frac{\partial z_1}{\partial a} + \eta_{01}\frac{\partial z_1}{\partial b} + \zeta_{01}\frac{\partial z_1}{\partial c}.$$

Połóżmy w drugiem przybliżeniu

$$x_2 = a + \int_{t_0}^{t} u_2\, dt, \quad y_2 = b + \int_{t_0}^{t} v_2\, dt, \quad z_2 = c + \int_{t_0}^{t} w_2\, dt,$$

$$u_2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\infty_1}\frac{1}{r_1}\,\eta_1'\, d\tau_1' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\infty_1}\frac{1}{r_1}\,\zeta_1'\, d\tau_1',$$

(115) . . . .

$$w_2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\infty_1}\frac{1}{r_1}\,\xi_1'\, d\tau_1' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\infty_1}\frac{1}{r_1}\,\eta_1'\, d\tau_1',$$

rozumiejąc przez u_2, v_2, w_2 składowe prędkości cząstki (a, b, c), znajdującej się w chwili t w punkcie x_2, y_2, z_2. Powierzchniom S_0 odpowiadają w przestrzeni x_2, y_2, z_2 dla dostatecznie małych $t - t_0$ jedno-jednoznacznie pewne powierzchnie S_2, na których pochodne $\frac{\partial u_2}{\partial a}, \dots, \frac{\partial w_2}{\partial c}$ mogą doznawać nieciągłości pierwszego rodzaju. Cząstce (a, b, c) w punkcie (x_2, y_2, z_2) przypisujemy teraz gęstość

(116) $$\rho_2\,(x_2, y_2, z_2) = \rho\,(a, b, c)$$

a składowym siły w punkcie (x_2, y_2, z_2) wartości

(117) $$X_2 = X\,(x_2\, y_2, z_2), \quad Y_2 = Y\,(x_2, y_2, z_2), \quad Z_2 = Z\,(x_2, y_2, z_2).$$

Ciśnienie cieczy w drugiem przybliżeniu otrzymamy, rozwiązując równania całkowe

$$
\begin{aligned}
4\pi\left(\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\right) &= \int\limits_{\infty_2} p'_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_2}\left(\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial}{\partial x'_2}\left(\frac{1}{\rho'_2}\right) + \frac{\partial}{\partial y'_2}\left(\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial}{\partial y'_2}\left(\frac{1}{\rho'_2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z'_2}\left(\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial}{\partial z'_2}\left(\frac{1}{\rho'_2}\right) \right\} d\tau'_2 \\
&\quad - \int\limits_{\infty_2} \frac{1}{r_2}\left(\frac{\partial X'_2}{\partial x'_2}+\frac{\partial Y'_2}{\partial y'_2}+\frac{\partial Z'_2}{\partial z'_2}\right) d\tau'_2 + \int\limits_{\infty_2} \frac{1}{r_2}\left\{ \left(\frac{\partial u'_2}{\partial x'_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'_2}{\partial y'_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'_2}{\partial z'_2}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\,\frac{\partial u'_2}{\partial y'_2}\frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} + 2\,\frac{\partial v'_2}{\partial z'_2}\frac{\partial w'_2}{\partial y'_2} + 2\,\frac{\partial u'_2}{\partial z'_2}\frac{\partial w'_2}{\partial x'_2} \right\} d\tau'_2 ,
\end{aligned}
\tag{118}
$$

$$
\left(d\tau'_2 = dx'_2\, dy'_2\, dz'_2 , \qquad r_2^2 = (x_2 - x'_2)^2 + (y_2 - y'_2)^2 + (z_2 - z'_2)^2 \right.
$$

$$
\left. p_2 \to p_\infty \text{ dla } R_2 \to \infty ,\ R_2^2 = x_2^2 + y_2^3 + z_2^2 \right),
$$

