W szczególności otrzymuje autor wyniki następujące:

1° Jest $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, x\sqrt[4]{A(t)} > 0$ dla każdej całki, z wyjątkiem conajwyżej dla jednej[1]). Podany jest przykład, w którym ta granica wyższa jest dla każdej całki skończona i różna od 0, w innym przykładzie istnieje całka wyjątkowa, dla której $\lim\limits_{t\to+\infty} x\sqrt[4]{A(t)} = 0$.

2° Istnieje często „całka szczególna minimalna", która dąży do 0 szybciej od wszystkich innych. I tak np. całka ogólna nie zawsze dąży do 0 gdy $t \to +\infty$, zawsze jednak istnieje całka szczególna $x_1(t)$ która do 0 dąży, przyczem $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, x_1\sqrt[4]{A(t)} > 0$ i może być skończona.

3° Jeśli wszystkie przedziały pomiędzy zerami całek są „zwykłe", funkcja $A(t)$ różniczkowalna, a stosunek maximum do minimum pochodnej $A'(t)$ w przedziale ograniczony, to każda całka dąży do 0, gdy $t\to+\infty$, szybciej niż $[A(t)]^{-\alpha}$ $(0<\alpha<\frac{1}{4})$ ale wolniej niż $[A(t)]^{\alpha-\frac{1}{2}}$.

[1]) Nie odróżniamy od siebie dwóch całek linjowo zależnych.

Über vollständige Systeme partieller Differentialgleichungen.

(O zupełnych układach równań różniczkowych cząstkowych).

Von

A. Hoborski.

§ 1. Es sei ein System von partiellen Differentialgleichungen:

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, q) \tag{1}$$

gegeben, wobei $q < n$ ist. Die unabhängigen Variabeln schreiben wir mit oberen Indizes $(x^1, x^2, \dots x^n)$ versehen; die ξ_k^i $(i = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots q)$ hängen nur von $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ab. Die Gleichungen (1) sollen linear unabhängig sein, wir setzen daher voraus, dass die Matrix

$$\| \xi_k^i \| \tag{2}$$

vom Range q ist in einem n-dimensionalen Gebiete G. Weiter nehmen wir an, daß das System (1) in G vollständig ist, es existieren also $\binom{q}{2}\cdot q$ Funktionen ω_{kj}^s $(k, j, s = 1, 2, \dots, q;\ k < j)$ von $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ im Gebiete G so, daß für die Klammerausdrücke folgende Relationen:

$$(X_k, X_j) f = \sum_{s=1}^{q} \omega_{kj}^s \cdot X_s f \qquad (k, j = 1, 2, \dots, q;\ k < j) \tag{3}$$

zutreffen, wenn f eine im Gebiete G zweimal stetig differenzierbare Funktion und ξ_k^i $(i = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, q)$ in G stetig differenzierbar sind.

Auf meine Veranlassung hat Herr M. Taffet die Existenz der $(n-q)$ unabhängigen Lösungen des vollständigen Systems (1) untersucht und hat einen interessanten, bis jetzt noch nicht veröffentlichten Satz gefunden, der ungefähr folgendes außagt: Gehören die Funktionen ξ_k^i der Klaße C^q an im Punkte $(\underset{0}{x}^1, \underset{0}{x}^2, \dots, \underset{0}{x}^n)$ und seiner Umgebung und ist daselbst z. B. die Determinante

$$\left| \begin{matrix} \xi_k^j \\ j, k = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right|$$

stets von Null werschieden, so existieren $(n-q)$ unabhängige Lösungen des Systems.

§ 2. Setzen wir voraus, daß das System (1) linear unabhängig und vollständig im Gebiete G ist. Wenn

$$\omega^s_{kj} = 0 \qquad (k, j, s, = 1, 2, \dots, q;\ k < j) \tag{4}$$

in G sind, so wird das System ein Jacobisches System genannt. Solche Systeme besitzen zwei Eigenschaften, die ihre Integration erleichtern:

I. Sind:

$$X_1 f = 0, \quad X_2 f = 0, \dots, X_k f = 0 \quad (k = 1, 2, ..1, q-1) \tag{5}$$

k Gleichungen des Jacobischen Systems und bezeichnen:

$$\varphi_{k,k+1}, \varphi_{k,k+2}, \dots, \varphi_{k,n} \tag{6}$$

alle unabhängige Lösungen des (vollständigen) Systems (5), so sind

$$X_{k+1}(\varphi_{k,j}) \qquad (j = k+1,\ k+2, \dots, n) \tag{7}$$

wieder Lösungen des Systems (5).

