

W. ŚLEBODZIŃSKI.

Contribution à la théorie des courbes et des congruences d'un espace riemannien à trois dimensions.

Przyczynek do teorii krzywych i kongruencji przestrzeni trójwymiarowej Riemanna.

Cette Note est divisée en 7 §§. Le § 1 contient les propriétés des courbes analogues aux courbes planes et aux hélices de l'espace euclidien. Dans les §§ 2 — 5 j'étudie les congruences de courbes, en employant la méthode suivie par G. Darboux dans ses recherches sur les congruences de l'espace euclidien. L'application de cette méthode à l'espace riemannien permet de développer la théorie de courbure des congruences, en nous donnant en même temps l'interprétation géométrique des certaines notions introduites par M. G. Ricci. Le § suivant s'occupe de quelques propriétés des congruences qui se conservent dans toute transformation conforme du déplacement riemannien. Dans le § 7, consacré à certaines congruences normales de géodésiques et de cercles, je démontre que les surfaces orthogonales aux courbes d'une telle congruence forment une famille de Lamé.

§ 1.

Soit

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} dx_i dx_k \quad (1)$$

la forme définie positive caractérisant la métrique d'un espace riemannien (V_3). Considérons dans l'espace (V_3) une courbe (C), lieu d'un point M dont les coordonnées $x_i(s)$ ($i = 1, 2, 3$) sont des fonctions données de l'arc s de la courbe (C), compté à partir d'un point arbitraire. Désignons

par \bar{t} le vecteur unitaire tangent au point M à la courbe (C) et par $\lambda^{(r)}$ ses composantes contravariantes; nous fixons la direction de \bar{t} en posant

$$\lambda^{(r)} = \frac{dx_r}{ds} \quad (r=1, 2, 3).$$

Soit \bar{v} un vecteur de composantes contravariantes $\zeta^{(r)}$ ($r=1, 2, 3$), donné comme fonction du point M . Le vecteur $D\bar{v}$, dérivé¹⁾ de \bar{v} , a les composantes contravariantes définies par les formules

$$(D\bar{v})^{(r)} = \frac{d\zeta^{(r)}}{ds} + \sum \left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\} \lambda^{(k)} \zeta^{(i)} \quad (r=1, 2, 3), \quad (2)$$

où $\left\{ \begin{matrix} ik \\ r \end{matrix} \right\}$ désignent les symboles de Christoffel de la forme (1). Appliquons l'opération D au vecteur \bar{t} et posons

$$(D\bar{t})^{(r)} = K \mu^{(r)} \quad (r=1, 2, 3), \quad (F_1)$$

les symboles $\mu^{(r)}$ désignant les composantes contravariantes d'un vecteur unitaire \bar{n} ; elles sont donc assujetties à la condition

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} \mu^{(i)} \mu^{(k)} = 1,$$

d'où il résulte

$$K^2 = \sum_{rs=1}^3 a_{rs} (D\bar{t})^{(r)} (D\bar{t})^{(s)}. \quad (3)$$

Dans tout ce qui suit K représente une grandeur essentiellement non négative. On pourra alors dire que les égalités (F_1) et (3) déterminent complètement la grandeur K et le vecteur \bar{n} en tout point de la courbe (C) , dans lequel les égalités

$$(D\bar{t})^{(r)} = 0 \quad (r=1, 2, 3) \quad (4)$$

ne sont pas satisfaites. Le vecteur \bar{t} étant unitaire, il en résulte que \bar{n} est normal à \bar{t} . — Si les égalités (4) sont satisfaites dans tous les points d'une courbe, celle-ci est une géodésique de l'espace (V_3) .

¹⁾ T. Levi-Civita, Lezioni di calcolo differenziale assoluto, Roma 1925, p. 159. Id. Sur l'écart géodésique, Math. Ann., t. 97, p. 313.

Désignons par $v^{(r)}$ ($r=1, 2, 3$) les composantes contravariantes d'un vecteur unitaire \bar{b} normal à \bar{t} et \bar{n} et donnons lui une direction telle que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda^{(1)} & \lambda^{(2)} & \lambda^{(3)} \\ \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \mu^{(3)} \\ v^{(1)} & v^{(2)} & v^{(3)} \end{vmatrix} \quad (5)$$

soit positif. En appliquant l'opération D aux vecteurs \bar{n} et \bar{b} , on trouve les formules suivantes

$$(D\bar{n})^{(r)} = -K \lambda^{(r)} - S \mu^{(r)} \quad (r=1, 2, 3), \quad (F_2)$$

$$(D\bar{b})^{(r)} = S \mu^{(r)} \quad (r=1, 2, 3), \quad (F_3)$$

où l'on a posé

$$S = \sum_{r=1}^3 \mu^{(r)} (D\bar{b})_r = - \sum_{r=1}^3 v^{(r)} (D\bar{n})_r. \quad (6)$$

Les relations (F_1) , (F_2) , (F_3) sont les formules de Frenet¹⁾ de la courbe (C) , K et S étant respectivement sa courbure et sa torsion. Aux vecteurs \bar{n} et \bar{b} nous donnons les noms du vecteur normal principal et du vecteur binormal de la courbe (C) au point M .

Supposons que la torsion de la courbe (C) soit nulle; on a donc, d'après les formules (6),

$$\sum_{r=1}^3 \mu^{(r)} (D\bar{b})_r = 0.$$

D'autre part, les identités

$$\sum_{r=1}^3 \lambda_r v^{(r)} = 0, \quad \sum_{r=1}^3 v_r v^{(r)} = 1$$

¹⁾ W. Blaschke Frenets Formeln für den Raum von Riemann, Math. Zeitschrift Bd. 6, 1920. V. aussi E. Cartan La Géométrie des espaces de Riemann. Mémoires des Sc. Math., fasc. IX., p. 20. On trouve des renseignements bibliographiques concernant les extensions des formules de Frenet dans le livre de M. D. J. Struik Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie, 1922, p. 76.

entraînent les égalités suivantes

$$\sum_{r=1}^3 \lambda^{(r)} (D\bar{b})_r = 0, \quad \sum_{r=1}^3 \nu^{(r)} (D\bar{b})_r = 0.$$

Le déterminant (5) étant différent de zéro, on en déduit

$$(D\bar{b})_r = 0 \quad (r = 1, 2, 3),$$

ce qui signifie que les vecteurs binormaux d'une courbe à torsion nulle sont parallèles au sens de M. Levi-Civita. Il est évident, d'après la formule (6), que cette proposition est réciproque.

