1° f est contenu dans e. Dans ce cas $m(f)$ doit être compris entre 0 et $m(e)$. L'on pouvait avoir antérieurement une borne inférieure pour $m(f)$ s'il existait un e_3' déjà mesuré contenu dans f; mais comme dans ce cas e_3' est contenu dans e, il ne peut y avoir de contradiction entre la borne inférieure $m(e_3')$ et la borne supérieure $m(e)$. Aucune contradiction n'est à craindre non plus du fait de l'existence d'ensembles déjà mesurés contenus dans $e-f$, ou au contraire contenant, soit f, soit $e-f$.

On traite de même le cas où f est contenu dans le complément $\bar{e} = E - e$ de e.

2° f contient e (ou $\bar{e}$). Cela revient à dire que le complément de f est contenu dans $\bar{e}$ (ou e); ce cas se ramène au précédent.

3° f comprend une partie f' de e et une partie f'' de $\bar{e}$; on ne peut alors, du fait que l'on ait choisi $m(e)$, rien conclure d'autre sur f que ce qui peut résulter des considérations successives de f' et f''. Aucune contradiction n'est donc à craindre.

En résumé, le choix de $m(e)$, effectué arbitrairement entre les bornes inférieure et supérieure antérieurement connues, ne risque d'entraîner aucune contradiction (ce qui ne serait pas vrai si l'on conservait l'axiome c).

Et pourtant, l'on ne peut pas continuer indéfiniment et transfiniment. Un exemple le fera comprendre. Supposons que l'on ait à attribuer successivement des mesures à des ensembles $e_1, e_2, \ldots$, dont chacun contienne le suivant, tous les e_n n'ayant d'ailleurs aucun point commun; $m(e_n)$ peut alors être choisi arbitrairement entre 0 et $m(e_{n-1})$; si les choix sont tels que $m(e_n)$ tende pour n infini vers une limite positive, une contradiction apparaît à la limite, bien qu'aucune contradiction ne soit à craindre après un nombre fini de choix.

Cette remarque montre pourquoi le mode de raisonnement considéré ne permet pas de conclure, et les mémoires cités de MM. Banach et Kuratowski et de M. Ulam permettent de conclure qu'on ne saurait éviter par aucun choix des $m(e)$ de trouver à un certain moment une contradiction avant d'avoir mesuré tous les ensembles e.

Je tiens à faire remarquer, en terminant, que l'erreur que j'avais commise à la p. 330 de mon Calcul des Probabilités provenait de l'oubli de la remarque qui précède, et ne saurait conduire à douter de la légitimité de l'axiome de M. Zermelo, dont l'emploi, à mon avis, ne risque pas de conduire à une contradiction.

Sur le problème de la turbulence

(O zagadnieniu turbulencji)

par

A. Rosenblatt

Le présent travail est une étude détaillée de la perturbation du mouvement laminaire des liquides visqueux incompressibles qui a fait l'objet d'une Note envoyée au Philosophical Magazine, et d'une conférence au Jubilé de la British Association. Il s'agit du mouvement laminaire appellé „simple shearing" par les Anglais, c'est à dire dont la vitesse fondamentale u_0 est de la forme

$$u_0 = \frac{U}{H} y. \tag{1}$$

Le fluide se meut parallèlement à l'axe des x entre deux parois F_1, F_2, dont la première F_1 est en repos et la seconde a la vitesse U et dont les équations sont $y = 0$ et $y = H$. La perturbation s'evanouit exponentiellement à l'infini, cas qui est bien plus facile à traiter exactement que le cas d'une perturbation périodique en x.

1. En supposant l'adhérence complète du fluide aux parois nous avons comme formule générale de la vitesse u_0 parallèle à l'axe des x

$$u_0 = \frac{Uy}{H} + 3A_0 y(H - y). \tag{2}$$

Le gradient $\frac{\partial p_0}{\partial x}$ de la pression moyenne s'obtient de l'équation

$$\mu \Delta u_0 = \frac{\partial p_0}{\partial x},$$

donc il est égal à $-6\mu A_0$, μ étant le coëfficient de la viscosité. Nous posons

$$K = -3A_0 = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p_0}{\partial x},$$

$$u_0 = \frac{Uy}{H} - Ky(H-y).$$

La fonction de Stokes correspondante Ψ_0 est

$$\Psi_0 = -\frac{Uy^2}{2H} + Ky\left(H\frac{y}{2} - \frac{y^3}{3}\right).$$

Nous avons l'équation en Ψ

$$\nu\Delta\Delta\Psi - \frac{D(\Psi, \Delta\Psi)}{D(x,y)} - \frac{\partial\Delta\Psi}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

Nous essayons de satisfaire à cette équation en développant Ψ suivant les puissances d'un paramètre ε

$$\Psi = \Psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Psi_k(x, y, t). \tag{4}$$

Nous poserons

$$\Psi_k = \sum_{h=0}^{k} e^{-\{[h\bar\lambda + (k-h)\lambda]x + [h\bar\mu + (k-h)\mu]t\}} \cdot f_{k-h,h}(y), \tag{5}$$

où les nombres $\lambda, \bar\lambda$; $\mu, \bar\mu$ sont complexes conjugués. De même $f_{k-h,h}(y)$ et $f_{h,k-h}(y)$ seront complexes conjugués de sorte que Ψ_k sera réel.

Nous supposerons, dans le présent travail λ, μ réels, positifs de sorte que l'on pourra remplacer l'expression générale (5) par l'expression plus simple

$$\Psi_k = e^{-k(\lambda x + \mu t)} \cdot f_k(y). \tag{6}$$

Les Ψ_k sont déterminés par les équations aux dérivées partielles du 4 ordre

$$\nu\Delta\Delta\Psi_0 = 0, \tag{7}$$

$$\nu\Delta\Delta\Psi_1 - \Psi_{1x}\Delta\Psi_{0y} + \Psi_{0y}\Delta\Psi_{1x} - \frac{\partial\Delta\Psi_1}{\partial t} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\nu\Delta\Delta\Psi_k - \Psi_{kx}\Delta\Psi_{0y} + \Psi_{0y}\Delta\Psi_{kx} - \frac{\partial\Delta\Psi_k}{\partial t} = \sum_{\substack{l+m=k\\ l,m=1,\dots,k-1}} \Psi_{lx}\Delta\Psi_{my} - \Psi_{ly}\Delta\Psi_{mx}.$$

En remplaçant dans ces équations les Ψ_k par leurs valeurs (6) nous obtenons une suite d'équations différentielles ordinaires du 4. ordre.

En introduisant les fonctions auxiliaires $\varphi_k(y)$ définies par les expressions

$$\varphi_k(y) = f_k''(y) + k^2\lambda^2 f_k(y) \tag{8}$$

nous obtenons les équations différentielles suivantes:

$$\nu\varphi_k'' + \varphi_k\left\{\nu k^2\lambda^2 + k\lambda\left[\frac{U}{H}y - Ky(H-y)\right] + k\mu\right\} \tag{9}$$

$$-2Kk\lambda f_k = \sum_{\substack{l+m=k\\ l,m=1,\dots,k-1}} \lambda\{-l f_l\varphi_m' + m f_l'\varphi_m\} = \nu F_k(y).$$

$$k = 1, 2, \dots$$

2. Dans le cas du „simple shearing" les équations (9) ne contiennent que φ_k

$$\varphi_k'' + \varphi_k\left(k^2\lambda^2 + k\lambda\frac{U}{H\nu}y + \frac{k\mu}{\nu}\right) = F_k. \tag{10}$$

Nous pouvons introduire les grandeurs sans dimension employées par Sommerfeld et autres

$$\xi = \frac{x}{H},\quad \eta = \frac{y}{H},\quad \tau = \frac{U}{H}t,\quad \gamma = \lambda H,\quad \delta = \frac{\mu H}{U},\quad R = \frac{UH}{\nu}, \tag{11}$$

R est le nombre de Reynolds. Nous poserons

$$f_k(y) = \bar f_k(\eta).$$

On aura alors

$$\Psi_0 = -\frac{R\eta^2}{2}\nu, \tag{12}$$

$$\Psi_k = e^{-k(\gamma\xi + \delta\tau)} \cdot \bar f_k(\eta).$$

Nous avons donc

$$\varphi_k(y) = \frac{1}{H^2}[\bar f_k''(\eta) + k^2\gamma^2 \bar f_k(\eta)].$$

Posons

$$\varphi_k(y) = \frac{1}{H^2}\bar\varphi_k(\eta),$$

on aura

$$\varphi_k''(y) = \frac{1}{H^4}\bar\varphi_k''(\eta).$$

Nous aurons donc pour déterminer $\bar\varphi_k(\eta)$, $\bar f_k(\eta)$ les deux systèmes suivants d'équations differentielles ordinaires:

$$\bar f_k''(\eta) + k^2\gamma^2 \bar f_k(\eta) = \bar\varphi_k(\eta), \tag{13}$$

$$\bar{\varphi}_k''(\eta) + \bar{\varphi}_k(\eta)\,[k^2\gamma^2 + kR(\delta + \gamma\eta)] \tag{14}$$
$$= \frac{1}{\nu}\sum_{\substack{l+m=k\\ l,m=1,\dots,k-1}} \gamma\,[-\,l\bar{f}_l(\eta)\,\bar{\varphi}_m'(\eta) + m\bar{f}_l'(\eta)\,\bar{\varphi}_m(\eta)] = D_k(\eta).$$

