Bemerkungen über dimensionelle Feinstruktur und Produktsatz

(Uwagi o drobnobudowie wymiarowej i twierdzeniu o iloczynie)

von

Karl Menger (Wien)

1. Die untere Hälfte des Produktsatzes und ihre Verschärfung.

Als Produktsatz bezeichnet man in der Dimensionstheorie [1]) die Aussage, daß das Produkt eines m-dimensionalen und eines n-dimensionalen Raumes $(m+n)$-dimensional sei. Bewiesen ist bisher lediglich folgende

Untere Hälfte des Produktsatzes. *Das Produkt eines höchstens m-dimensionalen und eines höchstens n-dimensionalen separabeln Raumes ist höchstens $(m+n)$-dimensional* $(m \geqq 0,\ n \geqq 0)$.

Man könnte zunächst vermuten, daß diese untere Hälfte sich verschärfen lasse zu folgender Aussage: Besitzt der Raum M im Punkte p eine Dimension $\leqq k$ und besitzt der Raum N im Punkte q eine Dimension $\leqq l$, so besitzt der Raum $M \times N$ im Punkte $p \times q$ eine Dimension $\leqq k+l$. Wir werden weiter unten diese Verschärfung für den Fall $k = l = 0$ tatsächlich beweisen. Ist aber von den beiden Zahlen k und l mindestens eine > 0, so ist diese Verschärfung, selbst wenn beide Räume M und N kompakt sind, im allgemeinen *unrichtig*, wie folgendes Beispiel zeigt: Man wähle für M die Teilmenge des R_1 bestehend aus dem Punkte 0 und den Punkten der Intervalle $\left[\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots$ ad inf.). Dieser Raum M ist im Punkte 0 nulldimensional, in jedem anderen Punkte eindimensional. Wir setzen ferner $M = N$.

---

1) Vgl. mein Buch „Dimensionstheorie", bei Teubner 1928.

Der Raum $M \times N$ ist als Teilmenge der Ebene darstellbar, nämlich als Summe

der Rechtecke $\frac{1}{2n-1} \leqq x \leqq \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{2m-1} \leqq y \leqq \frac{1}{2m}$ $(n, m = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.})$

der Strecken $x = 0$, $\frac{1}{2m-1} \leqq y \leqq \frac{1}{2m}$ und $\frac{1}{2n-1} \leqq x \leqq \frac{1}{2n}$, $y = 0$, $(m, n = 1, 2, \ldots \text{ ad inf.})$

des Punktes $x = 0$, $y = 0$.

Diese Menge $M \times N$ ist offenbar im Punkte $0, 0$ nulldimensional, in jedem anderen Punkte aber, wie man leicht bestätigt, zweidimensional. Betrachten wir nun etwa den Punkt 0 in M und den Punkt 1 in N, so sehen wir: M ist in 0 nulldimensional, N ist in 1 eindimensional, $M \times N$ ist im Punkte $0, 1$ zweidimensional.

Indes gestattet die untere Hälfte des Produktsatzes tatsächlich eine Verschärfung, welche sich auf die Dimension in den einzelnen Punkten bezieht und welche, da sie im Folgenden Verwendung findet, hier bewiesen werden möge, nämlich folgende

Verschärfung der unteren Hälfte des Produktsatzes. *Besitzt der höchstens m-dimensionale separable Raum M im Punkte p eine Dimension $\leqq k$ und besitzt der höchstens n-dimensionale separable Raum N im Punkte q eine Dimension $\leqq l$, so besitzt der Raum $M \times N$ im Punkte $p \times q$ eine Dimension*

$$\begin{cases} \leqq \text{Max.}\ (m+l,\ n+k), & \text{falls } k > 0 \text{ und } l > 0 \\ \leqq m + l, & \text{falls } k = 0 \\ \leqq n + k, & \text{falls } l = 0 \\ 0, & \text{falls } k = l = 0. \end{cases}$$

Wir bemerken zunächst, daß diese Aussage tatsächlich die untere Hälfte des Produktsatzes als Teilaussage enthält. Wenn nämlich $m \geqq 0$ und $n \geqq 0$, so gilt für jeden Punkt p des höchstens m-dimensionalen Raumes M die Beziehung $k \leqq m$ und für jeden Punkt des höchstens n-dimensionalen Raumes N ist $l \leqq n$. Also ist der verschärften Aussage zufolge der Raum $M \times N$ in jedem Punkte $p \times q$ höchstens $(m+n)$-dimensional, d. h. es ist $M \times N$ höchstens $(m+n)$-dimensional, wie die untere Hälfte des Produktsatzes behauptet.

Die untere Hälfte des Produktsatzes kann noch dadurch ergänzt werden, daß, *wenn von den beiden Zahlen m und n mindestens eine $= -1$ ist, der Raum $M \times N$ (-1)-dimensional ist.* (In der Tat, das Produkt des leeren Raumes mit irgend einem Raum ist leer). Diese Aussage machen wir zum Ausgangspunkt einer vollständigen Induktion.

Wir nehmen an, es sei die Verschärfung bereits für je zwei Räume bewiesen, für welche die Summe der Dimension $< m + n$ ist. Auf Grund der

eben gemachten Feststellung enthält diese induktive Annahme auch die untere Hälfte des Produktsatzes für je zwei Räume, für welche die Summe der Dimensionen $< m + n$ ist. Wir haben nun auf Grund der induktiven Annahme die verschärfte untere Hälfte des Produktsatzes für den Fall m, n zu beweisen.