Supposons maintenant que le long d'une courbe (C) est donnée une famille de vecteurs unitaires et parallèles et désignons par $\alpha^{(r)}$ ($r = 1, 2, 3$) les composantes contravariantes de ce vecteur \bar{v} de la famille qui est attaché au point M de (C). On a, par hypothèse,

$$(D\bar{v})_r = 0 \quad (r = 1, 2, 3) \quad (7)$$

L'angle φ du vecteur \bar{v} et du vecteur tangent \bar{t} au point M est donné par la formule

$$\cos \varphi = \sum_{r=1}^3 \alpha_r \lambda^{(r)}. \quad (8)$$

Supposons que cet angle soit constant et dérivons la relation (8); nous obtenons

$$\sum_{r=1}^3 \alpha_r (D\bar{t})^{(r)} + \sum_{r=1}^3 \lambda^{(r)} (D\bar{v})_r = 0$$

ou, d'après les égalités (7),

$$\sum_{r=1}^3 \alpha_r (D\bar{t})^{(r)} = 0.$$

On déduit de cette relation et des formules (F_1) l'égalité suivante

$$\sum_{r=1}^3 \alpha_r \mu^{(r)} = 0. \quad (9)$$

En dérivant cette relation, on trouve en vertu des formules (F_2)

$$K \sum_{r=1}^3 \alpha_r \lambda^{(r)} + S \sum_{r=1}^3 \alpha_r \nu^{(r)} = 0 \quad (10)$$

Le vecteur \bar{v} étant, d'après (9), normal au vecteur normal principal \bar{n} de la courbe (C), nous pouvons poser

$$\sum_{r=1}^3 \alpha_r \nu^{(r)} = \sin \varphi$$

Les relations (8) et (10) donnent alors

$$\frac{K}{S} = -\operatorname{tg} \varphi$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Si la tangente d'une courbe fait un angle constant avec un vecteur de direction constante tout le long de la courbe, le rapport entre la courbure et la torsion de cette courbe est constant.

Pour démontrer la réciproque, supposons que le rapport de la courbure et de la torsion d'une courbe (C) soit constant et posons

$$\frac{S}{K} = k.$$

On tire des formules (F_1) et (F_3)

$$K (D\bar{b})^{(r)} - S (D\bar{t})^{(r)} = 0. \quad (r = 1, 2, 3)$$

ou, d'après l'hypothèse faite ci-dessus,

$$(D\bar{v})^{(r)} = 0 \quad (r = 1, 2, 3) \quad (11)$$

si l'on pose

$$\bar{v} = \bar{b} - k \bar{t}.$$

Désignons par $\gamma^{(r)}$ ($r = 1, 2, 3$) les composantes contravariantes du vecteur \bar{v} ; on aura

$$\nu^{(r)} - k\lambda^{(r)} = \gamma^{(r)} \quad (r=1, 2, 3).$$

Ajoutons ces égalités après les avoir multipliées par $(D\bar{t})_r$, il viendra

$$\sum_{r=1}^3 \nu^{(r)} (D\bar{t})_r - k \sum_{r=1}^3 \lambda^{(r)} (D\bar{t})_r = \sum_{r=1}^3 \gamma^{(r)} (D\bar{t})_r.$$

En remplaçant dans le premier membre les $(D\bar{t})_r$ par leurs valeurs tirées des formules (F_1) , il vient

$$\sum_{r=1}^3 \gamma^{(r)} (D\bar{t})_r = 0.$$

En tenant compte des relations (11), on en déduit

$$\sum_{r=1}^3 \gamma^{(r)} \lambda_r = \text{const.} \quad (12)$$

En posant

$$\delta^{(r)} = \frac{\gamma^{(r)}}{\sqrt{\sum_{r=1}^3 \gamma_r \gamma^{(r)}}}$$

on peut déterminer un angle φ de manière qu'il soit

$$\sum_{r=1}^3 \delta^{(r)} \lambda_r = \cos \varphi.$$

Il résulte des relations (11) et (12) que le vecteur de composantes $\delta^{(r)}$ est un vecteur unitaire de direction constante le long de la courbe (C) et que son angle avec la tangente est constant.

La réciproque de la proposition précédente est donc établie. Aux courbes, pour lesquelles le rapport $\frac{\delta}{k}$ est constant, nous donnons le nom d'hélices de l'espace (V_3) . Dans le § 5 nous pousserons plus loin l'analogie entre les courbes à torsion nulle (courbes planes) et les hélices de l'espace riemannien et celles de l'espace euclidien.

§ 2.

Considérons maintenant un système (S) formé de trois congruences [1], [2], [3] de courbes de l'espace (V_3) et supposons que dans chaque point de cet espace deux courbes appartenant à deux quelconques de ces congruences sont orthogonales l'une à l'autre. M étant un point arbitraire de (V_3) , désignons par (h) la courbe appartenant à la congruence [h] et partant de ce point, par s_h son arc compté à partir d'un point arbitraire et par \bar{e}_h le vecteur unitaire tangent à (h) au point M et dirigé dans le sens des arcs croissants. Soient γ_{hij} ($h, i, j=1, 2, 3$) les rotations du trièdre (T) formé de vecteurs $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. En désignant par $\lambda_{h/1}, \lambda_{h/2}, \lambda_{h/3}$ les composantes covariantes du vecteur \bar{e}_h , les dérivées covariantes de celles-ci s'expriment en fonction des rotations au moyen des formules suivantes ¹⁾

$$\lambda_{h/rs} = \sum_{ij=1}^3 \gamma_{hij} \lambda_{i/r} \lambda_{j/s} \quad (r, s=1, 2, 3).$$

Si nous désignons par le symbole D_h la dérivation d'un vecteur le long de (h) , nous pourrions écrire les formules suivantes (v. § 1)

$$(D_h \bar{e}_k)^{(r)} = \sum_{i=1}^3 \gamma_{kih} \lambda_i^{(r)} \quad (r=1, 2, 3) \quad (1)$$