M. Sommerfeld envisage les perturbations périodiques, il a les notations suivantes

$$\gamma = i\alpha, \qquad \delta = -i\beta,$$

donc

$$\alpha = -i\gamma, \qquad \beta = i\delta.$$

3. Nous introduirons maintenant, dans chaque paire d'équations différentielles en $\bar{f}_k$, $\bar{\varphi}_k$, des nouvelles variables indépendantes. Ces variables seront

$$z_k = \frac{k^2\gamma^2 + kR(\delta + \gamma\eta)}{(k\gamma R)^{\frac{2}{3}}} = \frac{(k\gamma)^{\frac{4}{3}}}{R^{\frac{2}{3}}}\left[1 + \frac{R(\delta + \gamma\eta)}{k\gamma^2}\right]. \tag{15}$$

γ, δ étant supposés positifs, z_k augmente avec η et aux limites $\eta = 0$, $\eta = 1$ correspondent les limites de z_k

$$z_k^0 = \frac{k^2\gamma^2 + kR\delta}{(k\gamma R)^{\frac{2}{3}}}, \qquad z_k^1 = \frac{k^2\gamma^2 + kR(\delta + \gamma)}{(k\gamma R)^{\frac{2}{3}}} \tag{16}$$

et on a

$$z_k^1 - z_k^0 = (k\gamma R)^{\frac{1}{3}}. \tag{17}$$

En remplaçant dans $\bar{\varphi}_k(\eta)$ la variable indépendante η par z_k nous obtenons une fonction $\bar{\bar{\varphi}}_k(z_k)$

$$\bar{\varphi}_k(\eta) = \bar{\bar{\varphi}}_k(z_k).$$

On aura ensuite

$$\bar{\varphi}_k''(\eta) = \bar{\bar{\varphi}}_k''(z_k)\cdot(k\gamma\cdot R)^{\frac{2}{3}},$$

donc on a

$$\bar{\varphi}_k''(\eta) + \bar{\varphi}_k(\eta)\,[k^2\gamma^2 + kR(\delta + \gamma\eta)] = (k\gamma R)^{\frac{2}{3}}\{\bar{\bar{f}}_k''(z_k) + g_k^2\bar{\bar{f}}_k(z_k)\},$$

où l'on a posé

$$g_k = -\frac{(k\gamma)^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{1}{3}}}. \tag{18}$$

Nous obtenons ainsi les deux séries infinies d'équations différentielles

$$\bar{\bar{f}}_k''(z_k) + g_k^2\bar{\bar{f}}_k(z_k) = \frac{g_k^2}{k^2\gamma^2}\,\bar{\bar{\varphi}}_k(z_k), \tag{19}$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_k''(z_k) + z_k\bar{\bar{\varphi}}_k(z_k) = \frac{g_k^2}{k^2\gamma^2}\,\bar{\bar{D}}_k(z_k), \tag{20}$$

où l'on a posé

$$\bar{\bar{D}}_k(z_k) = D_k(\eta),$$

et où l'on a

$$\frac{g_k^2}{k^2\gamma^2} = \frac{1}{(k\gamma R)^{\frac{4}{3}}}.$$

Nous avons donc, en particulier, les équations suivantes

$$\bar{\bar{f}}_1''(z_1) + g_1^2\bar{\bar{f}}_1(z_1) = \frac{g_1^2}{\gamma^2}\,\bar{\bar{\varphi}}_1(z_1),$$
$$\bar{\bar{\varphi}}_1''(z_1) + z_1\bar{\bar{\varphi}}_1(z_1) = 0,$$
$$\bar{\bar{f}}_2''(z_2) + g_2^2\bar{\bar{f}}_2(z_2) = \frac{g_2^2}{4\gamma^2}\,\bar{\bar{\varphi}}_2(z_2),$$
$$\bar{\bar{\varphi}}_2''(z_2) + z_2\bar{\bar{\varphi}}_2(z_2) = \frac{g_2^2}{4\gamma^2}\cdot\frac{\gamma}{\nu}\,[-\bar{\bar{f}}_1(z_1)\cdot\bar{\bar{\varphi}}_1'(z_1) + \bar{\bar{f}}_1'(z_1)\cdot\bar{\bar{\varphi}}_1(z_1)]\cdot(R\gamma)^{\frac{1}{3}}.$$

En remplaçant dans $\bar{\bar{D}}_k(z_k)$ la variable z_k par les variables z_l, z_m dans les fonctions $\bar{\bar{f}}$, $\bar{\bar{\varphi}}$ nous avons

$$\bar{\bar{D}}_k(z_k) = \frac{\gamma}{\nu}\sum_{\substack{l+m=k,\\ l,m=1\dots k-}} [-\,l(m\gamma R)^{\frac{1}{3}}\bar{\bar{f}}_l(z_l)\cdot\bar{\bar{\varphi}}_m'(z_m) + m(l\gamma R)^{\frac{1}{3}}\bar{\bar{f}}_l'(z_l)\cdot\bar{\bar{\varphi}}_m(z_m)]. \tag{21}$$

4. Intégrons maintenant les équations (19), (20) en tenant compte des conditions aux limites. Nous avons d'abord

$$\bar{\bar{f}}_k = A_k'\sin g_k z_k + B_k'\cos g_k z_k + \frac{g_k}{k^2\gamma^2}\int_{z_k^0}^{z_k}\sin g_k(z_k - u)\cdot\bar{\bar{\varphi}}_k(u)\,du. \tag{22}$$

Les conditions aux limites

$$\bar{\bar{f}}_k(z_k^0) = 0, \qquad \bar{\bar{f}}_k'(z_k^0) = 0$$

donnent

$$A_k' = B_k' = 0, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Calculons maintenant les $\bar{\bar{\varphi}}_k(z_k)$. Envisageons dans ce but l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0. \tag{23}$$

Cette équation a les deux intégrales linéairement indépendantes

$$(24)\qquad y_1 = \sqrt{x}\, I_{-\frac{1}{3}}\left(\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right), \qquad y_2 = \sqrt{x}\, I_{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right).$$

Les I sont les fonctions de Bessel d'indices $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$. La fonction I_n de Bessel d'indice n satisfait à l'équation différentielle, du second ordre

$$(25)\qquad I'' + \frac{I'}{x} + I\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = 0$$

et elle est donnée par le développement

$$(26)\qquad I_n(u) = \left(\frac{u}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^{2k} \cdot \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+k+1)}.$$

On a donc les développements

$$(27)\qquad I_{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{x}}\left[1 - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) x^3}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\cdot 1!} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) x^6}{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)\cdot 2!} - \dots\right],$$

$$I_{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\sqrt{x}\left[1 - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) x^3}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\cdot 1!} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) x^6}{\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)\cdot 2!} - \dots\right].$$

Nous avons donc les intégrales

$$(28)\qquad \sigma_1(x) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right) \sqrt{x}\, I_{-\frac{1}{3}}\left(\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) x^3}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right) 1!} + \dots,$$

$$\sigma_2(x) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\tfrac{4}{3}\right) \sqrt{x}\, I_{\frac{1}{3}}\left(\tfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) = x\left[1 - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) x^3}{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\cdot 2!} + \dots\right]$$

dont le déterminant fonctionnel

$$\sigma_1(x)\,\sigma'_2(x) - \sigma_2(x)\,\sigma'_1(x)$$

est égal à 1.