II. Um die weitere Gleichung:

$$X_{k+1} f = 0 \tag{8}$$

des Jacobischen Systems zu integrieren, genügt es eine Funktion Π der Lösungen (6) zu finden, die die Gleichung:

$$X_{k+1}\Pi = \sum_{j=k+1}^{n} X_{k+1}(\varphi_{k,j}) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{k,j}} = 0 \tag{9}$$

erfüllt. Infolge (I) darf man in der Gleichung (9) die $\varphi_{k,j}$ als unabhängige Variabeln ansehen.

Es entsteht die Frage, ob und in welchem Falle auch andere vollständigen Systeme diese Eingenschaften besitzen. Damit befaßte sich vor vielen Jahren Herr Prof. Żorawski[1]); seine Untersuchungen führten ihn zur Definition *eines in der Richtung* (1, 2,..., q) *integrablen Systems.* Herr Żorawski nennt das System (1) in der Richtung (1, 2,..., q integrabel, wenn:

$$(X_i,\ X_k) f = \sum_{s=1}^{k-1} \omega^s_{ik} X_s f \qquad \begin{pmatrix} k = 2,\ 3, \dots, q \\ i = 1,\ 2, ., \ k-1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

ist. Es ist leicht zu ersehen, daß in diesem Falle das System (1) die obigen Eigenschaften I und II besitzt. Das Jacobische System ist in *jeder* Richtung integrabel. Herr Żorawski gab in der zitierten Abhandlung eine Methode, um

[1]) K. Żorawski: Über die Integration von Systemen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung etc. (in polnischer Sprache). Prace Matematyczno-Fizyczne. Bd. III. Warszawa 1892. Ich benütze oben einige Bezeichnungen dieser Abhandlung.

jedes vollständige System in ein äquivalentes, in der Richtung (1, 2,..., q) integrables System zu überführen.

§ 3. Ich möchte hier eine andere Definition eines in der Richtung (1, 2,..., q) integrablen System (1) geben. Zu diesem Zwecke konzentrieren wir unser Augenmerk auf die Eigenschaft II und lassen die Eigenschaft I fallen. Integrieren wir zuerst die Gleichung:

$$X_1 f = 0; \tag{11}$$

es seien:

$$\varphi_{1,2},\ \varphi_{1,3}, \dots, \varphi_{1,n} \tag{12}$$

alle ihre unabhängigen Lösungen. Darauf suchen wir eine solche Funktion Π der Lösungen (12), dass sie der Gleichung:

$$X_2 \Pi = \sum_{j=2}^{n} X_2(\varphi_{1,j}) \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{1,j}} = 0 \tag{13}$$

genügt. Damit die Eigenschaft II der Gleichung (13) zukommt, genügt es zu fordern, dass die Verhältnisse der Koeffizienten

$$X_2(\varphi_{1,j}) \qquad j = 2,\ 3, \dots, n) \tag{14}$$

die Gleichung (11) erfüllen. Um eine entsprechende Bedingung dafür zu erhalten, wollen wir betonen, dass nicht alle Ausdrücke (14) identisch Null sein können; wären nämlich alle Ausdrücke (14) identisch Null, so müsste eine Funktion $\lambda(x^1, x^2, \dots, x^n)$ existieren von der Eigenschaft:

$$X_2 f = \lambda \cdot X_1 f,$$

was der Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit des Systems widerspricht. Wir nehmen also an, dass eben

$$X_2(\varphi_{1,2}) \neq 0 \tag{14 bis}$$

in G ist. Es sollen also die Verhältnisse:

$$\frac{X_2(\varphi_{1,j})}{X_2(\varphi_{1,2})} \qquad (j = 3,\ 4, \dots, n) \tag{15}$$

Lösungen von (11) sein, folglich sollen die Gleichungen

$$X_1\left(\frac{X_2(\varphi_{1,j})}{X_2(\varphi_{1,2})}\right) = 0 \quad (j = 3,\ 4, \dots, n) \tag{16}$$

erfüllt sein. Aus (16) erhalten wir:

$$X_2(\varphi_{1,2})\, X_1(X_2(\varphi_{1,j})) - X_2(\varphi_{1,j})\, X_1(X_2(\varphi_{1,2})) = 0 \quad (j = 3, 4, \dots, n), \tag{17}$$

wovon wir die selbstverständliche Gleichung:

$$X_2(\varphi_{1,2})\, X_2(X_1(\varphi_{1,j})) - X_2(\varphi_{1,j})\, X_2(X_1(\varphi_{1,2})) = 0 \tag{18}$$

subtrahieren. Wir erhalten also:

$$X_2(\varphi_{1,2})(X_1, X_2)\,\varphi_{1,j} - X_2(\varphi_{1,j})\,(X_1, X_2)\,\varphi_{1,2} = 0$$

oder

$$(X_1, X_2)\,\varphi_{1,j} = \frac{(X_1, X_2)\,\varphi_{1,2}}{X_2(\varphi_{1,2})} \cdot X_2(\varphi_{1,j}) \qquad (j = 3, 4, \ldots, n). \tag{19}$$