gdzie całki rozciągają się na całkowitą przestrzeń zmiennych x_2, y_2, z_2. Od drugiego przybliżenia przechodzimy do trzeciego, tworząc naprzód funkcje $\xi_2^*, \eta_2^*, \zeta_2^*$; $\xi_2^*, \eta_2^*, \zeta_2^*$; $\xi_{02}, \eta_{02}, \zeta_{02}$ w ten sam sposób, w jaki zostały utworzone funkcje $\xi_1^*, \eta_1^*, \ldots$ i kładąc następnie

$$
x_3 = a + \int_{t_0}^{t} u_3\, dt,\quad u_3 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_2}\int\limits_{\infty_2}\frac{1}{r_2}\eta'_2\, d\tau'_2 + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_2}\int\limits_{\infty_2}\frac{1}{r_2}\zeta'_2\, d\tau'_2 ,
\tag{119}
$$

. . . .

W ten sposób otrzymujemy ciąg nieskończony funkcyj x_n, y_n, z_n, p_n $(n = 1, 2, \ldots)$, określony dla wszystkich a, b, c i dla dostatecznie małych wartości $t - t_0$. Ciągi te są, jak bliższe badanie wykazuje, jednostajnie zbieżne dla (a, b, c) wewnątrz każdej dziedziny

$$
-M \leqq a \leqq M, \quad -M \leqq b \leqq M, \quad -M \leqq c \leqq M
$$

w pewnym przedziale $< t_0, t_0 + t^* >$, niezależnym od M. Niech będzie

$$
\begin{gathered}
\lim_{n\to\infty} x_n(a, b, c, t) = x(a, b, c, t), \quad \lim_{n\to\infty} y_n(a, b, c, t) = y(a, b, c, t), \\
\lim_{n\to\infty} z_n(a, b, c, t) = z(a, b, c, t).
\end{gathered}
\tag{120}
$$

Funkcje $x(a, b, c, t), \ldots$ są ciągłe i mają wewnątrz i na powierzchni każdej dziedziny $T_0^{(i)}$ pochodne pierwszego rzędu ciągłe i spełniające warunek Höldera. A dalej istnieją funkcje $u, v, w,$

$$
\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}, \ldots, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d}{dt}\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \ldots
$$

i mają własności podane uprzednio. Funkcje $x(a, b, c, t), \ldots, z(a, b, c, t), p$ czynią zadość równaniom hydrodynamicznym Eulera i Lagrange'a. Analiza szczegółowa wykazuje, że znalezione rozwiązanie jest jedynem, spełniającem wszystkie warunki powyższe.

A teraz słów kilka o dowodzie zbieżności ciągów (120). Jak zazwyczaj, uważamy różnice $x_{n+1} - x_n$, $y_{n+1} - y_n$, $z_{n+1} - z_n$ i staramy się ustalić dla wartości bezwzględnych $|x_{n+1} - x_n|, \ldots$ kres górny δ_n taki, iż szereg $\Sigma\, \delta_n$ będzie zbieżny. Najwidoczniej jest

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= \int_{t_0}^{t} (u_{n+1} - u_n)\, dt = \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_n}\int\limits_{\infty_n}\frac{1}{r_n}\eta'_n\, d\tau'_n \right. \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_n}\int\limits_{\infty_n}\frac{1}{r_n}\zeta'_n\, d\tau'_n \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\int\limits_{\infty_{n-1}}\frac{1}{r_{n-1}}\eta'_{n-1}\, d\tau'_{n-1} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\int\limits_{\infty_{n-1}}\frac{1}{r_{n-1}}\zeta'_{n-1}\, d\tau'_{n-1} \right\},
\end{aligned}
\tag{121}
$$

. . . .