La solution générale $\overline{\overline{\varphi}}_k(z_k)$ de l'équation (20) s'exprime donc par la formule

$$(29)\qquad \overline{\overline{\varphi}}_k(z_k) = A_k \sigma_1(z_k) + B_k \sigma_2(z_k) + \frac{g_k^2}{k^2\gamma^2}\int_{z_k^0}^{z_k^1} [\sigma_1(u)\,\sigma_2(z_k) - \sigma_2(u)\,\sigma_1(z_k)]\,\overline{\overline{D}}_k(u)\,du$$

$\overline{\overline{f}}_k(z_k)$ est donc donné par la formule suivante

$$(30)\qquad \overline{\overline{f}}_k(z_k) = \frac{g_k}{k^2\gamma^2}\int_{z_k^0}^{z_k} \sin g_k(z_k - u)\,\{A_k \sigma_1(u) + B_k \sigma_2(u)$$

$$+ \frac{g_k^2}{k^2\gamma^2}\int_{z_k^0}^{u} [\sigma_1(\zeta)\,\sigma_2(u) - \sigma_2(\zeta)\,\sigma_1(u)]\,\overline{\overline{D}}_k(\zeta)\,d\zeta\}\,du.$$

5. Nous avons encore les conditions le long de la seconde paroi

$$(31)\qquad \overline{\overline{f}}_k(z_k^1) = 0, \qquad \overline{\overline{f}}'_k(z_k^1) = 0.$$

Introduisons les intégrales

$$(32)\qquad I_1(z_k) = \int_{z_k^0}^{z_k} \sin g_k(z_k - u)\,\sigma_1(u)\,du,$$

$$I_2(z_k) = \int_{z_k^0}^{z_k} \sin g_k(z_k - u)\,\sigma_2(u)\,du,$$

$$J_1(z_k) = \int_{z_k^0}^{z_k} \cos g_k(z_k - u)\,\sigma_1(u)\,du,$$

$$J_2(z_k) = \int_{z_k^0}^{z_k} \cos g_k(z_k - u)\,\sigma_2(u)\,du.$$

Nous avons alors

$$(33)\qquad \overline{\overline{f}}_k(z_k) = \frac{g_k}{k^2\gamma^2}\,\{A_k I_1(z_k) + B_k I_2(z_k)$$

$$+ \frac{g_k}{k^2\gamma^2}\cdot\int_{z_k^0}^{z_k} \sin g_k(z_k - u)\int_{z_k^0}^{u} [\sigma_1(\zeta)\,\sigma_2(u) - \sigma_2(\zeta)\,\sigma_1(u)]\,\overline{\overline{D}}_k(\zeta)\,d\zeta\,du\}.$$

Ces conditions (31) pour $k = 1$ donnent donc les équations suivantes

$$(34)\qquad A_1 I_1(z_1^1) + B_1 I_2(z_1^1) = 0,$$

$$A_1 J_1(z_1^1) + B_1 J_2(z_1^1) = 0.$$

Il en résulte l'équation transcendante suivante entre γ et δ

$$(35)\qquad D_1 \equiv I_1(z_1^1)\,J_2(z_1^1) - I_2(z_1^1)\,J_1(z_1^1).$$

Supposons que γ, δ satisfassent à cette équation. Alors on peut poser

$$A_1 = -C_1 I_2(z_1^1), \qquad B_1 = C_1 I_1(z_1^1),$$

C_1 étant une constante arbitraire.

Nous calculons ensuite A_k, B_k pour $k \geqq 2$ des relations suivantes

$$\tag{37} A_k I_1(z_k^1) + B_k I_2(z_k^1) + \frac{g_k^2}{k^2\gamma^2}\int_{z_k^0}^{z_k^1} \sin g_k(z_k-u) \int_{z_k^0}^{u} [\sigma_1(\zeta)\,\sigma_2(u) - \sigma_2(\zeta)\,\sigma_1(u)]\, \overline{\overline{D}}_k(\zeta)\, d\zeta\, du = 0,$$

$$A_k J_1(z_k^1) + B_k J_2(z_k^1) + \frac{g_k^2}{k^2\gamma^2}\int_{z_k^0}^{z_k^1} \cos g_k(z_k-u) \int_{z_k^0}^{u} [\sigma_1(\zeta)\,\sigma_2(u) - \sigma_2(\zeta)\,\sigma_1(u)]\, \overline{\overline{D}}_k(\zeta)\, d\zeta\, du = 0.$$

Changeons l'ordre d'intégration en introduisant les intégrales

$$I_{1,\zeta}^{z_k} = \int_{\zeta}^{z_k} \sin g_k(z_k-u)\,\sigma_1(u)\,du, \quad I_{2,\zeta}^{z_k} \sin g_k(z_k-u)\,\sigma_2(u)\,du,$$

et les intégrales semblables où sin est remplacé par cos

$$J_{1,\zeta}^{z_k} = \int_{\zeta}^{z_k} \cos g_k(z_k-u)\,\sigma_1(u)\,du, \quad J_{2,\zeta}^{z_k} = \int_{\zeta}^{z_k} \cos g_k(z_k-u)\,\sigma_2(u)\,du.$$

Introduisons aussi les expressions

$$\tag{38} D_k = I_1(z_k^1)\,J_2(z_k^1) - I_2(z_k^1)\,J_1(z_k^1).$$

Alors A_k, B_k s'expriment des équations (37) par les formules suivantes:

$$\tag{39} A_k = \frac{g_k^2}{D_k\cdot k^2\gamma^2}\Big\{I_2(z_k^1)\int_{z_k^0}^{z_k^1} \overline{\overline{D}}_k(\zeta)\,[\sigma_1(\zeta)\,J_{2,\zeta}^{z_k^1} - \sigma_2(\zeta)\,J_{1,\zeta}^{z_k^1}]\,d\zeta - J_2(z_k^1)\int_{z_k^0}^{z_k^1} \overline{\overline{D}}_k(\zeta)\,[\sigma_1(\zeta)\,I_{2,\zeta}^{z_k^1} - \sigma_2(\zeta)\,I_{1,\zeta}^{z_k^1}]\,d\zeta\Big\},$$

$$B_k = \frac{g_k^2}{D_k\cdot k^2\gamma^2}\Big\{J_1(z_k^1)\int_{z_k^0}^{z_k^1} \overline{\overline{D}}_k(\zeta)\,[\sigma_1(\zeta)\,I_{2,\zeta}^{z_k^1} - \sigma_2(\zeta)\,I_{1,\zeta}^{z_k^1}]\,d\zeta - I_1(z_k^1)\int_{z_k^1}^{z_k^0} \overline{\overline{D}}_k(\zeta)\,[\sigma_1(\zeta)\,J_{2,\zeta}^{z_k^1} - \sigma_2(\zeta)\,J_{1,\zeta}^{z_k^1}]\,d\zeta\Big\}.$$

En remplaçant dans (29) A_k, B_k par ces expressions on obtient les formules de récurrence suivantes

$$\tag{40} \begin{aligned} \overline{\overline{\varphi}}_k(z_k) = \frac{g_k^2}{D_k\cdot k^2\gamma^2}\Big\{&\int_{z_k^0}^{z_k^1} \overline{\overline{D}}_k(\zeta)\,[\sigma_1(\zeta)\,\sigma_1(z_k)\cdot(I_2(z_k^1)\,J_{2,\zeta}^{z_k^1} - I_{2,\zeta}^{z_k^1}\,J_2(z_k^1)) \\ &+ \sigma_2(\zeta)\,\sigma_1(z_k)(I_{1,\zeta}^{z_k^1}\,J_2(z_k^1) - I_2(z_k^1)\,J_{1,\zeta}^{z_k^1}) - \sigma_1(\zeta)\,\sigma_2(z_k)(I_1(z_k^1)\,J_{2,\zeta}^{z_k^1} \\ &- I_{2,\zeta}^{z_k^1}\,J_1(z_k^1)) - \sigma_2(\zeta)\,\sigma_2(z_k)(I_{1,\zeta}^{z_k^1}\,J_1(z_k^1) - I_1(z_k^1)\,J_{1,\zeta}^{z_k^1})] \\ &+ D_k\int_{z_k^0}^{z_k} \overline{\overline{D}}_k(\zeta)\cdot[\sigma_1(\zeta)\,\sigma_2(z_k) - \sigma_2(\zeta)\,\sigma_1(z_k)]\,d\zeta\Big\}. \end{aligned}$$

6. Envisageons maintenant les expressions (38) des D_k et calculons la limite de D_k lorsque γ, δ étant fixes et positives k augmente vers $+\infty$.

Rappellons, dans ce but, les expressions asymptotiques des fonctions I_n, Y_n de Bessel. (Voir p. ex. N. Nielsen: Handbuch der Zylinderfunctionen). On a les formules asymptotiques suivantes:

$$\tag{41} \begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} x^k\Big\{I_n(x)\sqrt{\frac{\pi x}{2}} - \cos\Big(x - \frac{2n+1}{4}\pi\Big)P_k(x) - \sin\Big(x - \frac{2n+1}{4}\pi\Big)Q_k(x)\Big\} = 0, \\ &\lim_{x\to+\infty} x^k\Big\{Y_n(x)\sqrt{\frac{\pi x}{2}} - \sin\Big(x - \frac{2n+1}{4}\pi\Big)P_k(x) - \cos\Big(x - \frac{2n+1}{4}\pi\Big)Q_k(x)\Big\} = 0. \end{aligned}$$

où P_k, Q_k sont les polynômes suivants:

$$(42)\qquad P_k(x) = 1 + \sum_{s=1}^{\leq \frac{k}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s)!} \frac{\left(n^2 - \frac{1^2}{4}\right)\left(n^2 - \frac{3^2}{4}\right)\dots\left(n^2 - \frac{(4s-1)^2}{4}\right)}{(2x)^{2s}},$$

$$Q_k(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{k-1}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} \frac{\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\left(n^2 - \frac{3^2}{4}\right)\dots\left(n^2 - \frac{(4s+1)^2}{4}\right)}{(2x)^{2s+1}}.$$

x peut d'ailleurs croître indéfiniment de manière quelconque pourvu que son argument Θ, $x = re^{i\Theta}$, soit compris entre deux nombres α, β, $\alpha < \beta$, où α est $> -\frac{\pi}{2}$ et β est $< \frac{\pi}{2}$.