Les relations précédentes sont équivalentes au système

$$\gamma_{kih} = \sum_{r=1}^3 \lambda_{i/r} (D_h \bar{e}_k)^{(r)} \quad (i, h, k=1, 2, 3) \quad (2)$$

qui fournit une interprétation géométrique des rotations γ_{hij} . En effet, si nous déplaçons le trièdre (T) le long de l'élément ds_h de la courbe (h) , le vecteur \bar{e}_k subit un accroissement de composantes $ds_h \cdot (D_h \bar{e}_k)^{(r)}$ ($r=1, 2, 3$). Le second membre de la formule (2), multiplié par ds_h , nous donne alors la projection de cet accroissement sur le vecteur \bar{e}_i , autrement dit la grandeur $\gamma_{kih} ds_h$ est la composante, dans la direction du vecteur \bar{e}_i , de la rotation du trièdre (T) pendant un déplacement infinitésimal le long de la

¹⁾ G. Ricci et T. Levi-Civita Méthodes de calcul différentiel absolu et ses applications. Math. Ann. 54 (1901) Trad. polonaise par M. S. Dickstein: Prace matematyczno-fizyczne t. XII (1901).

courbe (h). Il faut remarquer que l'interprétation précédente est contenue dans quelques travaux de G. Ricci qui l'a obtenue en considérant l'espace euclidien tangent à l'espace (V_3) et défini par les vecteurs $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ¹⁾.

A l'aide des formules (1) et (2) de ce § et des formules de Frenet (§ 1) nous calculons facilement la courbure et la torsion de (h); on trouvera

$$K_h^2 = \sum_{i=1}^3 \gamma_{hth}^2 \quad (h=1,2,3) \quad (3)$$

$$S_h = \frac{\partial}{\partial s_h} \arctg \frac{\gamma_{hh+1h}}{\gamma_{hh+2h}} - \gamma_{h+1h+2h}, \text{ si } \gamma_{hh+2h} \neq 0, \quad (h=1,2,3) \quad (4)$$

$$S_h = -\frac{\partial}{\partial s_h} \arctg \frac{\gamma_{hh+2h}}{\gamma_{hh+1h}} - \gamma_{h+1h+2h}, \text{ si } \gamma_{hh+1h} \neq 0$$

Dans les formules ci-dessus et dans toute la Note nous regardons comme égaux deux indices différant de trois. Les composantes $\nu_h^{(r)}$ ($r=1, 2, 3$) du vecteur normal principal de la courbe (h) sont données par les formules

$$K_h \nu_h^{(r)} = \sum_{i=1}^3 \gamma_{hth} \lambda_i^{(r)} \quad (h, r=1, 2, 3). \quad (5)$$

On déduit de là les relations suivantes

$$\cos \varphi_h = \frac{\gamma_{hh+1h}}{K_h}, \quad \sin \varphi_h = \frac{\gamma_{hh+2h}}{K_h} \quad (h=1, 2, 3), \quad (6)$$

où l'on a désigné par φ_h l'angle du vecteur normal principal de la courbe (h) avec le vecteur tangent à la courbe ($h+1$); les formules (4) nous donnent alors

$$S_h = -\frac{\partial \varphi_h}{\partial s_h} - \gamma_{h+1h+2h} \quad (h=1, 2, 3). \quad (7)$$

Les formules (7) sont des généralisations des formules pour la torsion des courbes d'intersection d'un système triple orthogonal de l'espace euclidien. En effet, si les congruences [1], [2], [3] sont normales, nous avons

¹⁾ G. Ricci. Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni, *Memorie Soc. Ital. delle Sc.* (3) 12, 1899.

$\gamma_{h+1h+2h} = 0$ ($h=1, 2, 3$) ¹⁾ et les formules (7) deviennent des relations bien connues de la théorie des systèmes orthogonaux. ²⁾

§ 3.

Soit (K) une congruence quelconque formée de trajectoires orthogonales des courbes (3). Regardons la courbe (k) de cette congruence passant par le point M et désignons respectivement par les symboles $\alpha^{(r)}, \beta^{(r)}, \gamma^{(r)}$ ($r=1, 2, 3$) les composantes contravariantes du vecteur tangent, du vecteur normal principal et du vecteur binormal de (k) au point M . Si l'on appelle ω l'angle de la courbe (k) avec la courbe (1) et $\bar{\omega}$ l'angle du vecteur binormal de (k) avec la courbe (3) au point M , on aura

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \lambda_1^{(i)} \alpha_i &= \cos \omega, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_1^{(i)} \beta_i = -\sin \omega \sin \bar{\omega}, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_1^{(i)} \gamma_i = \sin \omega \cos \bar{\omega}, \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_2^{(i)} \alpha_i &= \sin \omega, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_2^{(i)} \beta_i = \cos \omega \sin \bar{\omega}, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_2^{(i)} \gamma_i = -\cos \omega \cos \bar{\omega}, \quad (8) \\ \sum_{i=1}^3 \lambda_3^{(i)} \alpha_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_3^{(i)} \beta_i = \cos \bar{\omega}, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_3^{(i)} \gamma_i = \sin \bar{\omega}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$D\bar{v} = \cos \omega D_1 \bar{v} + \sin \omega D_2 \bar{v}, \quad (8')$$

en désignant par \bar{v} un vecteur donné comme fonction du point M de l'espace (V_3) et par D la dérivation le long de (k).

En appliquant l'opération D aux formules (8) et en tenant compte de l'identité (8'), on trouve les relations suivantes

$$\frac{\sin \bar{\omega}}{\rho} = \frac{d\omega}{ds} + \gamma_{121} \cos \omega - \gamma_{212} \sin \omega, \quad (9)$$

$$\frac{\cos \bar{\omega}}{\rho} = \gamma_{232} \sin^2 \omega - (\gamma_{312} + \gamma_{321}) \sin \omega \cos \omega + \gamma_{131} \cos^2 \omega, \quad (10)$$

¹⁾ G. Ricci et T. Levi-Civita, l. c. Ch. II § 3.

²⁾ L. Bianchi, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, 2. Aufl., 1910, p. 640.

$$\frac{d\bar{\omega}}{ds} - \frac{1}{\tau} = \gamma_{312} \sin \omega + (\gamma_{232} - \gamma_{131}) \sin \omega \cos \omega - \gamma_{321} \cos^2 \omega. \quad (11)$$

Dans les formules précédentes les grandeurs $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau}$ sont la courbure et la torsion de la courbe (k) et s désigne son arc compté à partir d'un point pris à volonté. Les relations (9) et (10) généralisent les formules de Meusnier et de Bonnet de la théorie des surfaces. Nous appellerons les premiers membres de trois égalités ci dessus resp. courbure géodésique, courbure normale et torsion géodésique de la courbe (k) par rapport à la congruence [3].