Wenn wir also voraussetzen, dass:

$$(X_1, X_2) f = \omega_{12}^1 X_1 f + \omega_{12}^2 X_2 f \tag{20}$$

ist, so ist (19) erfüllt. Aus (19) folgt dann umgekehrt, dass in der Gleichung (13) die $\varphi_{1,j}$ als unabhängige Veränderliche gelten können. Es seien also:

$$\varphi_{2,3},\ \varphi_{2,4}, \ldots,\ \varphi_{2,n} \tag{21}$$

unabhängige Lösungen von (13); da sie Funktionen von $\varphi_{1,j}$ sind, so sind sie auch Lösungen des nach (20) vollständigen Systems:

$$X_1 f = 0, \qquad X_2 f = 0. \tag{22}$$

Nachher suchen wir eine Funktion $\Omega(\varphi_{2,3}, \ldots, \varphi_{2,n})$, die der nächsten Gleichung genügt, also für welche:

$$X_3\,\Omega = \sum_{3=j}^{n} X_3(\varphi_{2,j}) \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_{2,j}} = 0\,. \tag{23}$$

Damit hier die $\varphi_{2,j}$ als einzige unabhändige Veränderliche angesehen werden können, müssen bei entsprechender Voraussetzung die Verhältnisse

$$\frac{X_3(\varphi_{2,j})}{X_3(\varphi_{2,3})} \qquad (j = 4, 5, \ldots, n) \tag{24}$$

Lösungen des Systems (22) sein. Und dies ist—wie leicht ersichtlich—gewiss der Fall, wenn:

$$(X_1, X_3) f = \sum_{s=1}^{3} \omega_{13}^s X_s f\,; \quad (X_2, X_3) f = \sum_{s=1}^{3} \omega_{23}^s X_s f\,. \tag{25}$$

Auf diese Weise können wir fortfahren; durch volle Induktion erhält man folgende Bedingungen:

$$(X_i, X_k) f = \sum_{s=1}^{k} \omega_{ik}^s \cdot X_s f \quad \begin{pmatrix} k = 2, 3, \ldots, q \\ i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Eben wenn diese Bedingungen erfüllt sind, werden wir sagen, dass das System (1) in der Richtung $(1, 2, \ldots, q)$ integrabel ist. Diese neue Definition

unterscheidet sich von der des Herrn Żorawski nur dadurch, dass hier die Koeffizienten

$$\omega_{ik}^k \quad \cdot \quad \begin{pmatrix} k = 2, 3, \ldots, q \\ i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

nicht identisch Null sein müssen. Sind sie es, so geht (26) in (10) über und das System (1) besitzt ausser der Eigenschaft II noch die Eigenschaft I.

§ 4. Zuletzt wollen wir beweisen, dass jedes q-gliedrige, vollständige System (1) einem vollständigen Systeme äquivalent ist, das in der Richtung $(1, 2, \ldots, q)$ nach der neuen Definition integrabel ist. Zu diesem Zwecke geben wir eine Reduktionsmethode an, die im Grunde eine Modifikation der Methode von Clebsch-Żorawski bildet.

Es sei also ein System (1) gegeben, von dem wir folgendes voraussetzen:

1) es sei linear unabhängig in einem Gebiete G;
2) es sei vollständig in G (d. h. in G gelten die Relationen (3));
3) die Funktionen ξ_k^i $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, q)$ sollen der Klasse C^q in G angehören.