On a d'ailleurs

$$(43)\qquad I_{-n}(x) = I_n(x) \cos n\pi - Y_n(x) \sin n\pi$$

lorsque n n'est pas entier. En nous servant des notations de Poincaré nous pouvons donc écrire les relations asymptotiques

$$(44)\qquad I_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right).$$

On a

$$(45)\qquad I_{\frac{1}{3}}(x) = I_{-\frac{1}{3}}(x) \cos\frac{\pi}{3} + Y_{-\frac{1}{3}}(x) \sin\frac{\pi}{3}.$$

Nous avons donc les relations asymptotiques

$$(46)\qquad \sigma_1(z) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{z^{\frac{1}{4}}} \left\{\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) + \left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right)\right\},$$

$$\sigma_2(z) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{z^{\frac{1}{4}}} \left\{\sqrt{\frac{3}{\pi}} \sin\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{12}\right) + \left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}.$$

Pour calculer D_k nous pouvons remplacer $\sigma_2(z)$ par l'intégrale

$$(47)\qquad \sigma_3(z) = \sqrt{z}\, Y_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right)$$

qui est une combinaison linéaire de $\sigma_1(z)$, $\sigma_2(z)$. On a

$$(48)\qquad \sigma_3(z) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{z^{\frac{1}{4}}} \left\{\sin\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) + \left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}.$$

Nous pouvons donc remplacer les intégrales I, J à des quantités d'ordre $\frac{1}{z^{\frac{7}{4}}}$ près et à des facteurs numériques irrelevants près par les intégrales

$$(49)\qquad \overline{I}_1 = \int_{z_k^0}^{z_k^1} \sin g_k(z_k - u) \cos\left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) \frac{du}{u^{\frac{1}{4}}},$$

$$\overline{I}_2 = \int_{z_k^0}^{z_k^1} \sin g_k(z_k - u) \sin\left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) \frac{du}{u^{\frac{1}{4}}},$$

$$\overline{J}_1 = \int_{z_k^0}^{z_k^1} \cos g_k(z_k - u) \cos\left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) \frac{du}{u^{\frac{1}{4}}},$$

$$\overline{J}_2 = \int_{z_k^0}^{z_k^1} \cos g_k(z_k - u) \sin\left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) \frac{du}{u^{\frac{1}{4}}}.$$

Introduisons les variables

$$(50)\qquad v = g_k(z_k - u) + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12},$$

$$v' = g_k(z_k - u) - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{12}.$$

On aura

$$2 \sin g_k(z_k - u) \cos\left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin v + \sin v',$$

$$2 \sin g_k(z_k - u) \sin\left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos v' - \cos v,$$

$$2 \cos g_k(z_k - u) \cos\left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos v' + \cos v,$$

$$2 \cos g_k(z_k - u) \sin\left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin v - \sin v.$$

Remplaçons dans les intégrales (49) la variable indépendante u par la variable η. On a

$$\frac{du}{d\eta} = (k\gamma R)^{\frac{1}{3}}.$$

D'autre part on a

$$u^{\frac{1}{4}} = \frac{(k\gamma)^{\frac{1}{3}}}{R^{\frac{1}{6}}}\left(1 + \left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

En remplaçant dans les intégrales (49) $u^{\frac{1}{4}}$ par $\frac{(k\gamma)^{\frac{1}{3}}}{R^{\frac{1}{6}}}$ nous négligeons donc des termes d'ordre

$$|z_k^1 - z_k^0| \cdot \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{k},$$

c'est à dire d'ordre k. Les termes négligés auparavant sont d'ordre $\frac{1}{z^{\frac{7}{4}}}$, donc d'ordre $\frac{1}{k^{\frac{7}{3}}}$. Donc à des termes d'ordre $\frac{1}{k}$ près les intégrales (49) peuvent être remplacées par les expressions

$$K_1 = \frac{\sqrt{R}}{2}\left[\int_0^1 \sin v \, d\eta + \int_0^1 \sin v' \, d\eta\right], \tag{51}$$

$$K_2 = \frac{\sqrt{R}}{2}\left[\int_0^1 \cos v' \, d\eta - \int_0^1 \cos v \, d\eta\right],$$

$$K_3 = \frac{\sqrt{R}}{2}\left[\int_0^1 \cos v' \, d\eta + \int_0^1 \cos v \, d\eta\right],$$

$$K_4 = \frac{\sqrt{R}}{2}\left[\int_0^1 \sin v \, d\eta - \int_0^1 \sin v' \, d\eta\right].$$

7. Remplaçons maintenant dans les intégrales précédentes v, v' par les expressions (50). Nous avons

$$\frac{dv}{d\eta} = (\sqrt{u} - g_k)(k\gamma R)^{\frac{1}{3}} = (k\gamma R)^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{(k\gamma)^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{1}{3}}}\left[1 + \frac{R(\delta + \gamma\eta)}{2k\gamma^2}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{1}{k^2}\right)\right] + \frac{(k\gamma)^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{1}{3}}}\right\} = 2k\gamma\left(1 + \left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Donc les intégrales contenant $\cos v$ ou $\sin v$ sont d'ordre $\frac{1}{k}$.

Nous avons aussi

$$\frac{dv'}{d\eta} = (-\sqrt{u} + g_k)(k\gamma R)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (k\gamma R)^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{(k\gamma)^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{1}{3}}} - \frac{(k\gamma)^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{1}{3}}}\cdot\left[1 + \frac{R(\delta + \gamma\eta)}{2k\gamma^2} + \left(\frac{1}{k^2}\right)\right]\right\} = -\frac{R(\delta + \gamma\eta)}{2\gamma} + \left(\frac{1}{k}\right).$$

Nous pouvons donc négliger les intégrales contenant $\cos v$, $\sin v$ en comparaison avec celles qui contiennent $\sin v'$, $\cos v'$. Ainsi, à des termes d'ordre $\frac{1}{k}$ près, D_k est égal au produit de CR, où C est une constante numérique, par l'expression

$$\left(\int_0^1 \cos v' \, d\eta\right)^2 + \left(\int_0^1 \sin v' \, d\eta\right)^2.$$

Or on a

$$v' = g_k z_k + \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\frac{(k\gamma)^2}{R}\left[1 + \frac{R(\delta + \gamma\eta)}{k\gamma^2}\right]^{\frac{3}{2}}$$
$$+ \frac{(k\gamma)^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{1}{3}}}\frac{(k\gamma)^{\frac{4}{3}}}{R^{\frac{2}{3}}}\left[1 + \frac{R(\delta + \gamma\eta)}{k\gamma^2}\right] = g_k z_k + \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}\frac{(k\gamma)^2}{R}$$
$$- \frac{2}{3}\frac{(k\gamma)^2}{R}\left[\frac{3}{2}\frac{R(\delta + \gamma\eta)}{k\gamma^2} + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)}{2}\frac{R^2(\delta + \gamma\eta)^2}{k^2\gamma^4} + \left(\frac{1}{k}\right)^3\right]$$
$$+ \frac{(k\gamma)^2(\delta + \gamma\eta)}{k\gamma^2} = g_k z_k + \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}\frac{(k\gamma)^2}{R} - \frac{R(\delta + \gamma\eta)^2}{4\gamma^2} + \left(\frac{1}{k}\right).$$

En introduisant la notation

$$m = g_k z_k + \frac{\pi}{12} + \frac{1}{3}\frac{(k\gamma)^2}{R}$$

nous avons

$$\int_0^1 \cos v' \, d\eta = \int_0^1 \cos\left[m - \frac{R}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma} + \eta\right)^2\right] d\eta + \left(\frac{1}{k}\right), \tag{52}$$

$$\int_0^1 \sin v' \, d\eta = \int_0^1 \sin\left[m - \frac{R}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma} + \eta\right)^2\right] d\eta + \left(\frac{1}{k}\right).$$