Il résulte de la formule (9)

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\cos \bar{\omega}}{\rho} \right) = (\gamma_{232} - \gamma_{131}) \sin 2\omega - (\gamma_{312} + \gamma_{321}) \cos 2\omega,$$

ou, en tenant compte de la relation (11),

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\cos \bar{\omega}}{\rho} \right) + \left[\gamma_{312} - \gamma_{321} - 2 \frac{d\bar{\omega}}{ds} + \frac{2}{\tau} \right] \frac{\sin \bar{\omega}}{\rho} = F(\sin \omega, \cos \omega), \quad (12)$$

F désignant une fonction homogène du troisième degré de $\sin \omega$ et $\cos \omega$. Dans le cas d'une congruence normale de l'espace euclidien la relation (12) devient la formule de Laguerre.¹⁾

Maintenant nous distinguerons certaines congruences (K) qui jouissent des propriétés spéciales. Nous définirons en premier lieu les lignes de courbure de la congruence [3]. Dans la théorie des surfaces on obtient ces courbes, en supposant que la courbure normale reçoit un extrémum

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\cos \bar{\omega}}{\rho} \right) = 0$$

ou que la torsion géodésique est nulle

$$\frac{d\bar{\omega}}{ds} - \frac{1}{\tau} = 0.$$

Dans la théorie des congruences ces deux hypothèses conduisant à deux systèmes de lignes, en général, différents, nous distinguerons dans la suite les lignes de courbure de première et de seconde

espèce. Les équations des lignes de ces deux systèmes peuvent être écrites comme il suit:

$$(\gamma_{232} - \gamma_{131}) \sin 2\omega - (\gamma_{312} + \gamma_{321}) \cos 2\omega = 0 \quad (13)$$

et

$$\gamma_{312} \sin^2 \omega + (\gamma_{232} - \gamma_{131}) \sin \omega \cos \omega - \gamma_{321} \cos^2 \omega = 0. \quad (14)$$

Ces équations mettent bien en évidence que les lignes de courbure de première espèce sont en chaque point orthogonales et que celles de seconde espèce ne jouissent de cette propriété que sous la condition $\gamma_{312} = \gamma_{321}$. Dans ce dernier cas les deux espèces de lignes de courbure se confondent, la congruence [3] étant normale.¹⁾ Ajoutons que les lignes de courbure de deux espèces possèdent en chaque point des bissectrices communes. Si l'on a $\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$, les congruences [1] et [2] appartiennent au système canonique de Ricci de la congruence [3]; l'équation (13) nous montre que, dans ce cas, les congruences [1] et [2] sont formées de lignes de courbure de première espèce.

On voit donc que les congruences de lignes de courbure de première espèce d'une congruence (L) se confondent avec les congruences appartenant au système canonique de (L).

Si la courbure normale des courbes (k) est nulle, nous obtenons les lignes asymptotiques de la congruence [3]. La formule (10) nous permet d'écrire l'équation de ces lignes sous la forme

$$\gamma_{232} \sin^2 \omega - (\gamma_{312} + \gamma_{321}) \sin \omega \cos \omega + \gamma_{131} \cos^2 \omega = 0. \quad (15)$$

Supposons que les congruences [1] et [2] soient formées de lignes de courbure de première espèce; on aura donc $\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$. L'équation (15) des lignes asymptotiques prend alors la forme suivante

$$\operatorname{tg}^2 \omega = - \frac{\gamma_{131}}{\gamma_{232}}, \quad (16)$$

et les rotations γ_{131} et γ_{232} deviennent égales aux courbures normales des lignes de courbure de première espèce; nous leurs donnerons le nom de courbures principales de la congruence [3] et nous accepte-

¹⁾ G. Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, t. II, 2-ème éd. p. 370.

¹⁾ G. Ricci et T. Levi-Civita, t. c., Ch. II § 3.

rons les notations $\gamma_{131} = k_1$, $\gamma_{232} = k_2$. Pour les lignes asymptotiques on a $\bar{\omega} = \frac{\pi}{2}$ et la formule (11) se réduit à la suivante

$$-\frac{1}{\tau} = -\gamma_{321} + \frac{1}{2}(\gamma_{232} - \gamma_{131}) \sin 2\omega.$$

En remplaçant l'angle ω par sa valeur tirée de (16), on trouve

$$\frac{1}{\tau} = \gamma_{321} \pm \sqrt{-k_1 k_2}. \quad (17)$$

Si la congruence [3] est normale, on a $\gamma_{321} = 0$, et la formule précédente nous donne

$$\frac{1}{\tau} = \pm \sqrt{-k_1 k_2}.$$

On voit bien que la relation (17) généralise la formule d'Enneper pour la torsion des lignes asymptotiques d'une surface.¹⁾

Les considérations des §§ 2 et 3 généralisent les notions et les méthodes utilisées par M. R. A. P. Rogers et par G. Darboux dans leur recherche sur les congruences de courbes.²⁾

§ 4.

En poursuivant l'analogie entre la théorie des surfaces et celle des congruences, nous définirons dans ce § les lignes conjuguées par rapport à une congruence donnée. Considérons pour ce but deux congruences (K') et (K'') formées de trajectoires orthogonales des courbes (3). En gardant les notations de deux §§ précédents, nous distinguerons les grandeurs relatives à ces congruences par un ou deux accents. Les composantes des vecteurs unitaires \bar{a}' et \bar{a}'' , tangents respectivement aux courbes (k') et (k'') en un point M , seront donc définies par les formules qui suivent

$$\alpha'_i = \lambda_{1/i} \cos \omega' + \lambda_{2/i} \sin \omega' \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\alpha''_i = \lambda_{1/i} \cos \omega'' + \lambda_{2/i} \sin \omega''.$$

Nous dirons que les courbes (k') sont conjuguées avec les courbes (k'') par rapport à la congruence [3], si dans chaque point le vecteur de composantes $(D'' \bar{a}')_r$ ($r = 1, 2, 3$) est normal à la courbe (3). Nous pouvons donner une autre forme à cette définition. Regardons, en effet, le surface localement géodésique (G) engendrée par les géodésiques normales en M à la courbe (3). On peut dire que la courbe (k') est conjuguée en M avec la courbe (k'') , si l'accroissement ds'' . $D'' \bar{a}'$, que subit le vecteur \bar{a}' pendant un déplacement infinitésimal du point M le long de la courbe (k'') , est situé dans la surface (G) . Si la congruence [3] est une congruence normale de l'espace euclidien, la définition précédente devient équivalente à une des définitions usuelles des courbes conjuguées.