Das äquivalenete, in der Richtung $(1, 2, \ldots, q)$ integrable System bezeichnen wir mit

$$Z_j f = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, q). \tag{28}$$

Es ist also:

$$(Z_i, Z_k) f = \sum_{s=1}^{k} b_{ik}^s\, Z_s f \qquad \begin{pmatrix} k = 2, 3, \ldots, q \\ i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Wir beweisen zuerst folgenden:

Hilfssatz: Wenn $(q-2)$ Funktionen:

$$\psi_3,\ \psi_4, \ldots,\ \psi_q \tag{30}$$

existieren, die im Gebiete (G) der Klasse C^2 angehören und den Gleichungen

$$Y_k(\psi_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq j \\ \sigma_j & \text{für } k = j \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, q \\ j = 3, 4, \ldots, q \end{pmatrix} \tag{31}$$

genügen, wo σ_j $(j = 3, 4, \ldots, q)$ Funktionen darstellen, die in (G) von Null verschieden sind, so ist das in (G) linear unabhängige und vollständige System

$$Y_k f = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{32}$$

(**nach der neuen Definition**) in der Richtung $1, 2, \ldots, q$ **integrabel**. Der Beweis ist sehr einfach. Da das System (32) nach Voraussetzung vollständig ist, so haben wir in G:

$$(33) \qquad (Y_i, Y_k) f = \sum_{s=1}^{q} \omega_{ik}^s Y_s f \qquad \begin{pmatrix} k = 2, 3, \ldots, q \\ i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir $2 \leqslant k < q$ an und setzen wir $f = \psi_{k+j}$, wo $j = 1, 2, \ldots, q-k$ ist, so erhält man infolge (31):

$$0 = \omega_{ik}^{k+j} \cdot \sigma_{k+j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, q-k)$$

und da $\sigma_{k+j} \neq 0$ ist, so ist

$$\omega_{ik}^{k+j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, q-k;\ \ 2 \leqslant k \leqslant q-1)$$

und damit ist der Hilfssatz bewiesen. Wir werden ihn sogleich anwenden.

Da das gesuchte System (28) dem gegebenen System (1) in G äquivalent sein soll, so ist

$$(34) \qquad Z_k f = \sum_{s=1}^{q} a_k^s X_s f \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

wobei die Determinante

$$(35) \qquad |a_k^s|$$

in G von Null verschieden sein soll. Darauf wählen wir Funktionen

$$(36) \qquad \psi_j;\ \sigma_j \qquad (j = 3, 4, \ldots, q)$$

mit folgender Eigenschaft: 1) die Funktionen ψ_j sollen alle in G der Klasse $C^{(q+1)}$ angehören; 2) die Determinante

$$(37) \qquad \begin{vmatrix} X_k(\psi_j) \\ k, j = 3, 4, \ldots, q \end{vmatrix}$$

soll in G von Null verschieden sein; 3) die Funktionen σ_j sollen in G der Klasse C^q angehören und in G von Null verschieden sein. Sonst sind ψ_j und σ_j beliebig.

Wir wollen jetzt die Koeffizienten a_k^s von (34) so bestimmen, dass im Einklang mit dem Hilfssatze folgende Gleichungen

$$(38) \qquad Z_k(\psi_j) = \sigma_j \cdot \delta_j^k \qquad \begin{pmatrix} j = 3, 4, \ldots, q \\ k = 1, 2, \ldots, q \end{pmatrix}$$

zutreffen, wo δ_j^k Zahlen von der Eigenschaft:

$$\delta_j^k = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \neq j \\ 1 & \text{für} \quad k = j \end{cases}$$

bedeuten. Zuerst bestimmen wir $Z_1 f$ und $Z_2 f$. Aus (38) erhalten wir für $k = 1, 2$

$$(39) \qquad \sum_{s=1}^{q} a_k^s X_s(\psi_j) = 0 \qquad (k = 1, 2;\ \ j = 3, 4, \ldots, q).$$

Aus diesen Gleichungen können wir nur $(2q-4)$ Koeffizienten a_k^s ($k = 1, 2$; $s = 1, 2, \ldots, q$) bestimmen. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit Δ^{kj} die durch (37) dividierte Unterdeterminante, die in (37) zu $X_k(\psi_j)$ gehört; wenn wir (39) mit Δ^{ij} multiplizieren und nach j summieren, so erhalten wir:

$$a_k^1 \sum_{j=3}^{q} X_1(\psi_j) \Delta^{ij} + a_k^2 \sum_{j=3}^{q} X_2(\psi_j) \Delta^{ij} + a_k^i = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2 \\ i = 3, 4, \ldots, q \end{pmatrix}.$$

Da wir a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_2^2 beliebig wählen können, so setzen wir

$$(40) \qquad a_1^1 = 1, \quad a_1^2 = 0, \quad a_2^1 = 0, \quad a_2^2 = 1.$$

Es ist also:

$$a_1^i = -\sum_{j=3}^{q} X_1(\psi_j) \Delta^{ij}; \qquad a_2^i = -\sum_{j=3}^{q} X_2(\psi_j) \Delta^{ij} \quad (i = 3, 4, \ldots, q).$$