En posant

$$A = \int_0^1 \cos\left[m - \frac{R}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma} + \eta\right)^2\right] d\eta, \tag{53}$$

$$B = \int_0^1 \sin\left[m - \frac{R}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma} + \eta\right)^2\right] d\eta$$

nous avons donc à des termes d'ordre $\frac{1}{k}$ près

(54) $$D_k = CR(A^2 + B^2).$$

8. Posons maintenant

(55) $$\xi = \sqrt{\frac{R}{2\pi}}\left(\frac{\delta}{\gamma} + \eta\right),$$

on aura

$$A = \cos m \int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}\xi^2 d\eta + \sin m \int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}\xi^2 d\eta,$$

$$B = \sin m \int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}\xi^2 d\eta - \cos m \int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}\xi^2 d\eta,$$

$$A^2 + B^2 = \left(\int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}\xi^2 d\eta\right)^2 + \left(\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}\xi^2 d\eta\right)^2.$$

Ces intégrales s'expriment par les intégrales $C(\xi)$, $S(\xi)$ de Fresnel

(56) $$C(\xi) = \int_0^\xi \cos\frac{\pi}{2}u^2 du,$$

$$S(\xi) = \int_0^\xi \sin\frac{\pi}{2}u^2 du.$$

On trouve en effet

$$\int_0^1 \cos\frac{\pi}{2}\xi^2 d\eta = \sqrt{\frac{2\pi}{R}}(C(b) - C(a)),$$

$$\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}\xi^2 d\eta = \sqrt{\frac{2\pi}{R}}(S(b) - S(a)),$$

où a, b sont les deux nombres

(57) $$a = \sqrt{\frac{R}{2\pi}}\frac{\delta}{\gamma}, \qquad b = \sqrt{\frac{R}{2\pi}}\left(\frac{\delta}{\gamma} + 1\right).$$

Il s'en suit que D_k est égal à une constante numérique C' multipliée par la somme des carrés des deux différences

$$C(b) - C(a), \qquad S(b) - S(a),$$

à des termes d'ordre $\frac{1}{k}$ près. Donc à la limite D_∞ existe et est donné par la formule

(58) $$D_\infty = C'\{[S(b) - S(a)]^2 + [C(b) - C(a)]^2\}.$$

Nous sommes ainsi parvenu au résultat suivant:

Théorème 1: „Les nombres D_k donnés par les formules (38) convergent vers l'expression D_∞ donnée par (58), lorsque k tend vers l'infini“.

Lorsque γ est différent de zéro — ce que nous supposerons — la limite est un nombre fini différent de zéro.

On sait, en effet, que la courbe

(59) $$x = C(\xi), \qquad y = S(\xi),$$

qui n'est rien autre que la spirale de Cornu bien connue en optique, n'a pas de points doubles.

En posant

$$F(\xi) = C(\xi) + iS(\xi)$$

nous avons

(60) $$F(\xi) = \tfrac{1}{2}(1 + i) + \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\xi^2}}{i\pi\xi^2}(1 + \varepsilon)$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{\xi}$.

9. La convergence de D_k vers sa limite D_∞ est uniforme. En effet, envisageons un domaine (D) borné, p. ex. un prisme rectangulaire fini en coordonnées R, γ, δ et supposons R, γ, δ supérieurs à un nombre positif c. On voit d'abord que les intégrales $\overline{I}$, $\overline{J}$ diffèrent des intégrales I, J des quantités qui tendent uniformément vers zéro avec $\frac{1}{k}$. En second lieu, les expressions K diffèrent des intégrales $\overline{I}$, $\overline{J}$ des quantités qui tendent également uniformément vers zéro avec $\frac{1}{k}$. Ensuite les intégrales contenant v tendent uniformément vers zéro et les intégrales contenant v' tendent uniformément vers les intégrales A et B. La limite D_∞ est uniformément contenue entre deux nombres positifs finis (en valeur absolue) et elle est atteinte uniformément par rapport au domaine fini (D) (parallélopipède).

Il correspond donc au domaine (D) un nombre positif fixe $L>0$ et un entier positif fixe $k=k_0$ tels que les D_k avec $k>k_0$ sont uniformément supérieurs en valeur absolue à ce nombre L (et d'ailleurs de même signe). Il y a donc un nombre fini de surfaces

$$(61) \qquad D_k(z_k^0, z_k^1)=0, \qquad k=1,2,\ldots,k_0$$

qui se coupent deux à deux en des courbes. Pour toute valeur $R=R_0$ du domaine (D) il y a un nombre fini de valeurs exceptionnelles γ_0, δ_0 racines communes de deux équations (61) (au moins).

Dans tout domaine fermé, p. ex. dans un prisme rectangulaire Π qui n'a pas de points communs avec les courbes C_k d'équations (61), où l'on a posé $R=R_0$ tous les D_k sont en valeur absolue supérieurs à un nombre positif N, et dans tout prisme rectangulaire Π' qui n'a pas de points communs avec les C_k avec $k>1$ les D_k correspondants sont en valeur absolue supérieurs à un nombre positif N', en particulier cela a lieu pour tous les γ, δ qui sont situés sur la courbe C_1.

10. Étudions maintenant la convergence des séries. Envisageons la série

$$(62) \qquad s_1=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(\gamma\xi+\delta\tau)}\cdot\overline{\overline{\varphi}}_k(z_k)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(\gamma\xi+\delta\tau)}\cdot H^2\cdot\varphi_k(y)$$

ainsi que la série

$$(63) \qquad s_2=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(\gamma\xi+\delta\tau)}\cdot\overline{\overline{f}}_k(z_k)=\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k(\gamma\xi+\delta\tau)}\cdot f_k(y).$$

Tout d'abord on voit facilement que les intégrales $I_{k,\xi}^{z_k}$, $J_{k,\xi}^{z_k}$ sont bornées dans leur ensemble, car leurs intervalles d'intégration sont de l'ordre de $|z_k^1-z_k^0|$ donc de l'ordre de $k^{\frac{1}{3}}$ et les fonctions σ_1, σ_2 sont de l'ordre de $z^{-\frac{1}{4}}$ donc de l'ordre de $k^{-\frac{1}{3}}$. On voit d'ailleurs tout de suite que ces intégrales sont bornées uniformément en R, γ, δ dans les domaines (D) considérés.

Passons aux expressions (40) des fonctions $\overline{\overline{\varphi}}_k(z_k)$. L'intervalle d'intégration est encore pour les grandes valeurs de k de l'ordre $k^{\frac{1}{3}}$ et cela uniformément σ_1, σ_2 sont uniformément de l'ordre de $k^{-\frac{1}{3}}$. Donc $\overline{\overline{\varphi}}_k(z_k)$ est de l'ordre de $\overline{\overline{D}}_k(z_k^0)$ fois l'ordre de $\frac{g_k^2}{k^2}$ fois $k^{\frac{1}{3}}\cdot k^{\frac{2}{3}}$. Donc $\overline{\overline{\varphi}}_k(z_k)$ est uniformément de l'ordre de $\overline{\overline{D}}_k(z_k^0)$ fois $\frac{1}{k}$.

D'autre part les dérivées σ_1, σ_2' des fonctions σ_1, σ_2 sont de l'ordre de σ_1, σ_2 fois $k^{\frac{2}{3}}$. En effet, on a

$$\sigma_i'(x)=K_i\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}I_{\mp\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)+\sqrt{x}\,I'_{\mp\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{x}\right],$$

$\sqrt{x}$ est de l'ordre de $k^{\frac{2}{3}}$ et I' est de l'ordre de I car on a

$$I_n'(x)=\frac{n}{x}I_n(x)-I_{n+1}(x).$$

Donc les derivées $\overline{\overline{\varphi}}_k'(z_k)$ sont de l'ordre de $\overline{\overline{\varphi}}_k(z_k)$ fois $k^{\frac{2}{3}}$.

Il résulte de la formule (22) que $\overline{\overline{f}}_k$ est de l'ordre de $\overline{\overline{\varphi}}_k$ fois $\frac{1}{k}$ et que $\overline{\overline{f}}_k'$ est de l'ordre de $\overline{\overline{\varphi}}_k$ fois $\frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$, tout cela uniformément.

Soit K un nombre positif arbitraire.

Il existe toujours des nombres positifs $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{K-1}$ tels que les circonstances suivantes ont lieu:

1) les fonctions $\overline{\overline{\varphi}}_i$, $i=1,\ldots K-1$ ont les nombres majorants Φ_i,

2) leurs dérivées $\overline{\overline{\varphi}}_i'$, $i=1,\ldots K-1$ ont les nombres majorants $i^{\frac{2}{3}}\Phi_i$, $i=1,\ldots K-1$,

3) les fonctions $\overline{\overline{f}}_i$, $i=1,\ldots K-1$ ont les nombres majorants $\frac{1}{i}\Phi_i$,

et enfin

4) les dérivées $\overline{\overline{f}}_i'$ ont les nombres majorants $\frac{1}{i^{\frac{1}{3}}}\Phi_i$.