Po prawej stronie równań (121) mamy wyrazu kształtu $\int\limits_{\infty_n} - \int\limits_{\infty_{n-1}}$, gdzie pod znakiem całkowania znajdują się pochodne pewnych potencjałów Newtonowskich. Należy zwrócić uwagę na to, że określonemu punktami (a, b, c) przestrzeni ∞_0 odpowiadają dwa naogół różne punkty (x_n, y_n, z_n) i $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ przestrzeni ∞_n i ∞_{n-1} i że r_n i r_{n-1} oznaczają odległości punktów (x_n, y_n, z_n), (y'_n, y'_n, z'_n) i $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$, $(x'_{n-1}, y'_{n-1}, z'_{n-1})$.

Dowód zbieżności ciągów (120) zależy od nowych pewnych lemmatów teorji potencjału, posiadających same przez się pewną wartość. Podamy w następnym paragrafie jeden z nich, przyczem dla uproszczenia będziemy uważali potencjał masy ograniczonej.

§ 5.

Niech T oznacza dziedzinę skończoną zmiennych x, y, z, ograniczoną powierzchnią Jordanowską S, mającą płaszczyznę styczną ciągłą i dostawy kierunkowe normalnej, spełniające warunek Höldera z wykładnikiem λ $(0 < \lambda < 1$.

Niech $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$ i $P_2\ (x_2, y_2, z_2)$ będą jakiekolwiek dwa punkty na S, niech $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ i $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ oznaczają dostawy kierunkowe normalnej w P_1 i P_2. Mamy tedy

$$(122)\qquad |\alpha_1-\alpha_2|,\ |\beta_1-\beta_2|,\ |\gamma_1-\gamma_2| \leqq M_0\, \delta_{12}^{\lambda},\ (0<\lambda<1),\ \delta_{12}^{2} = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2.$$

Niech dalej $\dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta$ oznaczają jakiekolwiek funkcje ciągłe zmiennych x, y, z, określone w $T+S$, mające pochodne pierwszego rzędu ciągłe i spełniające warunek Höldera. Niech będzie

$$|\dot\xi|,\ |\dot\eta|,\ |\dot\zeta| \leqq \Omega_0;\ \left|\frac{\partial \dot\xi}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \dot\xi}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \dot\zeta}{\partial z}\right| \leqq \Omega_0;$$

$$(123)\qquad \left|\left(\frac{\partial \dot\xi}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \dot\xi}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \Omega_0\, d_{12}^{\lambda}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\left(\left(\frac{\partial \dot\xi}{\partial x}\right)_1 = \frac{\partial \dot\xi}{\partial x}(x_1, y_1, z_1), \ldots, \dot d_{12}^{2} = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)+(z_1-z_2)^2\right) \text{*)}$$

Jeżeli, co zakładamy, Ω_0 jest dostatecznie małe, to równania

$$(124)\qquad \dot x = x + \dot\xi,\quad \dot y = y = \dot\eta,\quad \dot z = z + \dot\zeta$$

określają pewne przekształcenie ciągłe i jedno-jednoznaczne. Powierzchni S odpowiada w przestrzeni $\dot x, \dot y, \dot z$ powierzchnia $\dot S$ o własnościach najzupełniej podobnych, dziedzinie T odpowiada dziedzina $\dot T$.

Niech dalej $\hat\xi, \hat\eta, \hat\zeta$ oznaczają inny układ funkcyj okreslonych w $T+S$, ciągłych i mających pochodne pierwszego rzędu ciągłe i czyniące zadość warunkowi Höldera. Zakładamy, że

$$|\hat\xi|,\ |\hat\eta|,\ |\hat\zeta| \leqq \Omega_0;\ \left|\frac{\partial \hat\xi}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial \hat\xi}{\partial y}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \hat\zeta}{\partial z}\right| \leqq \Omega_0;$$

$$\left|\left(\frac{\partial \hat\xi}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \hat\xi}{\partial x}\right)_2\right| \leqq \Omega_0\, d_{12}^{\lambda},$$

$$(125)\qquad \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$|\hat\xi-\dot\xi|, \ldots, |\hat\zeta-\dot\zeta|;\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(\hat\xi-\dot\xi)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial z}(\hat\zeta-\dot\zeta)\right| \leqq \Omega \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_0,$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat\xi-\dot\xi)\right)_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat\xi-\dot\xi)\right)_2\right| \leqq \Omega\, d_{12}^{\lambda},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

*) W (123) (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) oznaczają dowolne punkty w $T+S$.