Wir setzen also voraus, die Dimension von M sei $\leqq m$ und im Punkte p $\leqq k$, und die Dimension von N sei $\leqq n$ und im Punkte $q \leqq l$. Wir legen ferner eine Umgebung W des Punktes $p \times q$ vor und haben dann zum Beweise der verschärften Behauptung zu zeigen: Der Punkt $p \times q$ besitzt eine Umgebung $W' \subset W$, so daß für die Begrenzung $B(W')$ von W' die Beziehung gilt

$$\dim B(W') \begin{cases} \leqq \text{Max.}\,(m+l-1,\ n+k-1), & \text{falls } k > 0,\ l > 0 \\ \leqq m + l - 1, & \text{falls } k = 0 \\ \leqq n + k - 1, & \text{falls } l = 0 \\ = -1, & \text{falls } k = l = 0. \end{cases}$$

Da W eine Umgebung des Punktes $p \times q$ ist, existiert eine Umgebung U des Punktes p im Raume M und eine Umgebung V des Punktes q im Raume N, so daß $U \times V \subset W$ gilt. Da M im Punkte p höchstens m-dimensional und N im Punkte q höchstens n-dimensional ist, so besitzt p eine Umgebung $U' \subset U$, deren Begrenzung $B(U')$ höchstens $(k-1)$-dimensional ist und es besitzt q eine Umgebung $V' \subset V$, deren Begrenzung $B(V')$ höchstens $(l-1)$-dimensional ist. Betrachten wir dann die Menge $U' \times V'$, welche wir mit W' bezeichnen wollen. W' ist eine Umgebung des Punktes $p \times q$ im Raume $M \times N$ und $\subset U \times V$, also $\subset W$. Für ihre Begrenzung $B(W')$ gilt

$$B(W') = \overline{U}' \times B(V') + B(U') \times \overline{V}',$$

wo $\overline{U}'$ und $\overline{V}'$ die abgeschlossenen Hüllen von U', bzw. V' bezeichnen. Jeder der beiden Summanden von $B(W')$ ist Produkt zweier abgeschlossener Mengen der Faktorräume, also eine abgeschlossene Menge des Raumes $M \times N$. Die Dimension von $B(W')$ ist demnach gleich der Dimension des höherdimensionalen Summanden. Da $\overline{U}'$ höchstens m-dimensional und $B(V')$ höchstens $(n-1)$-dimensional ist, besitzt auf Grund unserer induktiven Annahme der erste Summand eine Dimension $\leqq m + l - 1$, der zweite eine Dimension $\leqq n + k - 1$. Also ist die Dimension von $B(W') \leqq \text{Max.}\,(m+l-1,\ n+k-1)$, wie behauptet. Damit ist die Verschärfung der unteren Hälfte des Produkt satzes bewiesen.

Dieselbe enthält insbesondre die Aussage, daß das Produkt eines im Punkte p nulldimensionalen Raumes und eines im Punkte q nulldimensionalen Raumes im Punkte $p \times q$ nulldimensional ist. Daraus ergibt sich durch vollständige Induktion als

Korollar 1. *Ein Produkt von endlichvielen Räumen ist nulldimensional in jedem Punkte, für welchen in jedem Faktorpunkt der entsprechende Faktorraum nulldimensional ist.*

Eine weitere Bemerkung ergibt sich, wenn wir annehmen, daß $k \leqq m-1$ und $l \leqq n-1$ ist. Der verschärften unteren Hälfte des Produktsatzes zufolge ist dann nämlich der Raum $M \times N$ im Punkte $p \times q$ höchstens $(m+n-1)$-dimensional. Es gilt also

Korollar 2. *Das Produkt eines m-dimensionalen und eines n-dimensionalen separabeln Raumes besitzt die Dimension $m+n$ höchstens in solchen Punkten, für welche in mindestens einem Faktorpunkt der entsprechende Faktorraum die größtmögliche Dimension besitzt.*

2. Der Produktsatz für rationaldimensionale Räume.

Ein endlichdimensionaler Raum heißt *rationaldimensional*, wenn seine Dimension durch Tilgung einer abzählbaren Teilmenge verringert werden kann. Da die Dimension eines endlichdimensionalen Raumes durch Tilgung einer nulldimensionalen Menge höchstens um 1 vermindert werden kann, so heißt dieser Definition zufolge rational n-dimensional ein n-dimensionaler Raum, welcher Summe einer $(n-1)$-dimensionalen und einer abzählbaren Menge ist. Ein Raum, welcher entweder rational n-dimensional oder höchstens $(n-1)$-dimensional ist, heiße *höchstens rational n-dimensional.* Gleichbedeutend ist, wie in der Dimensionstheorie gezeigt wird, folgende rekursive Definition: Ein Raum heißt höchstens rational n-dimensional, wenn jeder Punkt in beliebig kleinen Umgebungen mit höchstens rational $(n-1)$-dimensionalen Begrenzungen enthalten ist. Rational nulldimensional sind die abzählbaren Mengen und nur diese. Wir beweisen nun folgenden

Produktsatz für rationaldimensionale Räume. *Das Produkt eines höchstens rational m-dimensionalen und eines höchstens rational n-dimensionalen separabeln Raumes ist höchstens rational $(n+m)$-dimensional.*

Da das Produkt zweier abzählbarer Räume abzählbar ist, so gilt der Satz im Falle $m=n=0$. Wir machen die induktive Annahme, der Satz sei bewiesen für je zwei rationaldimensionale Räume, für welche die Summe der Dimensionen $< m+n$ ist, und beweisen auf Grund dieser Annahme die im Produktsatz formulierte Behauptung.