Or il résulte de ce qui précède que l'on peut choisir un nombre entier K' uniformément pour le domaine (D) et tel qu'il existe un nombre positif N fixe (indépendant du point de (D)) possédant les propriétés suivantes:

Les Φ_i ayant été choisis conformément à ce qui précède et uniformément par rapport à (D) (ce qui est évidemment possible) pour un nombre K arbitraire mais non inférieur à K', $K\geqq K'$, la fonction $\overline{\overline{D}}_k(z_k)$ pour $k=K$ sera une somme de $2K-2$ termes dont les nombres majorants sont $\Phi_l\cdot\Phi_m\cdot m$ fois un nombre indépendant de m et de K.

La fonction $\overline{\overline{\varphi}}_K(z_k)$ possède un nombre majorant Φ_K donné par la relation de récurrence[1])

[1]) Cette démonstration m'a été suggérée par les travaux intéressants de M. Odquist: „Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten". Dissertation, Stockholm 1928,

„Über die Randwertaufgaben der Hydromechanik zäher Flüssigkeiten". Mathematische Zeitschrift T. 32, 1930.

(64) $$\Phi_K = N \sum_{i=1}^{K-1} \Phi_i \Phi_{K-i},$$

où N est aussi indépendant de K.

De plus ce nombre N est tel que les fonctions

$$\overline{\overline{\varphi}}_K(z_K), \qquad \overline{\overline{f}}_K(z_K), \qquad \overline{\overline{f}}'_K(z_K)$$

possèdent les nombres majorants

$$K^{\frac{2}{3}} \Phi_K, \qquad \frac{1}{K} \Phi_K, \qquad \frac{1}{K^{\frac{1}{3}}} \Phi_K.$$

Donc les nombres Φ_i existent certainement pour $k \leqq K'$, et pour $k > K'$ ils sont déterminés par récurrence au moyen de la formule (64). N, K' et les Φ peuvent être déterminés uniformément pour les γ, δ du rectangle envisagé, c'est à dire, sont indépendants du choix du point du rectangle.

Nous obtenons donc la série majorante S_1 de la série s_1

(65) $$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \Phi_k \cdot \varepsilon^k,$$

où l'on a posé

$$E_k = e^{-k(\gamma\xi+\delta\tau)} = E_1^k.$$

Multiplions S_1 par soi-même. On aura

$$S_1^2 = (E_1 \varepsilon \Phi_1 + E_2 \varepsilon^2 \Phi_2 + \ldots)(E_1 \varepsilon \Phi_1 + E_2 \varepsilon^2 \Phi_2 + \ldots)$$
$$= \frac{1}{N}(E_2 \varepsilon^2 \Phi_2 + E_3 \varepsilon^3 \Phi_3 + \ldots) = \frac{1}{N}(S_1 - E_1 \varepsilon \Phi_1).$$

Donc S_1 satisfait à l'équation du second degré

(66) $$N S_1^2 - S_1 + E_1 \varepsilon \Phi_1 = 0.$$

Cette équation possède une solution unique s'annulant au point $\varepsilon = 0$ holomorphe et ayant un développement en série à coëfficients positifs. Ce développement s'obtient en formant la série

$$S_1 = \frac{1}{2N} - \sqrt{\frac{1 - 4NE_1\Phi_1\varepsilon}{4N^2}} = \frac{1}{2N}\{1 - (1 - 4NE_1\Phi_1\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\}$$
$$= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \varepsilon^k \binom{\frac{1}{2}}{k} E_1^k \Phi_1^k (4N)^k.$$

Le rayon de convergence de la série majorante (65) est donc égal à

(67) $$\varrho = \frac{1}{4NE_1\Phi_1}.$$

Nous pouvons par suite énoncer le théorème suivant:

Théorème 2: „La série (4) en Ψ, où les Ψ ont la forme (6), converge absolument et uniformément avec toutes ses séries dérivées en x, y, t pourvu que ε satisfasse à l'inégalité

(68) $$\varepsilon < \varrho.$$

Elle est une fonction holomorphe de ces variables dans le domaine $R(x) \geqq 0$, $R(t) \geqq 0$, $|y| \leqq A$. La convergence est d'ailleurs uniforme par rapport aux R, γ, δ du parallèlepipède dont il a été question, et elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles (3) et aux conditions aux limites pourvu que R, γ, δ soient situés sur la surface $D_1 = 0$".

11. Étudions maintenant les racines de l'équation transcendante

(69) $$D_1 \equiv I_1(z_1^1) J_2(z_1^1) - I_2(z_1^1) J_1(z_1^1) = 0.$$

Nous supposerons γ arbitraire mais contenu entre 0 (exclu) et π (exclu) (pour faciliter la discussion). Nous montrerons l'existence des δ suffisamment grands satisfaisant à l'équation (69). R sera supposé fixe > 0.

Pour des grandes valeurs de δ nous avons asymptotiquement à des facteurs constants près

$$\sigma_1(u) = \frac{1}{u^{\frac{1}{4}}}\left\{\cos\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) + \varepsilon_1(u)\right\},$$

$$\sigma_2(u) = \frac{1}{u^{\frac{1}{4}}}\left\{\sin\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right) + \varepsilon_2(u)\right\},$$

les ε étant de l'ordre de $\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$. Pour former le déterminant D_1 nous pouvons d'ailleurs remplaçer $\sigma_2(u)$ par $\sigma_3(u)$ et $+\frac{\pi}{12}$ par $-\frac{\pi}{12}$.

Nous introduisons la nouvelle variable indépendante ζ définie par

$$u = \zeta + z_1^0$$

et nous posons

$$\varepsilon = (\gamma R)^{\frac{1}{3}}.$$

Nous avons alors

$$I_1=\int_0^\varepsilon \frac{1}{z_1^{0\frac14}\left[1+\frac{\zeta}{z_1^0}\right]^{\frac14}} \sin g_1(\varepsilon-\zeta)\left\{\cos\left[\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}-\frac{\pi}{12}\right]+\frac{1}{z_1^{0\frac32}}\right\}d\zeta.$$

Cette intégrale diffère donc à des quantités près d'ordre $\frac{1}{z_1^{0\frac54}}$ du produit de $\frac{1}{z_1^{0\frac14}}$ par l'intégrale

(70) $$\overline{I}_1=\int_0^\varepsilon \sin g_1(\varepsilon-\zeta)\cos\left[\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}-\frac{\pi}{12}\right]d\zeta.$$

On a de même les intégrales

(71) $$\overline{I}_2=\int_0^\varepsilon \sin g_1(\varepsilon-\zeta)\sin\left[\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}-\frac{\pi}{12}\right]d\zeta,$$

$$\overline{J}_1=\int_0^\varepsilon \cos g_1(\varepsilon-\zeta)\cos\left[\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}-\frac{\pi}{12}\right]d\zeta,$$

$$\overline{J}_2=\int_0^\varepsilon \cos g_1(\varepsilon-\zeta)\sin\left[\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}-\frac{\pi}{12}\right]d\zeta.$$

Pour évaluer ces intégrales on posera

(72) $$m=g_1\varepsilon-\frac{\pi}{12},\qquad f(\zeta)=\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}-g_1\zeta.$$

On a

$$2\overline{I}_1=\int_0^\varepsilon \sin\left[g_1(\varepsilon-\zeta)+\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}-\frac{\pi}{12}\right]d\zeta$$

$$+\int_0^\varepsilon \sin\left[g_1(\varepsilon-\zeta)-\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}+\frac{\pi}{12}\right]d\zeta.$$

Or on a

$$\int_0^\varepsilon \sin\left[g_1(\varepsilon-\zeta)+\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}-\frac{\pi}{12}\right]d\zeta=\int_0^\varepsilon \sin[m+f(\zeta)]\frac{f'(\zeta)\,d\zeta}{f'(\zeta)},$$

car $f'(\zeta)$ est positif pour les grandes valeurs de z_1^0, car

$$f'(\zeta)=(z_1^0+\zeta)^{\frac12}-g_1,\qquad f''(\zeta)=\tfrac12(z_1^0+\zeta)^{-\frac12}.$$

En intégrant par parties on a

$$-\frac{\cos(m+f(\zeta))}{f'(\zeta)}\Bigg|_0^\varepsilon-\int_0^\varepsilon\frac{\cos(m+f(\zeta))}{|f'(\zeta)|^2}f''(\zeta)\,d\zeta.$$

La seconde intégrale est de l'ordre de $\frac{1}{z_1^{0\frac32}}$.