Piszemy dla uproszczenia m. i. $\left(\frac{\partial}{\partial x}(\hat\xi-\dot\xi)\right)_1$ zamiast

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat\xi(x_1, y_1, z_1) - \frac{\partial}{\partial x}\dot\xi(x_1, y_1, z_1).$$

Dziedzinie T odpowiada w przestrzeni zmiennych $\hat x = x + \hat\xi$, $\hat y = y + \hat\eta$, $\hat z = z + \hat\zeta$ dziedzina $\hat T$, ograniczona powierzchnią $\hat S$, mającą własności najzupełniej podobne do własności powierzchni S i $\dot S$. Niech wreszcie $\vartheta\ (x, y, z)$ oznacza dowolną funkcję ciągłą i czyniącą zadość warunkowi Höldera i niech będzie

$$(126)\qquad \vartheta\ (x, y, z) = \dot\vartheta\ (\dot x, \dot y, \dot z) = \hat\vartheta\ (\hat x, \hat y, \hat z).$$

Uważajmy potencjały Newtonowskie

$$(127)\qquad \dot V(\dot x, \dot y, \dot z) = \int_{\dot T} \dot\vartheta' \frac{1}{\dot r}\, d\dot\tau',\quad \hat V(\hat x, \hat y, \hat z) = \int_{\hat T} \hat\vartheta' \frac{1}{\hat r}\, d\hat\tau'$$

$$(d\dot\tau' = d\dot x'\, d\dot y'\, d\dot z',\quad \dot r^2 = (\dot x - \dot x')^2 + (\dot y - \dot y')^2 + (\dot z - \dot z')^2).$$

Jak wiadomo, funkcja $\dot V$ jest ciągła i ma w $\dot T + \dot S$ pochodne pierwszego i drugiego rzędu ciągłe i spełniające warunek Höldera z wykładnikiem λ. Potencjał $\hat V$ zachowuje się w sposób najzupełniej analogiczny. Prócz tego dla wszystkich funkcyj, spełniających warunki (123) i (125) zachodzą nowe związki

$$(128)\qquad \begin{aligned} &|\hat V - \dot V| \leqq c_2\,\Omega,\ \left|\frac{\partial \hat V}{\partial \hat x} - \frac{\partial \dot V}{\partial \dot x}\right| \leqq c_2\,\Omega, \ldots;\ \left|\frac{\partial^2 \hat V}{\partial \hat x^2} - \frac{\partial^2 \dot V}{\partial \dot x^2}\right| \leqq c_2\,\Omega, \ldots; \\ &\left|\left(\frac{\partial^2 \hat V}{\partial \hat x^2} - \frac{\partial^2 \dot V}{\partial \dot x^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 \hat V}{\partial \hat x^2} - \frac{\partial^2 \dot V}{\partial \dot x^2}\right)_2\right| \leqq c_2\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}, \ldots \end{aligned}$$

Należy zwrócić szczególną uwagę na to, że nierówności (128) mają miejsce dla wszystkich $\dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta;\ \hat\xi, \hat\eta, \hat\zeta$, spełniających (123) i (125) i że stała c_2 należy tylko od S, ϑ i Ω_0, natomiast jest niezależna od $\dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta;\ \hat\xi, \hat\eta, \hat\zeta$.

Jak widzimy, w twierdzeniu powyższem potencjał $\dot V$ i $\hat V$ jest uważany w zależności od dziedziny $\dot T$, względnie $\hat T$, jako „fonctionnel". Twierdzenia podobne zachodzą i dla potencjału warstwy pojedyńczej i podwójnej, a także dla rozwiązań pewnych zagadnień brzegowych.