Es sei p ein Punkt des höchstens rational m-dimensionalen Raumes M und q ein Punkt des höchstens rational n-dimensionalen Raumes N. Es sei ferner W eine vorgelegte Umgebung des Produktpunktes $p \times q$. Wir haben die Existenz einer Umgebung $W' \subset W$ von $p \times q$ zu erweisen, deren Begrenzung höchstens rational $(m+n-1)$-dimensional ist. Es existiert eine Umgebung U von p mit höchstens rational $(m-1)$-dimensionaler Begrenzung und eine Umgebung V von q mit höchstens rational $(n-1)$-dimensionaler Begrenzung, so daß $U \times V \subset W$ gilt. Setzen wir $U \times V = W'$ so ist W' eine Umgebung von $p \times q$, die $\subset W$ ist und für deren Begrenzung die Beziehung gilt $B(W') = B(U) \times \bar{V} + \bar{U} \times B(V)$. Beide Summanden von $B(W')$ sind abgeschlossene Mengen des Raumes $M \times N$. Auf Grund der induktiven Annahme sind beide höchstens rational $(m+n-1)$-dimensional. Also ist auch ihre Summe $B(W')$ höchstens rational $(m+n-1)$-dimensional und W' erfüllt daher unsere Forderung, womit der Produktsatz für rationaldimensionale Räume bewiesen ist.

Wir bemerken noch: Wenn von einem m-dimensionalen und einem n-dimensionalen Raum *bloß einer* rationaldimensional ist, so ist das Produkt *nicht* notwendig höchstens rational $(m+n)$-dimensional. Besteht z. B. der Raum M aus einem einzigen Punkt und ist N ein irrational n-dimensionaler Raum, so ist der Raum $M \times N$ Produkt eines rational nulldimensionalen und eines n-dimensionalen Raumes, aber mit N homöomorph und daher irrational n-dimensional. Ebenso ist das Produkt des rational eindimensionalen R_1 mit dem nulldimensionalen Cantor'schen Diskontinuum irrational eindimensional.

Hingegen läßt der Produktsatz für rationaldimensionale Räume eine Verschärfung zu analog jener der unteren Hälfte des Produktsatzes, welche man auch ganz analog beweisen kann: Ist der höchstens rational m-dimensionale Raum M im Punkte p höchstens rational k-dimensional und der höchstens rational m-dimensionale Raum M im Punkte q höchstens rational l-dimensional, so ist der Raum $M \times N$ im Punkte $p \times q$ höchstens rationaldimensional von der Dimension $\mathrm{Max.}(m+k,\ n+l)$.

3. Der Produktsatz für schwachdimensionale Räume.

Ein endlichdimensionaler Raum, dessen Dimension größer ist als die Dimension der Menge aller Punkte höchster Dimension des Raumes, heißt *schwachdimensional.* Auf Grund des zweiten Fundamentaltheorems über dimensionelle Raumstruktur kann die Dimension eines endlichdimensionalen Raumes die Dimension der Menge aller Punkte höchster Dimension höchstens um 1 übersteigen. Ein n-dimensionaler Raum heißt demgemäß *schwach n-dimensional*, wenn die Menge aller Punkte, in denen der Raum n-dimensional ist, die Dimension $n-1$ besitzt. Ein Raum, welcher bloß in den Punkten einer höchstens $(n-1)$-dimensionalen Menge n-dimensional ist, heiße *höchstens schwach n-dimensional.* So heißt also ein Raum, welcher schwach n-dimensional oder höchstens $(n-1)$-dimensional ist. Auch für schwachdimensionale Räume beweisen wir nun einen Produktsatz, welcher aber etwas tiefer liegt, als die untere Hälfte des Produktsatzes und der Produktsatz für rationaldimensionale Räume.

Produktsatz für schwachdimensionale Räume. *Das Produkt eines höchstens schwach m-dimensionalen und eines höchstens schwach n-dimensionalen separabeln Raumes ist höchstens schwach $(m+n)$-dimensional.*

Zum Beweise sei ein höchstens schwach m-dimensionaler Raum M und ein höchstens schwach n-dimensionaler Raum N gegeben. Es sei M' die höchstens $(m-1)$-dimensionale F_σ-Menge aller Punkte, in denen M m-dimensional ist und N' die höchstens $(n-1)$-dimensionale F_σ-Menge aller Punkte, in denen der Raum N n-dimensional ist. Wir setzen ferner $M''=M-M'$ und $N''=N-N'$. Wir haben zu zeigen, daß der Raum $M\times N$ höchstens schwach $(m+n)$-dimensional, d. h. bloß in den Punkten einer höchstens $(m+n-1)$-dimensionalen Menge $(m+n)$-dimensional ist.

Es gilt

$$M\times N=M''\times N''+M''\times N'+M'\times N''+M'\times N'.$$

Unsere Behauptung ist also offenbar bewiesen, wenn wir zeigen:

1) In jedem Punkte der Menge $M''\times N''$ ist der Raum $M\times N$ höchstens $m+n-1)$-dimensional.

2) Die Menge $M\times N-M''\times N''$ ist höchstens $(m+n-1)$-dimensional.

In jedem Punkt von M'' ist M höchstens $(m-1)$-dimensional und in jedem Punkt von N'' ist N höchstens $(n-1)$-dimensional. Also ist Korollar 2 der verschärften unteren Hälfte des Produktsatzes zufolge in jedem Punkte der Menge $M''\times N''$ der Raum $M\times N$ höchstens $(m+n-1)$-dimensional, womit Behauptung 1) bewiesen ist.