Nous allons établir l'équation des courbes conjuguées. Calculons $D' \bar{a}'$ en nous servant des formules (1), (9), (10), (11); il viendra

$$\begin{aligned} (D'' \bar{a}')_r = & \left[\frac{d(\omega' - \omega'')}{ds''} + \frac{\sin \omega''}{\rho''} \right] (-\lambda_{1,r} \sin \omega' + \lambda_{2,r} \cos \omega') \\ & + \left[\gamma_{131} \cos \omega' \cos \omega'' - \gamma_{312} \cos \omega' \sin \omega'' - \gamma_{321} \sin \omega' \cos \omega'' \right. \\ & \left. + \gamma_{232} \sin \omega' \sin \omega'' \right] \lambda_{3,r} \quad (r = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Il en résulte que les courbes (k') sont conjuguées avec les courbes (k'') , si les angles ω' et ω'' satisfont à l'équation

$$\begin{aligned} \gamma_{131} \cos \omega' \cos \omega'' - \gamma_{312} \cos \omega' \sin \omega'' - \gamma_{321} \sin \omega' \cos \omega'' \\ + \gamma_{232} \sin \omega' \sin \omega'' = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Il est évident qu'en général la relation entre les congruences (K') et (K'') n'est pas involutive, c'est-à-dire que les courbes (k'') ne sont pas conjuguées avec les courbes (k') . Pour que la réciprocité ait lieu, il faut et il suffit que l'on ait $\gamma_{312} = \gamma_{321}$, autrement dit que la congruence [3] soit normale. — Supposons que les courbes (k') soient conjuguées avec les cour-

¹⁾ L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Aufl., p. 120.

²⁾ G. Darboux, l. c., t. II, 2^{ème} éd. Note I. Reginald A. P. Rogers Some differential properties of the orthogonal trajectories of a congruence of curves, Proceedings of the R. Irish Academy vol. 29, sect. A. 1912. V. aussi R. v. Lilienthal Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen.

bes (k'') et qu'elles les coupent sous un angle droit. En posant dans l'équation (18) $\omega'' = \omega' + \frac{\pi}{2}$, il vient

$$\gamma_{312} \sin^2 \omega'' + (\gamma_{232} - \gamma_{131}) \sin \omega'' \cos \omega'' - \gamma_{321} \cos^2 \omega'' = 0.$$

La comparaison de cette relation avec l'équation (14) nous conduit au théorème suivant:

Pour que les courbes de la congruence (K') soient conjuguées avec leurs trajectoires orthogonales, il faut et il suffit que la congruence (K') soit formée de lignes de courbure de seconde espèce.

Déterminons maintenant l'accroissement du vecteur \bar{e}_3 pendant un déplacement infinitésimal le long de la courbe (k''); nous obtenons

$$(D'' \bar{e}_3)^{(r)} ds = \frac{\gamma_{131} \cos \omega'' - \gamma_{312} \sin \omega''}{\sin \omega'} (-\lambda_1^{(r)} \sin \omega' + \lambda_2^{(r)} \cos \omega') ds'' \quad (r = 1, 2, 3).$$

Le vecteur de composantes $-\lambda_1^{(r)} \cos \omega' + \lambda_2^{(r)} \sin \omega'$ ($r = 1, 2, 3$) étant normal au vecteur \bar{a} , on a la proposition suivante:

L'accroissement du vecteur unitaire tangent à la courbe (3) pendant un déplacement infinitésimal du point M le long de la courbe (k'') est situé dans la surface (G) et y est normal à la courbe conjuguée avec la courbe (k'').¹⁾

Si, la congruence [3] étant normale, la congruence (K'') est formée de lignes de courbure des surfaces orthogonales aux courbes (3) le théorème précédent prend la forme:

L'accroissement, que subit le vecteur unitaire normal à une surface pendant un déplacement infinitésimal le long d'une de ses lignes de courbure, est tangent à cette ligne.²⁾

§ 5.

Soit (S) une surface quelconque de l'espace (V_3); nous pouvons construire, d'une infinité de manières, une congruence normale formée de cour-

¹⁾ D. J. STRUIK, I. c., p. 87 on y trouve une propriété analogue des lignes des lignes conjuguées d'une surface.

²⁾ I. d., I. c., p. 86.

bes orthogonales à (S). Il suffit, par exemple, de mener par chaque point de (S) une géodésique normale à cette surface; d'après un théorème de Beltrami¹⁾ ces géodésiques engendreront une congruence normale. Désignons cette congruence par le symbole [3] et par les symboles [1] et [2] deux congruences formant avec [3] un système triple orthogonal, dont nous avons parlé dans le § 2. Les courbes des congruences [1] et [2] seront situées sur les surfaces d'une famille (F) dont (S) fait partie. Considérons un point M de la surface (S); les rotations du trièdre (T) (§ 2), calculées pour le point M , ont une simple signification géométrique: γ_{131} et γ_{232} sont des courbures normales, γ_{121} et γ_{212} des courbures géodésiques et $-\gamma_{321}$ et γ_{312} des torsions géodésiques au point M des courbes appartenant aux congruences [1] et [2] et passant par le point M (§ 3). Acceptons les notations

$$k_1^{(n)} = \gamma_{131}, \quad k_1^{(g)} = \gamma_{121}, \quad S_1 = -\gamma_{321},$$

$$k_2^{(n)} = \gamma_{232}, \quad k_2^{(g)} = \gamma_{212}, \quad S_2 = \gamma_{312}.$$

La congruence [3] étant normale, on a $\gamma_{312} = \gamma_{321}$ (§ 3), d'où il résulte $S_1 + S_2 = 0$. Si l'on suppose que les congruences [1] et [2] soient choisies de manière qu'il soit $\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$, les courbes appartenant à [1] et [2] et situées sur la surface (S) forment le réseau de lignes de courbure et $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}$ deviennent des courbures principales de celle-ci; on a, dans ce cas, $S_1 = S_2 = 0$.