De même nous avons

$$\int_0^\varepsilon \sin\left[g_1(\varepsilon-\zeta)-\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}+\frac{\pi}{12}\right]d\zeta=\int_0^\varepsilon \sin\left[\overline{m}+\overline{f}(\zeta)\right]\frac{\overline{f}'(\zeta)}{\overline{f}'(\zeta)}d\zeta,$$

où nous avons posé

$$\overline{m}=g_1\varepsilon+\frac{\pi}{12},\qquad \overline{f}(\zeta)=-g_1\zeta-\tfrac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32},$$

et $\overline{f}(\zeta)$ est négatif pour des grandes valeurs de z_1^0 et $\overline{f}'(\zeta)=-g_1-(z_1^0+\zeta)^{\frac12}$ est de même négatif et décroissant. L'intégrale est égale à

$$-\frac{\cos[\overline{m}+\overline{f}(\zeta)]}{\overline{f}'(\zeta)}\Bigg|_0^\varepsilon-\int_0^\varepsilon\frac{\cos[\overline{m}+\overline{f}(\zeta)]}{[\overline{f}'(\zeta)]^2}\overline{f}''(\zeta)\,d\zeta.$$

La seconde intégrale est de l'ordre de $\frac{1}{z_1^{0\frac32}}$. Donc à des termes d'ordre $\frac{1}{z_1^{0\frac32}}$ près $2\overline{I}_1$ est égal à

(73) $$-\frac{\cos[m+f(\zeta)]}{f'(\zeta)}\Bigg|_0^\varepsilon-\frac{\cos[\overline{m}+\overline{f}(\zeta)]}{\overline{f}'(\zeta)}\Bigg|_0^\varepsilon.$$

On obtient de même avec la même approximation les expressions approchées des autres intégrales (71).

On a

(74) $$2\overline{I}_2=\int_0^\varepsilon \cos\left[g_1(\varepsilon-\zeta)-\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}+\frac{\pi}{12}\right]d\zeta$$

$$-\int_0^\varepsilon \cos\left[g_1(\varepsilon-\zeta)+\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}-\frac{\pi}{12}\right]d\zeta,$$

$$2\overline{J}_1=\int_0^\varepsilon \cos\left[g_1(\varepsilon-\zeta)+\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}-\frac{\pi}{12}\right]d\zeta$$

$$+\int_0^\varepsilon \cos\left[g_1(\varepsilon-\zeta)-\frac23(z_1^0+\zeta)^{\frac32}+\frac{\pi}{12}\right]d\zeta,$$

$$2\bar{J}_2 = \int_0^\varepsilon \sin\left[g_1(\varepsilon-\zeta) + \frac{2}{3}(z_1^0+\zeta)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12}\right] d\zeta$$
$$+ \int_0^\varepsilon \sin\left[\frac{2}{3}(z_1^0+\zeta)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{12} - g_1(\varepsilon-\zeta)\right] d\zeta.$$

À des quantités d'ordre $\frac{1}{z_1^{0\frac{3}{2}}}$ près les membres à droite de ces formules sont égaux aux expressions

$$\frac{\sin[\bar{m}+\bar{f}(\zeta)]}{\bar{f}'(\zeta)}\Big|_0^\varepsilon - \frac{\sin[m+f(\zeta)]}{f'(\zeta)}\Big|_0^\varepsilon,$$
$$(75)\qquad \frac{\sin[\bar{m}+\bar{f}(\zeta)]}{\bar{f}'(\zeta)}\Big|_0^\varepsilon + \frac{\sin[m+f(\zeta)]}{f'(\zeta)}\Big|_0^\varepsilon,$$
$$-\frac{\cos[m+f(\zeta)]}{f'(\zeta)}\Big|_0^\varepsilon + \frac{\cos[\bar{m}+\bar{f}(\zeta)]}{\bar{f}'(\zeta)}\Big|_0^\varepsilon.$$

12. Les expressions (73), (75) sont évidemment de l'ordre de $\frac{1}{z_1^{0\frac{1}{2}}}$. Donc en ne conservant que ces expressions dans les développements des $\bar{I}$, $\bar{J}$ on néglige dans le déterminant des $\bar{I}$, $\bar{J}$

$$\bar{D} = \bar{I}_1\bar{J}_2 - \bar{I}_2\bar{J}_1$$

des termes d'ordre $\frac{1}{z_1^{0^2}}$.

En multipliant D_1 par $z_1^{0\frac{1}{2}}$ on obtient une expression qui diffère du déterminant $\bar{D}$ par des termes d'ordre $\frac{1}{z_1^{0\frac{3}{2}}}$. Le déterminant $\bar{\bar{D}}$ des quantités (73), (75) diffère du déterminant $\bar{D}$ par des termes d'ordre $\frac{1}{z_1^{0^2}}$, donc $\bar{\bar{D}}$ diffère de $z_1^{0\frac{1}{2}} D_1$ par des termes d'ordre $\frac{1}{z_1^{0\frac{3}{2}}}$.

Or le déterminant $\bar{\bar{D}}$ des quantités (73), (75) est

$$(76)\quad \bar{\bar{D}} = \left(\frac{\cos[m+f(\zeta)]}{f'(\zeta)}\Big|_0^\varepsilon\right)^2 - \left(\frac{\cos[\bar{m}+\bar{f}(\zeta)]}{\bar{f}'(\zeta)}\Big|_0^\varepsilon\right)^2 + \left(\frac{\sin[m+f(\zeta)]}{f'(\zeta)}\Big|_0^\varepsilon\right)^2 - \left(\frac{\sin[\bar{m}+\bar{f}(\zeta)]}{\bar{f}'(\zeta)}\Big|_0^\varepsilon\right)^2.$$

Ceci est égal à

$$\frac{1}{(f'(\varepsilon))^2} + \frac{1}{(f'(0))^2} - \frac{2}{f'(\varepsilon)f'(0)}\cos[f(\varepsilon)-f(0)]$$
$$-\frac{1}{(\bar{f}'(\varepsilon))^2} - \frac{1}{(\bar{f}'(0))^2} + \frac{2}{\bar{f}'(\varepsilon)\bar{f}'(0)}\cos[\bar{f}(\varepsilon)-\bar{f}(0)].$$

Or on a

$$f'(\varepsilon) = f'(0) + \varepsilon f''(\theta\varepsilon), \qquad 0 \subset \theta \subset 1,$$
$$\bar{f}'(\varepsilon) = \bar{f}'(0) + \varepsilon \bar{f}''(\theta'\varepsilon), \qquad 0 \subset \theta' \subset 1,$$

donc en remplaçant dans $\bar{\bar{D}}$ $f'(\varepsilon)$ par $f'(0)$ et $\bar{f}'(\varepsilon)$ par $\bar{f}'(0)$ on commet une erreur d'ordre

$$\frac{f''(0)}{f'(0)^3} \quad \text{resp.} \quad \frac{\bar{f}''(0)}{\bar{f}'(0)^3},$$

donc d'ordre $\frac{1}{z_1^{0^2}}$. De même $\bar{\bar{D}}$ est à des quantités d'ordre $\frac{1}{z_1^{0^2}}$ près égal à

$$\frac{4}{(\sqrt{z_1^0}-g_1)^2}\sin^2\left[\frac{f(\varepsilon)-f(0)}{2}\right] - \frac{4}{(\sqrt{z_1^0}+g_1)^2}\sin^2\left[\frac{\bar{f}(\varepsilon)-\bar{f}(0)}{2}\right].$$

Nous obtenons donc entre γ et δ une équation de la forme

$$(77)\qquad \frac{\sin^2\frac{f(\varepsilon)-f(0)}{2}}{(\sqrt{z_1^0}-g_1)^2} - \frac{\sin^2\frac{\bar{f}(\varepsilon)-\bar{f}(0)}{2}}{(\sqrt{z_1^0}+g_1)^2} + \frac{1}{\sqrt{z_1^{0^3}}} f\left(\frac{1}{\sqrt{z_1^0}}, \varepsilon\right) = 0,$$

où f est c o n t i n u au voisinage des valeurs 0 des arguments.

Nous avons

$$f(\varepsilon) - f(0) = \varepsilon f'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(\theta\varepsilon), \qquad 0 \subset \theta \subset \varepsilon,$$
$$\bar{f}(\varepsilon) - \bar{f}(0) = \varepsilon \bar{f}'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \bar{f}''(\theta'\varepsilon), \qquad 0 \subset \theta' \subset \varepsilon,$$

donc à des quantités d'ordre $\frac{1}{z_1^{0\frac{3}{2}}}$ près les deux premiers membres de (77) sont égaux à

$$\frac{\sin^2\frac{\varepsilon f'(0)}{2}}{(\sqrt{z_1^0}-g_1)^2} - \frac{\sin^2\frac{\varepsilon\bar{f}'(0)}{2}}{(\sqrt{z_1^0}+g_1)^2}.$$

En posant

$$(78)\qquad \varepsilon\sqrt{z_1^0} = \sqrt{R\delta+\gamma^2} = \tau,$$

et en se rappelant qu'on a

$$\varepsilon g_1 = -\gamma$$

on a donc l'équation transcendante suivante entre τ, γ:

$$(79) \qquad \frac{\sin^2 \frac{\tau+\gamma}{2}}{(\tau+\gamma)^2} - \frac{\sin^2 \frac{\tau-\gamma}{2}}{(\tau-\gamma)^2} + \frac{1}{\tau^3} f\left(\frac{1}{\tau}, \gamma\right) = 0,$$

$f\left(\frac{1}{\tau}, \gamma\right)$ étant continu, limité au voisinage des arguments nuls.