Es erübrigt 2) zu zeigen, daß die Menge $D=M\times N-M''\times N''=$ $=M''+N'+M'\times N''+M'\times N'$ höchstens $(m+n-1)$-dimensional ist. Nun gilt offenbar $D=M\times N'+M'\times N$. Die Mengen M' und N' sind F_σ-Mengen in M bzw. N, d. h. es gilt $M'=\sum_{k=1}^{\infty}M_k$ und $N'=\sum_{k=1}^{\infty}N_k$, wo für $k=1,2\ldots$ ad inf. alle Mengen M_k abgeschlossen in M und (als Teilmengen von M') höchstens $(m-1)$-dimensional sind und alle Mengen N_k abgeschlossen in N und höchstens $(n-1)$-dimensional sind. Es gilt also

$$D=M\times\sum_{k=1}^{\infty}N_k+\sum_{k=1}^{\infty}M_k\times N=\sum_{k=1}^{\infty}(M\times N_k+M_k\times N).$$

Jeder der Summanden $M\times N_k$ und $M_k\times N$ ist nach der unteren Hälfte des Produktsatzes höchstens $(m+n-1)$-dimensional. Überdies ist jede dieser Mengen (da die Mengen M_k und N_k abgeschlossen in M bzw. N sind), im Raume

$M\times N$ abgeschlossen. Also ist D Summe von abzählbarvielen höchstens $(m+n)$-dimensionalen abgeschlossenen Mengen des separabeln Raumes $M\times N$ und daher nach dem Summensatz höchstens $(m+n-1)$-dimensional, womit die Behauptung 2) und damit der Produktsatz für schwachdimensionale Räume bewiesen ist.

4. Konsequenzen der oberen Hälfte des Produktsatzes.

Bisher unbewiesen ist folgende

Obere Hälfte des Produktsatzes. *Das Produkt eines mindestens m-dimensionalen und eines mindestens n-dimensionalen separabeln Raumes ist mindestens $(m+n)$-dimensional.*

Zunächst ist klar, daß sich aus dieser Aussage mit Rücksicht auf die Produktsätze für rationaldimensionale und schwachdimensionale Räume folgern läßt:

Das Produkt eines rational (schwach) m-dimensionalen und eines rational (schwach) n-dimensionalen separabeln Raumes ist rational (schwach) $(m+n)$-dimensional.

Bezeichnen wir als *mindestens irrational n-dimensional* einen Raum, der irrational n-dimensional oder mindestens $(n+1)$-dimensional ist, also einen Raum, der nicht höchstens rational n-dimensional ist, — so hat die obere Hälfte des Produktsatzes, wie wir nun zeigen wollen, zur Konsequenz folgenden

Produktsatz für irrationaldimensionale Räume. *Ist von einem m-dimensionalen und einem n-dimensionalen separabeln Raum mindestens einer irrationaldimensional, so ist das Produkt mindestens irrational $(m+n)$-dimensional.*

Sei etwa M irrational m-dimensional und N n-dimensional. Wir machen die Annahme, $M\times N$ sei rational $(m+n)$-dimensional und leiten aus dieser Annahme mit Hilfe der oberen Hälfte des Produktsatzes einen Widerspruch her. Die Annahme besagt, daß $M\times N=P+A$ gilt, wo A abzählbar und P $(m+n-1)$-dimensional ist. Wir bezeichnen die Projektion der Menge A in den Raum M (d. h. die Menge aller Punkte von M, die als erste Koordinate eines Punktes der Menge A auftreten) mit A', die Projektion von A in N mit A''. Dann gilt

$$[(M-A')+A']\times[(N-A'')+A'']=P+A.$$

Die linke Seite können wir in den Form schreiben

$$(M-A')\times N+A'\times(N-A'')+A'\times A''.$$

Da $A\subset A'\times A''$ gilt, ist $(M-A')\times N+A'\times(N-A'')\subset P$. Und erst recht gilt $(M-A')\times N\subset P$. Da M als irrational m-dimensional vorausgesetzt und A' abzählbar ist, so ist die Menge $M-A'$ m-dimensional. Die Menge N ist

n-dimensional, also ist $(M-A')\times N$ nach der oberen Hälfte des Produktsatzes $(m+n)$-dimensional. Die Menge P dagegen, welche $\supset(M-A')\times N$ st, ist $(m+n-1)$-dimensional. Damit ist aus der Annahme, $M\times N$ sei rational $(m+n)$-dimensional, ein Widerspruch hergeleitet und der Produktsatz für irrationaldimensionale Räume auf die obere Hälfte des Produktsatzes zurückgeführt.

Es sei hier noch eine *methodische Bemerkung* hinzugefügt. Es ist, wenn zum Beweise eines Theorems über separable Räume der Summensatz oder der Produktsatz herangezogen werden, nicht ohne Interesse zu konstatieren, ob die Aussage des betreffenden Theorems speziell für kompakte Räume in derselben Weise mit bloßer Heranziehung des Summen- oder Produktsatzes für kompakte Räume bewiesen werden kann oder nicht. Die obige Zurückführung des Produktsatzes besitzt (wie alle mit Zerspaltungen operierenden Beweise) diese Eigenschaft nicht. Auch wenn man bloß den Produktsatz für irrationaldimensionale kompakte Räume in der obigen Art beweisen will, muß man die obere Hälfte des Produktsatzes für beliebige separable Räume heranziehen. —

Sobald die obere Hälfte des Produktsatzes bewiesen sein wird, wird die noch schwierigere Frage zu untersuchen sein, in welcher Weise sich diese Aussage hinsichtlich der Dimension in den einzelnen Punkten verschärfen läßt. Trivial ist diesbezüglich bloß folgende Aussage: *Ist der Raum M im Punkte p mindestens k-dimensional und der Raum N im Punkte q mindestens l-dimensional, so besitzt der Raum $M\times N$ im Punkte $p\times q$ eine Dimension $\geqq Max.(k,l)$.* Denn der Raum $M\times N$ enthält sowohl die den Punkt $p\times q$ enthaltende mit M homöomorphe Menge $M\times q$, als auch die den Punkt $p\times q$ enthaltende mit N homöomorphe Menge $p\times N$ als Teilmenge.