En employant les notations adoptées plus haut, on peut donner aux formules (1) du § 2 la forme suivante

$$\begin{aligned} (D_1 \bar{e}_1)^{(r)} &= k_1^{(g)} \lambda_2^{(r)} + k_1^{(n)} \lambda_3^{(r)}, \quad (D_2 \bar{e}_1)^{(r)} = -k_2^{(g)} \lambda_2^{(r)} - S_2 \lambda_3^{(r)}, \\ (D_1 \bar{e}_2)^{(r)} &= -k_1^{(g)} \lambda_1^{(r)} + S_1 \lambda_3^{(r)}, \quad (D_2 \bar{e}_2)^{(r)} = k_2^{(g)} \lambda_1^{(r)} + k_2^{(n)} \lambda_3^{(r)}, \\ (D_1 \bar{e}_3)^{(r)} &= -k_1^{(n)} \lambda_1^{(r)} - S_1 \lambda_2^{(r)}, \quad (D_2 \bar{e}_3)^{(r)} = S_2 \lambda_1^{(r)} - k_2^{(n)} \lambda_2^{(r)}, \\ &\quad (r = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1)$$

Les formules (1) sont valables pour un point quelconque de la surface (S).

Considérons sur la surface (S) une famille (R) de courbes et désignons par (r) la courbe appartenant à (R) et passant par le point M , par \bar{a} le vecteur unitaire tangent à (r) au point M , par $\alpha^{(r)}$ ($r = 1, 2, 3$) ses composantes contravariantes. On aura

¹⁾ E. Beltrami, Sulla teoria generale dei parametri differenziali, Opere t. II, p. 74.

$$D\bar{e}_3 = \cos \omega D_1 \bar{e}_3 + \sin \omega D_2 \bar{e}_3,$$

si D est le symbole de la différentiation d'un vecteur le long de (r) . Supposons que le vecteur \bar{e}_3 , normal à (S) ait la même direction en tous les points de la surface (S) . On doit donc avoir, d'après la formule ci-dessus,

$$D_1 \bar{e}_3 = D_2 \bar{e}_3 = 0$$

et, par conséquent (formules (1)),

$$k_1^{(n)} = k_2^{(n)} = S_1 = S_2 = 0.$$

Il en résulte que la courbure normale et la torsion géodésique de chaque courbe de (S) sont nulles. Envisageons une géodésique (g) de la surface (S) ; sa courbure géodésique étant nulle par hypothèse et sa courbure normale étant aussi nulle d'après le résultat obtenu plus haut, il s'en suit que la courbure (absolue) de la courbe (g) dans l'espace (V_3) est nulle, c'est-à-dire que la courbe (g) est une géodésique de (V_3) . (S) est donc une surface totalement géodésique de (V_3) . Soit (c) une courbe quelconque de (S) ; sa courbure normale étant nulle on voit que ses vecteurs binormaux sont perpendiculaires à (S) et, par conséquent, qu'ils ont la même direction le long de (c) : cette dernière est donc une courbe à torsion nulle (§ 1). De là résulte la proposition suivante:

Chaque courbe d'une surface totalement géodésique est une courbe à torsion nulle.

Supposons maintenant que l'une des familles de lignes de courbure de (S) soit formées de géodésiques de (V_3) et que les vecteurs tangents de celles-ci soient parallèles dans (V_3) tout le long de chaque des lignes de courbure de l'autre famille. En supposant que ces géodésiques appartiennent à la congruence [1], on aura d'abord

$$k_1^{(n)} = k_1^{(g)} = S_1 = S_2 = 0. \quad (2)$$

La seconde partie de l'hypothèse faite nous donne $D_2 \bar{e}_1 = 0$ ou, en ayant égard aux formules (1),

$$k_2^{(g)} = 0, \quad (3)$$

ce qui montre que la deuxième famille de lignes de courbure est formée de géodésiques de (S) . Nous donnons à la surface (S) ainsi définie le nom de cylindre de l'espace (V_3) . (On démontre aisément que la courbure absolue d'un cylindre est nulle; sa courbure relative étant aussi nulle, on

voit que les espaces à courbure constante différente de zéro ne contiennent pas de cylindres). Construisons sur le cylindre (S) une courbe (c) coupant toutes les géodésiques appartenant à [1] sous un angle constant ω . En désignant par $\alpha^{(r)}$ ($r = 1, 2, 3$) les composantes d'un vecteur unitaire \bar{a} tangent à (c) , on aura

$$D\bar{a} = \cos \omega D_1 \bar{a} + \sin \omega D_2 \bar{a},$$

où D est le symbole de la différentiation d'un vecteur le long de (c) . En ayant égard aux formules (1), (2) et (3), on trouve

$$D\bar{a} = k_2^{(n)} \sin^2 \omega \cdot \bar{e}_3,$$

Le rapprochement de cette égalité aux formules (F_1) du § 1 montre que le vecteur normal principal de (c) est normal à la surface (S) . Cela prouve que cette courbe est une géodésique de (S) . On calcule facilement la courbure (K) et les composantes $\gamma^{(r)}$ du vecteur binormal \bar{b} de (c) et l'on trouve

$$K = \varepsilon k_2^{(n)} \sin^2 \omega, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$\gamma^{(r)} = \varepsilon (-\lambda_1^{(r)} \sin \omega + \lambda_2^{(r)} \cos \omega) \quad (r = 1, 2, 3).$$

En différentiant le vecteur \bar{b} , on obtient

$$(D\bar{b})^{(r)} = \varepsilon k_2^{(n)} \sin \omega \cos \omega \cdot \lambda_3^{(r)} \quad (r = 1, 2, 3).$$

On déduit de là la formule suivante pour la torsion (S) de (c) :

$$S = k_2^{(n)} \sin \omega \cos \omega.$$

Le rapport $\frac{S}{K} = \varepsilon \operatorname{tg} \omega$ étant constant, on voit que (c) est une hélice.

On obtient ainsi la proposition suivante:

Une courbe coupant sous un angle comptant les génératrices géodésiques d'un cylindre est une hélice.

§ 6.