13. Il est maintenant facile d'obtenir les racines de (79) pour des grandes valeurs de δ, donc de τ.

Soit τ_0 une racine de l'équation

$$(80) \qquad \frac{\sin^2 \frac{\tau+\gamma}{2}}{(\tau+\gamma)^2} - \frac{\sin^2 \frac{\tau-\gamma}{2}}{(\tau-\gamma)^2} = 0.$$

On a

$$\frac{\sin \frac{\tau+\gamma}{2}}{\tau+\gamma} - \frac{\sin \frac{\tau-\gamma}{2}}{\tau-\gamma} = \frac{1}{\tau^2-\gamma^2}\Big\{\left(\sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right.$$

$$\left. + \cos\frac{\tau}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)(\tau-\gamma) - \left(\sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\tau}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)(\tau+\gamma)\Big\}$$

$$= \frac{1}{\tau^2-\gamma^2}\left\{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\tau}{2}\tau - 2\sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\gamma\right\},$$

$$\frac{\sin \frac{\tau+\gamma}{2}}{\tau+\gamma} + \frac{\sin \frac{\tau-\gamma}{2}}{\tau-\gamma} = \frac{1}{\tau^2-\gamma^2}\left\{2\sin\frac{\tau}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\tau - 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\tau}{2}\gamma\right\}.$$

Envisageons les deux équations

$$(81) \qquad \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\cdot\tau - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\gamma = 0,$$

$$(82) \qquad \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\cdot\gamma - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\tau = 0.$$

Quant à la seconde équation, pour toute valeur de γ contenue entre 0 et π exclusivement il y a une infinité des racines $\tau = \tau_0$, car en posant

$$(83) \qquad \frac{\tau}{2} = 2s\pi + \xi,$$

où s est un entier positif arbitraire, $\operatorname{tg}\frac{\tau}{2} = \xi$ augmente de 0 à $+\infty$, lorsque ξ augmente de 0 à $\frac{\pi}{2}$. On a d'ailleurs

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}{\tau} = \frac{1}{\tau^2}\left\{\frac{\tau}{2\cos^2\frac{\tau}{2}} - \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\right\} = \frac{1}{\tau^2\cos^2\frac{\tau}{2}}\left\{\frac{\tau}{2} - \frac{\sin\tau}{2}\right\} > 0,$$

il y a donc pour chaque s une racine exactement. On a

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\gamma}\cdot\tau = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\gamma}[4s\pi + 2\xi],$$

donc ξ est pour les grandes valeurs de s voisin de $\frac{\pi}{2}$,

$$(84) \qquad \xi \cong \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\gamma}\cdot 4s\pi\right].$$

Quant à l'équation (81), lorsque τ est grand, $\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}$ est voisin de zéro. Plus précisément on a

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\gamma\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{4s\pi + 2\xi}.$$

$$\operatorname{tg}\xi \cong \operatorname{arctg}\frac{\gamma\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{4s\pi}.$$

Posons maintenant

$$\tau = \tau_0 + \eta.$$

τ_0 est voisin de $4s\pi + \pi$,

lorsqu'il s'agit de la seconde équation (82).

On a

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\tau_0+\gamma}{2} + \frac{\eta}{2}\right)}{(\tau_0+\gamma+\eta)^2} - \frac{\sin^2\left(\frac{\tau_0-\gamma}{2} + \frac{\eta}{2}\right)}{(\tau_0-\gamma+\eta)^2}$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{\tau_0+\gamma}{2}\cos\frac{\eta}{2} + \cos\frac{\tau_0+\gamma}{2}\sin\frac{\eta}{2}\right)^2}{(\tau_0+\gamma)^2\left[1+\frac{\eta}{\tau_0+\gamma}\right]^2} - \frac{\left(\sin\frac{\tau_0-\gamma}{2}\cos\frac{\eta}{2} + \cos\frac{\tau_0-\gamma}{2}\sin\frac{\eta}{2}\right)^2}{(\tau_0-\gamma)^2\left[1+\frac{\eta}{\tau_0-\gamma}\right]^2}$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{\tau_0+\gamma}{2} + \frac{\eta}{2}\cos\frac{\tau_0+\gamma}{2} + (\eta)_2\right)^2}{(\tau_0+\gamma)^2}\left[1 - \frac{2\eta}{\tau_0+\gamma} + \left(\frac{\eta}{\tau_0}\right)_2\right]$$

$$- \frac{\left(\sin\frac{\tau_0-\gamma}{2} + \frac{\eta}{2}\cos\frac{\tau_0-\gamma}{2} + (\eta)_2\right)}{(\tau_0-\gamma)^2}\left[1 - \frac{2\eta}{\tau_0-\gamma} + \left(\frac{\eta}{\tau_0}\right)_2\right]$$

$$= \frac{\eta}{2}\left\{\frac{\sin(\tau_0+\gamma)}{(\tau_0+\gamma)^2} - \frac{\sin(\tau_0-\gamma)}{(\tau_0-\gamma)^2}\right\} + \eta^2 f_1\left(\frac{1}{\tau_0}, \eta\right) + \frac{\eta}{\tau_0^3} f_2\left(\eta, \frac{1}{\tau_0}\right),$$

f_1, f_2 étant des fonctions continues pour les valeurs nulles des arguments.

Or $\sin(\tau_0+\gamma)$ est voisin de $-\sin\gamma$ et $\sin(\tau_0-\gamma)$ est voisin de $\sin\gamma$.

Donc on obtient entre η et τ_0 pour tout γ positif situé entre 0 et π une équation transcendante de la forme

$$-\eta\sin\gamma + f\left(\eta, \frac{1}{\tau_0}\right) = 0, \tag{85}$$

où f est somme d'un terme qui tend vers zéro avec $\frac{1}{\tau_0}$ et d'un terme d'ordre η^2.

Donc, lorsque η change de signe, en passant des valeurs négatives aux valeurs positives pour un τ_0 donné suffisamment grand, il y a une racine $\eta = \eta_0$ de l'équation (85), car le membre à gauche de (85) change de signe.

Donc pour un γ arbitraire qui n'est pas de la forme $s\pi$, s entier il existe une infinité de valeurs positives de δ racines de l'équation $D_1 = 0$, ce dont il s'agissait de donner la démonstration.

14. Il y aurait maintenant lieu d'étudier les valeurs exceptionnelles de γ, pour lesquelles deux des équations $D_l = 0$ (pour R donné) s'annulent, et en particulier les γ qui annulent outre D_1 aussi un des D ultérieurs. Cette étude semble difficile.

Encore plus difficile est l'étude du cas classique de γ imaginaire, donc des perturbations périodiques. Il faudrait partir des expressions (5) et voir tout que se passe lorsque l'on a $k = 2h$ etc. Je me propose d'étudier ces choses dans des travaux ultérieurs.

Sur les transformations isomorphiques d'une variété à connexion affine

(Przekształcenia izomorficzne przestrzeni o koneksji afinalnej)

par

W. Ślebodziński

Une transformation ponctuelle d'une variété à connexion affine est dite isomorphique, quand elle conserve la connexion de l'espace. Cette notion est due à M. Cartan qui en 1927, dans son Mémoire [1]) sur les espaces de groupe a étudié les groupes d'isomorphie d'une classe importante de variétés à connexion affine. Dans la même année MM. Eisenhart et Knebelman [2]), en partant d'un point de vue tout différent, ont donné quelques indications sur les transformations isomorphiques d'une variété sans torsion, en leur donnant le nom de collinéations affines. Le présent article a pour but der trouver les conditions pour qu'une variété à connexion affine admette une transformation infinitésimale isomorphique. Les deux premiers n^{os} sont consacrés à une variété quelconque à connexion affine, les n^{os} **3** et **4** contiennent quelques applications aux variétés de M. Cartan (variétés dont la courbure et la torsion se conservent par le transport parallèle) et aux variétés riemanniennes.

1. Imaginons une variété à connexion affine A_n à n dimensions. Désignons par x^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ les coordonnées d'un point arbitraire de la variété A_n, par $\Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda}$ les coefficients du déplacement parallèle déterminé par

[1]) E. Cartan, La Géométrie des groupes de transf., J. de Math. t. 6. 1927. V. aussi du même Auteur: Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, Bull. Soc. Math. t. 54, 1926; t. 55, 1927.

[2]) L. P. Eisenhart et M. S. Knebelman, Displacements in a geometry of paths, Proc. of Nat. Acad. of Sc. vol. 13, 1927. V. aussi L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, 1927, p. 126.