Aus dieser einfachen Bemerkung ergibt sich, daß ein Produkt von Räumen nulldimensional bloß in solchen Punkten sein kann, in deren sämtlichen Koordinatenpunkten die entsprechenden Faktorräume nulldimensional sind. Dies ergibt zusammen mit Korollar 2 der verschärften unteren Hälfte des Produktsatzes die

Bemerkung. *Damit ein Produktraum in einem Punkte p nulldimensional sei, ist notwendig und hinreichend, daß sämtliche Faktorräume in den Koordinatenpunkten von p nulldimensional sind.*

Eine Verschärfung der oberen Hälfte des Produktsatzes wäre das Theorem: Ist der Raum M im Punkte p mindestens m-dimensional und der Raum N im Punkte q mindestens l-dimensional, dann ist der Raum $M\times N$ im Punkte $p\times q$ mindestens $(k+l)$-dimensional. Es ist klar, daß aus diesem Theorem sich ergeben würde folgender

Produktsatz für starkdimensionale Räume. *Das Produkt eines stark m-dimensionalen und eines stark n-dimensionalen separabeln Raumes ist stark $(m+n)$-dimensional.*

5. Über den ersten Dimensionsteil schwach n-dimensionaler Räume.

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der feineren Struktur der schwach n-dimensionalen Räume. Wir hatten einen Raum, der entweder schwach n-dimensional oder höchstens $(n-1)$-dimensional ist, als höchstens schwach n-dimensional bezeichnet. Entsprechend nennen wir einen Raum, der entweder stark n-dimensional oder mindestens $(n+1)$-dimensional ist, *mindestens stark n-dimensional.* Jeder Raum ist also entweder höchstens schwach n-dimensional oder mindestens stark n-dimensional.

Die Menge aller Punkte eines Raumes, in welchen der Raum mindestens k dimensional ist, wird als *der k-te Dimensionsteil des Raumes* bezeichnet. Jeder Raum ist dieser Definition zufolge mit seinem nullten Dimensionsteil identisch. Die Menge aller Punkte eines Raumes, in denen derselbe eine Dimension >0 besitzt, ist sein erster Dimensionsteil.

Dem zweiten Fundamentaltheorem über die dimensionelle Raumstruktur zufolge ist der n-te Dimensionsteil eines n-dimensionalen separabeln Raumes mindestens $(n-1)$-dimensional. ($n\geqq 2$; für $n=1$ ist diese Aussage trivial). Da für $k<l$ der k-te Dimensionsteil eines Raumes den l-ten Dimensionsteil als Teilmenge enthält, so folgt aus dem zweiten Fundamentaltheorem unmittelbar, daß der erste Dimensionsteil eines n-dimensionalen separabeln Raumes mindestens $(n-1)$-dimensional ist. Wir beweisen nunmehr folgenden schärferen

Satz über den ersten Dimensionsteil schwach n-dimensionaler Räume. *Der erste Dimensionsteil eines schwach n-dimensionalen Raumes ist mindestens stark $(n-1)$-dimensional.*

Zum Beweise machen wir die Annahme, der erste Dimensionsteil des schwach n-dimensionalen Raumes R sei höchstens schwach $(n-1)$-dimensional und leiten aus dieser Annahme einen Widerspruch her. Es sei N die (eventuell leere) Menge aller Punkte, in welchen der Raum R nulldimensional ist. In jedem Punkte von N ist R, also erst recht N selbst, nulldimensional. Die Menge N ist also höchstens nulldimensional. Der erste Dimensionsteil von R ist identisch mit der Menge $R-N$. Unsere Annahme besagt, daß $R-N$ höchstens schwach $(n-1)$-dimensional ist. Bezeichnet also M die Menge aller Punkte von $R-N$, in denen diese Menge $(n-1)$-dimensional ist, so ist M höchstens $(n-2)$-dimensional.

Die Menge $R-N-M$ kann nicht leer sein, sonst wäre $R-N=M$, d. h. es wäre R bloß in den Punkten der höchstens $(n-2)$-dimensionalen Menge M mehr als nulldimensional und dies ist nicht der Fall, da R als n-dimensional vorausgesetzt und daher in den Punkten einer mindestens $(n-1)$-dimensionalen Menge n-dimensional ist.

Es sei p irgend ein Punkt der Menge $R-N-M$. Wir behaupten: R ist in p höchstens $(n-1)$-dimensional. Es sei also W eine vorgelegte Umgebung von p. Wir haben eine Umgebung U von p, die $\subset W$ ist und eine höchstens $(n-1)$-dimensionale Begrenzung besitzt, anzugeben. Da p nicht in M liegt, ist die Menge $R-N$ in p höchstens $(n-2)$-dimensional. Es existiert also eine Umgebung U von p, die $\subset W$ ist und deren Begrenzung mit der Menge $R-N$ einen höchstens $(n-3)$-dimensionalen Durchschnitt hat. Außer den Punkten von $R-N$ kann die Begrenzung von U bloß Punkte der höchstens nulldimensionalen Menge N enthalten. Also ist die Begrenzung von U höchstens $(n-2)$-dimensional, womit die Zwischenbehauptung bewiesen ist. Wir haben also festgestellt: In jedem Punkte der Menge $R-N-M$ ist R höchstens $(n-2)$-dimensional, m. a. W. der. Raum R ist bloß in Punkten der $(n-2)$-dimensionalen Menge M n-dimensional. Dies aber widerspricht der Voraussetzung, daß R n-dimensional ist, da nach dem zweiten Fundamentaltheorem ein n-dimensionaler Raum in den Punkten einer mindestens $(n-1)$-dimensionalen Menge n-dimensional ist. Aus der Annahme, daß der erste Dimensionsteil von R schwach $(n-1)$-dimensional sei, ist also ein Widerspruch hergeleitet und damit unser Satz bewiesen.