En multipliant par une fonction arbitraire σ^2 les coefficients de l'élément linéaire d'un espace (V_3) , nous obtenons une deuxième forme quadratique caractérisant la métrique d'un autre espace riemannien que nous désignerons par (V_3) . La transformation ainsi définie s'appelle transformation conforme du déplacement riemannien (konforme

Transformation der Riemannschen Übertragung ¹⁾. Au système (S) introduit dans le § 2 correspond dans l'espace (V_3) un système (\bar{S}) composé de congruences $\bar{[1]}$, $\bar{[2]}$, $\bar{[3]}$, le symbole $\bar{[i]}$ ($i=1, 2, 3$) désignant la congruence correspondant à $[i]$. D'une manière générale, nous distinguerons dans la suite les grandeurs qui se rapportent aux systèmes (S) et (\bar{S}), en surlignant les symboles correspondant à (\bar{S}). Nous aurons en particulier

$$\bar{\chi}_k^{(r)} = \frac{1}{\sigma} \chi_k^{(r)} \quad (k, r=1, 2, 3).$$

En tenant compte des identités

$$\frac{\partial f}{\partial S_h} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial S_h} \quad (h=1, 2, 3),$$

nous trouvons les relations suivantes entre les rotations de deux systèmes:

$$\bar{\gamma}_{hkl} = \frac{1}{\sigma} \gamma_{hkl} + \varepsilon_{hl} \frac{\partial}{\partial S_k} - \varepsilon_{kl} \frac{\partial}{\partial S_h} \quad (h, i, j, k, l=1, 2, 3). \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ii} = 1, \varepsilon_{ij} = 0, i \neq j$$

Il en résulte

$$\bar{\gamma}_{123} = \frac{1}{\sigma} \gamma_{123}, \bar{\gamma}_{231} = \frac{1}{\sigma} \gamma_{231}, \bar{\gamma}_{312} = \frac{1}{\sigma} \gamma_{312}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{212} - \bar{\gamma}_{313} &= \frac{1}{\sigma} (\gamma_{212} - \gamma_{313}), \bar{\gamma}_{323} - \bar{\gamma}_{121} = \frac{1}{\sigma} (\gamma_{323} - \gamma_{121}), \bar{\gamma}_{131} - \bar{\gamma}_{232} \\ &= \frac{1}{\sigma} (\gamma_{131} - \gamma_{232}). \end{aligned} \quad (3)$$

Supposons que les congruences $[1]$ et $[2]$ soient formées de lignes de courbure de première espèce de la congruence $[3]$. On a donc $\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$; les formules (2) montrent que la relation précédente entraîne l'égalité $\bar{\gamma}_{312} + \bar{\gamma}_{321} = 0$ ce qui prouve que les congruences $\bar{[1]}$ et $\bar{[3]}$ sont formées de lignes de courbure de première espèce de la congruence $\bar{[3]}$.

Les équations des lignes de courbure de seconde espèce des congruences $\bar{[3]}$ et $[3]$ étant de la forme (§ 3)

$$\gamma_{312} \sin^2 \omega + (\gamma_{232} - \gamma_{131}) \sin \omega \cos \omega - \gamma_{321} \cos^2 \omega = 0,$$

$$\bar{\gamma}_{312} \sin^2 \omega + (\bar{\gamma}_{232} - \bar{\gamma}_{131}) \sin \omega \cos \omega - \bar{\gamma}_{321} \cos^2 \omega = 0,$$

nous voyons bien, en tenant compte des relations (2) et (3), quelles sont équivalentes l'une à l'autre. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

La transformation conforme du déplacement riemannien conserve les lignes de courbure d'une congruence.

Nous allons démontrer une seconde propriété du déplacement conforme:

Si les courbures principales d'une congruence sont égales, la transformation conforme laisse invariante cette propriété.

Supposons que les congruences $[1]$ et $[2]$ soient formées de lignes de courbure de première espèce de la congruence $[3]$, on aura donc

$$\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0.$$

D'après la définition introduite au § 3 les courbures principales de la congruence $[3]$ sont alors données par les formules $k_1 = \gamma_{131}$ $k_2 = \gamma_{232}$. Notre hypothèse entraîne donc l'égalité suivante

$$\gamma_{131} - \gamma_{232} = 0.$$

Il résulte immédiatement des formules (2) et (3) que les égalités (4) et (5) ont pour conséquence les suivantes:

$$\bar{\gamma}_{312} + \bar{\gamma}_{321} = 0, \bar{\gamma}_{131} - \bar{\gamma}_{232} = 0,$$

ce qui démontre proposition.

§ 7.

Si dans l'espace euclidien les droites d'une congruence sont normales aux surfaces d'une famille, cette dernière est une famille de Lamé c'est — à dire — elle fait parti d'un système triple orthogonal. D'après un théorème de Ribaucour ¹⁾ les congruences normales de cercles jouissent d'une propriété analogue.

¹⁾ L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2 Aufl., 1910, p. 359.

²⁾ G. Ricci, Direzioni e invarianti principali di una varietà qualunque. Atti R. Istituto Veneto 1904.

¹⁾ J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, 1924, p. 168.

Dans un espace riemannien ces propriétés cessent, en général, d'être vraies. Néanmoins on peut les démontrer dans un cas particulier. Formons pour ce but un système d'invariants ω_{ik} définis au moyen des formules

$$\omega_{ik} = \frac{\partial \gamma_{i+1, i+2, k+1}}{\partial s_{k+2}} - \frac{\partial \gamma_{i+1, i+2, k+2}}{\partial s_{k+1}} + \sum_{j=1}^3 \left\{ \gamma_{i+1, i+2, j} (\gamma_{j, k+1, k+2} - \gamma_{j, k+2, k+1}) \right. \\ \left. + \gamma_{j, i+1, k+2} \gamma_{j, k+2, k+1} - \gamma_{j, i+1, k+1} \gamma_{j, i+2, k+2} \right\} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Si les congruences [1], [2], [3] sont choisies de manière qu'il soit $\omega_{ik} = 0$ ($i \neq k$), elles sont des courbes principales de (V_3) et les quantités $\omega_i = \omega_{ii}$ sont des courbures principales de cet espace²⁾. Au trièdre (T) défini dans le § 2 nous donnons dans ce cas le nom du trièdre principal au point M.

Ceci posé, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Si une congruence normale de géodésiques et les congruences de ses lignes de courbure sont formées de courbes principales de l'espace (V_3) , les surfaces orthogonales aux géodésiques font parti d'un système triple orthogonal.