6. Uber die Minimaldimension der Dimensionsteile.

Bezeichnet m für einen vorgelegten Raum R die kleinste ganze Zahl $\geqq 0$, für welche der Raum in einem seiner Punkte m-dimensional ist, dann nennen wir m die *Minimaldimension* von R. Durch die Beziehung

$$\operatorname{Min}\dim R = \dim R$$

sind offenbar die *homogendimensionalen* Räume (d. h. die Räume, die in allen Punkten dieselbe Dimension haben) gekennzeichnet.

Die Menge aller Punkte, in welchen ein Raum höchstens $(k-1)$-dimensional ist, (das Komplement des k-ten Dimensionsteiles des Raumes) ist für jedes k offenbar höchstens $(k-1)$-dimensional. Wir leiten nun für jene Räume, in denen diese Menge weniger als $(k-1)$-dimensional ist, eine Aussage über die Minimaldimension des k-ten Dimensionsteiles her, nämlich folgenden

Satz. *Ist der Ranm R bloß in den Punkten einer $(k-r-1)$-dimensionalen Menge höchstens $(k-1)$-dimensional $(r>0)$, dann besitzt der k-te Dimensionsteil von R eine Minimaldimension $\geqq r$.*

Es sei R^k der k-te Dimensionsteil von R und es sei $\dim(R-R^k)\leqq k-r-1$ $(r>0)$. Zum Beweise unserer Behauptung machen wir die Annahme, es sei $\operatorname{Min}\dim R^k<r$, es sei also die Menge R^k etwa im Punkte p höchstens $(r-1)$-dimensional, und leiten aus dieser Annahme einen Widerspruch her. Da p ein Punkt von R^k ist, existiert eine Umgebung W von p, so daß die Begrenzung von jeder Umgebung des Punktes p, die $\subset W$ ist, mindestens $(k-1)$-dimen-

sional ist. Unsere Annahme besagt, daß die Menge R^k im Punkte p höchstens $(r-1)$-dimensional ist. Es existiert also eine Umgebung $U\subset W$ von p, deren Begrenzung mit R^k einen höchstens $(r-2)$-dimensionalen Durchschnitt hat. Außer den Punkten von R^k kann die Begrenzung von U bloß Punkte der Menge $R-R^k$ enthalten und da dieselbe höchstens $(k-r-1)$-dimensional ist, so besitzt die Begrenzung von U höchstens die Dimension $(r-2)+(k-r-1)+1=$ $=k-2$, womit ein Widerspruch hergestellt ist.

7. Über die Produkte schwach eindimensionaler Räume.

Wir wissen bereits auf Grund des Produktsatzes für schwachdimensionale Räume, daß das Produkt von n schwach eindimensionalen Räumen, wenn es n-dimensional ist, schwach n-dimensional ist. Wir beweisen nun folgenden

Satz. *Wenn das Produkt von n schwach eindimensionalen Räumen n-dimensional ist, dann ist es darstellbar als Summe von $n+1$ nulldimensionalen Mengen $P_0, P_1, \ldots P_n$ mit folgender Eigenschaft: Die Summe von je $k+1$ paarweise verschiedenen Mengen $P_{i_0}, P_{i_1}, \ldots P_{i_k}$ ist schwach k-dimensional, bzw. stark k-dimensional, je nachdem ob P_0 unter den $k+1$ Summanden vorkommt oder nicht.*

Es seien S_i $(i=1,2,\ldots n)$ die n gegebenen schwach eindimensionalen Räume. Wir setzen $S_i=N_i+M_i$, wo M_i die nulldimensionale F_σ-Menge aller Punkte, in denen S_i eindimensional ist, und N_i die nulldimensionale Menge aller Punkte, in denen S_i nulldimensional ist, bezeichnet.

Wir betrachten den Raum

$$P=S_1\times S_2\times\ldots\times S_n=(N_1+M_1)\times(N_2+M_2)\times\ldots\times(N_n+M_n).$$

Wenn wir das Produkt rechts ausmultiplizieren, so erhalten wir 2^n Summanden. Für jede der Zahlen $k=0,1,\ldots n$ sind unter diesen 2^n Summanden genau $\binom{n}{k}$ Summanden vorhanden, welche das Produkt von k Faktoren M_i und $n-k$ Faktoren N sind. Die Summe dieser $\binom{n}{k}$ Summanden bezeichnen wir mit P_k und haben dann $P=\sum_{k=0}^{n} P_k$.

Wir behaupten, daß diese $n+2$ Mengen P_k unserer Behauptung genügen. Dazu beweisen wir fünf Behauptungen.

1) *Die Menge P_k $(k=0,1,\ldots n)$ ist nulldimensional.* Betrachten wir einen der $\binom{n}{k}$ Summanden von P_k, etwa die Menge $T=M_1\times M_2\times\ldots\times M_k\times$ $\times N_{k+1}\times N_{k+2}\times\ldots\times N_n$. Jede der Mengen M_i ist eine F_σ-Menge, also

$=\sum_{i=1}^{\infty} M_i^j$, wo die Mengen M_i^j in S_i abgeschlossen sind. Es gilt also

$$T=\sum_{i=1}^{\infty} M_1^j \times \sum_{j=1}^{\infty} M_2^j \times \dots \times \sum_{j=1}^{\infty} M_k^j \times N_{k+1} \times \dots \times N_k =$$

$$=\sum_{j_1=j_2,\dots,j_k=1}^{\infty} M_1^{j_1} \times M_2^{j_2} \times \dots \times M_k^{j_k} \times N_{k+1} \times \dots \times N_n.$$

Jeder der Summandem $M_1^{j_1} \times M_2^{j_2} \times \dots \times M_k^{j_k} \times N_{k+1} \times \dots \times N_n$ (für ein bestimmtes k-Tupel $j_1, j_2, \dots j_k$) ist nulldimensional und in P_k abgeschlossen. Denn für jeden Häufungspunkt eines solchen Summanden liegen die k Koordinaten in den Mengen $M_1^{j_1}, M_2^{j_2}, \dots M_k^{j_k}$, da diese Mengen in $S_1, S_2, \dots S_k$ abgeschlossen sind, und von den letzten $n-k$ Koordinaten muß, wenn der Häufungspunkt des Summanden nicht Punkt des Summanden ist, mindestens einer außerhalb von $N_{k+1}, N_{k+2}, \dots N_n$, d. h. in $M_{k+1}, M_{k+2}, \dots M_n$ liegen. Jeder Häufungspunkt eines Summanden, welcher nicht Punkt desselben ist, besitzt also mindestens $k+1$ Koordinaten, welche in den Mengen M_i liegen, und ist demnach nicht Punkt der Menge P_k. Jeder solche Summand enthält demnach alle seine in P_k gelegenen Häufungspunkte als Punkte, d. h. jeder Summand von T ist in P_k abgeschlossen. Die Menge T ist Summe von abzählbarvielen in P_k und daher erst recht in T abgeschlossenen nulldimensionalen Mengen, also nach dem Summensatz ein nulldimensionales F_σ in P_k. Da man dasselbe für jeden der $\binom{n}{k}$ Summanden von P_k zeigen kann, ist diese Menge nach dem Summensatz nulldimensional.

2) *Es ist P_0 identisch mit der Menge aller Punkte, in denen P nulldimensional ist.* Dies folgt aus der Bemerkung, welche wir an die obere Hälfte des Produktsatzes schlossen.

3) *Die Summe von irgend $k+1$ paarweise verschiedenen Mengen P_i ist k-dimensional.* Die Summe von $k+1$ nulldimensionalen Mengen ist höchstens k-dimensional. Wäre die Summe von $k+1$ Mengen P_i höchstens $(k-1)$-dimensional, so wäre P Summe von einer höchstens $(k-1)$-dimensionalen und $n-k$ nulldimensionalen Mengen, also höchstens $(n-1)$-dimensional, während wir P als n-dimensional vorausgesetzt haben.

4) *Sind $P_0, P_{i_1}, \dots P_{i_k}$ $k+1$ paarweise verschiedene Mengen, so ist ihre Summe schwach k-dimensional.* Die Summe ist nach dem sub 3) Bewiesenen k-dimensional. Sie ist in den Punkten von P_0 nulldimensional, also bloß in Punkten einer $(k-1)$-dimensionalen Menge k-dimensional, also schwach k-dimensional.

5) *Sind $P_{i_0}, P_{i_1}, \dots P_{i_k}$ $k+1$ paarweise verschiedene Mengen, unter denen P_0 nicht vorkommt, so ist ihre Summe S stark k-dimensional.* Wir machen die Annahme

S sei schwach k-dimensional, und leiten aus dieser Annahme einen Widerspruch her. Wir bezeichnen mit S' die nach Annahme $(k-1)$-dimensionale Menge aller Punkte, in denen S k-dimensional ist. Es sei p irgend ein Punkt von $P-S'$. Die Menge S ist in p höchstens $(k-1)$-dimensional; die Menge $P-S$ ist Summe von $n-k$ nulldimensionalen Mengen, also $(n-k-1)$-dimensional. Daher ist $S+(P-S)$, d. h. aber P, im Punkte p höchstens $(n-1)$-dimensional. D. h. es ist P bloß in Punkten der $(n-2)$-dimensionalen Menge S' n-dimensional und dies widerspricht nach dem zweiten Fundamentaltheorem der Voraussetzung, daß P n-dimensional ist, womit Behauptung 5) bewiesen ist.

Die Behauptungen 1), 4), 5) ergeben zusammengenommen den zu beweisenden Satz.

Wenn das Produkt von n schwach eindimensionalen Räumen n-dimensional ist, so ist es nach dem Produktsatz für schwachdimensionale Räume schwach n-dimensional, sein erster Dimensionsteil ist daher nach dem früher bewiesenen Satz mindestens stark $(n-1)$-dimensional. Anderseits ist dieser erste Dimensionsteil, wenn wir den Produktraum als Summe der $n+1$ Mengen $P_0, P_1, \dots P_n$ darstellen, auf Grund der vorhin bewiesenen Behauptung 2 mit der Menge $\sum_{k=1}^{n} P_k$ identisch und daher höchstens $(n-1)$-dimensional. Wir beweisen nun folgenden weitergehenden

Satz über den ersten Dimensionsteil des Produktes schwach eindimensionaler Räume. *Wenn das Produkt von n schwach eindimensionalen Räumen n-dimensional ist, so ist sein erster Dimensionsteil stark $(n-1)$-dimensional, aber Summe von n schwach $(n-1)$-dimensionalen relativen F_σ-Mengen, also Summe von abzählbarvielen schwach $(n-1)$-dimensionalen relativ abgeschlossenen Mengen.*

Setzen wir $P=\sum_{k=0}^{n} P_k$, so haben wir unter Berücksichtigung des eben Bemerkten nur noch zu zeigen, daß der erste Dimensionsteil, d. i. die Menge $\sum_{k=1}^{n} P_k$ Summe von n schwach $(n-1)$-dimensionalen relativen F_σ-Mengen ist.