Supposons, en effet, que la congruence [3] soit formée de géodésiques; on a, d'après la formule (3) du § 2, $\gamma_{313} = \gamma_{323} = 0$. Si la congruence [3] est normale et si les congruences [1] et [2] sont composées de ses lignes de courbure, nous avons aussi les relations $\gamma_{312} = \gamma_{321} = 0$ (v. § 3). Les congruences [1], [2], [3] étant, par hypothèse, des congruences principales de (V_3) , on a $\omega_{12} = 0$. En égard aux égalités précédentes et aux formules (1), cette relation devient

$$(\gamma_{131} - \gamma_{232}) \gamma_{123} = 0.$$

Si les courbures principales γ_{131} , γ_{232} de la congruence [3] ne sont pas égales, la relation précédente entraîne l'égalité $\gamma_{123} = 0$. Les rotations à trois indices différents étant nulles, les congruences [1], [2], [3] sont normales,¹⁾ ce qu'il fallait démontrer. Ce raisonnement tombe en défaut, si l'on a $\gamma_{131} = \gamma_{232}$. Or, nous avons démontré dans un autre mémoire²⁾ qu'une

¹⁾ G. Ricci et T. Levi-Civita, I. c., Ch. II, § 3.

²⁾ „Sur une classe d'espaces riemanniens à trois dimensions“. Ce mémoire paraîtra prochainement dans les „Annales de la Société Polonaise de Mathématiques“.

famille de surfaces à courbures principales égales est une famille de Lamé. Le théorème à démontrer est donc vrai même dans le cas $\gamma_{131} = \gamma_{232}$.

Supposons maintenant que la congruence [3] soit une congruence de cercles et que les congruences [1] et [2] soient formées de lignes de courbure de celle-ci; nous avons donc en premier lieu les relations $\gamma_{312} = \gamma_{321} = 0$. Les courbes de la congruence [3] étant des cercles, leur courbure K_3 est constante et leur torsion S_3 est nulle. Les formules (3) et (4) du § 2 donnent alors

$$\gamma_{313} \frac{\partial \gamma_{213}}{\partial s_3} + \gamma_{323} \frac{\partial \gamma_{323}}{\partial s_3} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial s_3} \arctg \frac{\gamma_{313}}{\gamma_{323}} = \gamma_{123}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial \gamma_{213}}{\partial s_3} = \gamma_{123} \gamma_{323}, \quad \frac{\partial \gamma_{323}}{\partial s_3} = -\gamma_{123} \gamma_{313}, \quad (2)$$

Les invariants ω_{ik} satisfaisant aux identités $\omega_{ik} = \omega_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3; i \neq k$), on a, en particulier, $\omega_{12} = \omega_{21}$ ou

$$\frac{\partial \gamma_{323}}{\partial s_1} + \gamma_{123} \gamma_{313} = \frac{\partial \gamma_{313}}{\partial s_2} + \gamma_{212} \gamma_{323}.$$

En différenciant cette relation par rapport à s_3 et en tenant compte des formules (2) et des identités¹⁾

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_k \partial s_l} - \frac{\partial^2 f}{\partial s_l \partial s_k} = \sum_{j=1}^3 (\gamma_{jkl} - \gamma_{jlk}) \frac{\partial f}{\partial s_j} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

on obtient la relation

$$(\gamma_{322} - \gamma_{131}) \omega_{12} + \gamma_{323} \omega_{23} - \gamma_{313} \omega_{31} = (\gamma_{131} - \gamma_{232})^2 \gamma_{123}.$$

Si l'on suppose que les congruences considérées soient les congruences principales de (V_3) , on a $\omega_{12} = \omega_{23} = \omega_{31} = 0$; la relation précédente donne alors $(\gamma_{131} - \gamma_{232})^2 \gamma_{123} = 0$. Si les rotations γ_{131} , γ_{232} ne sont pas égales, la relation précédente donne $\gamma_{123} = 0$, ce qui permet d'énoncer le théorème suivant:

¹⁾ G. Ricci et T. Levi-Civita, I. c., Ch. II, § 2.

Si une congruence normale de cercles et les congruences de lignes de courbure de celle-ci sont formées de courbes principales d'un (V_3) , les surfaces orthogonales aux cercles appartiennent à un système triple orthogonal.

D'après la remarque fait plut haut (p. 23) ce théorème est vrai même dnns le cas $\gamma_{131} = \gamma_{232}$.

Toute courbe d'un espace riemannien à courbure constante étant une courbe principale, les deux théorèmes précédents ont pour conséquence la proposition suivante:

Dans un espace riemannien à courbure constante les surfaces orthogonales aux courbes d'une congruence de géodésiques ou de cercles forment une famille de Lamé.

=====

STRESZCZENIE.

Pojęcie równoległości, stworzone w r. 1917 przez p. Levi-Civita, umożliwiło — między innymi — wyprowadzenie wzorów Freneta dla krzywej przestrzeni Riemanna oraz określenie jej krzywizn. Dzięki temu w przestrzeni Riemanna o trzech wymiarach można wyróżnić krzywe analogiczne do krzywych płaskich i śrubowych przestrzeni euklidesowej. Własnościami tych krzywych poświęcony jest § 1 niniejszego artykułu. Treścią następnych §§ (2 do 5) jest teoria krzywizny kongruencji krzywych, rozwinięta przy pomocy metody G. Darboux. Zastosowanie tej metody do przestrzeni Riemanna pozwala określić w prosty sposób krzywe krzywiznowe, asymptotyczne i sprzężone dowolnej kongruencji oraz uzasadnić ich najważniejsze własności analogiczne do własności krzywych na powierzchni. Ostatni z wymienionych §§ zawiera także uzupełnienie teorii krzywych płaskich i śrubowych oraz, w związku z tem, określenie pewnej kategorii powierzchni analogicznych do walców przestrzeni zwykłej. Następny § zawiera kilka własności kongruencji, które nie ulegają zmianie podczas podobnego przekształcenia metryki. Ostatni wreszcie § poświęcony jest normalnym kongruencjom geodezyjnych i kół przestrzeni Riemanna. Wiadomo, że w przestrzeni euklidesowej rodzina powierzchni, której ortogonalne trajektorje są prostymi lub kołami, jest rodziną Lamé'go, t. zn. należy do potrójnego układu ortogonalnego. Okazuje się, że twierdzenie to zachowuje swą ważność w każdej przestrzeni o stałej krzywiznie, w innych natomiast przestrzeniach może być nieprawdziwe. Można atoli wykazać jego prawdziwość, jeżeli kongruencja kół i kongruencje krzywiznowych powierzchni, dla których kręta są ortogonalnymi trajektorjami, są kongruencjami głównymi przestrzeni.

=====