Nun ist $\sum_{k=1}^{n} P = P - P_0 = P - N_1 \times N_2 \times \dots \times N_n = \sum_{i=1}^{n} S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times M_i \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$. Jeder der n Summaden rechts ist Produkt von $n-1$ schwach eindimensionalen und einer nulldimensionalen Menge, also schwach $(n-1)$-dimensional und, da M_1 ein F_σ in S_i ist, ein F_σ in P, womit der Satz bewiesen ist.

Eine Menge heißt *äußerst schwach eindimensional*, wenn ihr erster Dimensionsteil abzählbar ist. Betrachten wir die n-te Potenz eines äußerst schwach eindimensionalen Raumes, so sind die n F_σ-Mengen, in welche wir eben den ersten Dimensionsteil der n-ten Potenz zerlegt haben, offenbar paarweise homöomorph und der erste Dimensionsteil kann dann offenbar in abzählbarviele schwach-eindimensionale relativ abgeschlossene Mengen zerlegt werden, von denen jede mit der $(n-1)$-ten Potenz der äußerst schwach eindimensionalen Menge homöomorph ist.

Bezeichnen wir den Raum R im Punkte p als *höchstens leicht n-dimensional*, wenn p in beliebig kleinen Umgebungen mit höchstens schwach $(n-1)$-dimensionalen Begrenzungen enthalten ist, und nennen wir *höchstens leicht n-dimensional* einen Raum, der in jedem seiner Punkte höchstens leicht n-dimensional ist, so gilt offenbar der

Satz. *Das Produkt von n schwach eindimensionalen Räumen ist höchstens leicht n-dimensional.*

Sei nämlich p ein vorgelegter Punkt des Produktes P. Wir stellen dasselbe nach dem obigen Verfahren als Summe der $n+1$ nulldimensionalen Mengen P_k dar. Ist p in P_0 enthalten, so ist P in p nulldimensional. Ist p in P_i enthalten $(i \neq 0)$, so liegt, da P_i nulldimensional ist, p in beliebig kleinen Umgebungen, deren Begrenzungen zu P_i fremd sind, deren Begrenzungen daher in der Summe der n übrigen Mengen P_k enthalten und demnach höchstens schwach $(n-1)$-dimensional sind. Also ist P in p höchstens leicht n-dimensional.

Wenn die obere Hälfte des Produktsatzes für beliebige separable Räume gelten sollte, dann existieren also für jedes n schwach n-dimensionale Räume, da es nach Sierpiński einen schwach (und sogar äußerst schwach) eindimensionalen Raum gibt. Dann existieren ferner für jedes n stark n-dimensionale Räume, welche Summe sind von n schwach n-dimensionalen relativen F_σ-Mengen und daher von abzählbarvielen schwach n-dimensionalen relativ abgeschlossenen Mengen, welche zudem als paarweise homöomorph angenommen werden können (z. B. die erste Dimensionsteil der Potenzen der Sierpiński'schen Menge). Unabhängig vom Produktsatz hat Mazurkiewicz für jedes n schwach n-dimensionale Räume konstruiert und hat einen stark eindimensionalen Raum konstruiert, welcher Summe sogar von bloß zwei relativ abgeschlossenen schwach eindimensionalen Mengen ist.

Über verallgemeinerte projektive Geometrie

(O uogólnionej geometrji rzutowej)

von

Stanisław Gołąb (Kraków).

Einleitung.

Seitdem F. Klein in seiner Arbeit „Über Liniengeometrie und metrische Geometrie" (1871) [1]) die Beziehungen zwischen den projektiven und konformen Eigenschaften in der euklidischen Geometrie klargestellt hatte, bilden die Untersuchungen in der projektiven und in der konformen Geometrie zwei parallele Reihen, die in ihren wichtigsten Punkten zeitlich nur geringe Differenzen aufweisen.

1918 entdeckte Weyl die sogenannte Konformkrümmungsgröße einer Riemannschen Übertragung und bewies, daß das Verschwinden dieser Größe notwendig dafür ist, daß eine gegebene Riemannsche Geometrie durch eine konforme Transformation in eine euklidische übergeführt werden kann [2]). 1921 zeigte Schouten sodann, daß das Verchwinden der Konformkrümmungsgröße auch eine hinreichende Bedingung darstellt [3]). Dieses Resultat veranlaßte Weyl zur Bildung der sogenannten Projektivkrümmungsgröße und zum Beweise des Satzes, daß das Verschwinden dieser Größe notwendig und hinreichend dafür ist, daß eine gegebene nichteuklidische affine Gemetrie durch eine bahntreue Transformation in eine euklidische übergeführt werden kann [4]). In dieser Weylschen Arbeit findet sich zum ersten Mal der Begriff der bahntreuen oder projektiven Transformation einer affinen Übertragung. Sind $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ die Parameter einen affinen Übertragung in einer X_n, so sind die Parameter $'\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ jeder affinen Übertragung mit denselben geodätischen Linien gegeben durch die Gleichung

$$(1) \qquad '\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + A^{\nu}_{\lambda} p_{\mu} + A^{\nu}_{\mu} p_{\lambda}, \quad (A^{\nu}_{\lambda} = \text{Einheitsaffinor})$$

wo p_λ ein beliebiges kovariantes Vektorfeld ist. Projektiv heißt nun eine

[1]) 1871, 1. [2]) 1918, 1. [3]) 1921, 1. [4]) 1921, 2.