Wir haben somit $Z_1 f$ und $Z_2 f$ gefunden; es ist:

$$(41) \qquad \begin{cases} Z_1 f = X_1 f - \displaystyle\sum_{i,j}^{3,4,\ldots,q} X_1(\psi_j) \Delta^{ij} X_i f, \\ Z_2 f = X_2 f - \displaystyle\sum_{i,j}^{3,4,\ldots,q} X_2(\psi_j) \Delta^{ij} X_i f. \end{cases}$$

Um die $Z_k f$ für $k = 3, 4, \ldots, q$ zu finden, haben wir nach dem Hilfsatz folgendes System von Gleichungen

$$(42) \qquad \sum_{s=1}^{q} a_k^s X_s(\psi_j) = \delta_j^k \sigma_j \qquad (k, j = 3, 4, \ldots, q)$$

in Bezug auf a_k^s zu lösen. Daraus erhalten wir

$$(43) \qquad a_k^1 \sum_{j=3}^{q} X_1(\psi_j) \Delta^{ij} + a_k^2 \sum_{j=3}^{q} X_2(\psi_j) \Delta^{ij} + a_k^i = \sigma_k \Delta^{ik}.$$
$$(i, k = 3, 4, \ldots, q)$$

Da wir a_k^1 und a_k^2 beliebig wählen können, so setzen wir

$$(44) \qquad a_k^1 = a_k^2 = 0 \qquad (k = 3, \ldots, q)$$

und erhalten aus (43):

$$a_k^i = \sigma_k \Delta^{ik} \qquad (i, k = 3, 4, \dots, p). \tag{45}$$

Es ist also

$$Z_k f = \sigma_k \cdot \sum_{s=3}^{q} \Delta^{sk} X_s f \qquad (k = 3, 4, \dots, q). \tag{46}$$

Sehr leicht ist aus (40, 44, 45) zu beweisen, dats die Determinante (35) dem Produkte

$$\sigma_3 \sigma_4 \dots \cdot \sigma_q \cdot \left| \begin{matrix} \Delta^{kj} \\ k, j = 3, \dots q \end{matrix} \right|$$

gleicht und deshalb in G vo Null verschieden ist. Somit haben wir das gesuchte System gefunden. Ausserdem ist ersichtlich, dass durch unsere Voraussetzungen über ψ_j und σ_j auch dem Satze des Herrn Taffet genüge geleistet werden kann.

§ 5. Es ist noch folgendes zu bemerken. Nehmen wir aus dem System (28), das in der Richtunh $(1, 2, \dots, q)$ integrabel ist, das System

$$Z_1 f = 0, \quad Z_2 f = 0, \dots, \quad Z_k f = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, q-1) \tag{47}$$

heraus; es ist vollständig und es seien φ und $\overline{\varphi}$ zwei verschiedene Lösungen dieses Systems; es sei

$$Z_{k+1}(\varphi) \neq 0$$

in G, dann ist der Quotient

$$\frac{Z_{k+1}(\overline{\varphi})}{Z_{k+1}(\varphi)} \tag{48}$$

wieder eine Lösung des Systems (47). Die Eigenschaft I aus dem § 2 erscheint also wieder, wenn auch in modifizierter Gestalt.

Anmerkung. Zuletzt wollen wir ein ganz einfaches Beispiel von zwei Gleichungen angeben. Es sei

$$\left\{ \begin{aligned} X_1 f &= 2x\frac{\partial f}{\partial x} + 3y\frac{\partial f}{\partial y} + 4z\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ X_2 f &= x\frac{\partial f}{\partial y} + 2y\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right. \tag{49}$$

Da

$$(X_1, X_2) f = -X_2 f$$

ist, so ist das System (49) nach der Definition des Herrn Żorawski in der Richtung (2, 1) integrabel. Da $q = 2$ ist, ist die neue Definition belanglos, also ist das System auch in der Richtung (1, 2) integrabel. Es sind:

$$\varphi_1 = \frac{x^3}{y^2}, \qquad \varphi_2 = \frac{x^2}{z}$$

unabhängige Lösungen der Gleichung

$$X_1 f = 0;$$

man erhält weiter

$$X_2(\varphi_1)\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} + X_2(\varphi_2)\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = 0$$

und es ist

$$\frac{X_2(\varphi_1)}{X_2(\varphi_2)} = \left(\frac{\varphi_1}{\varphi}\right)^2.$$

Man findet leicht:

$$\Pi = \frac{1}{\varphi_2} - \frac{1}{\varphi_1} = \frac{zx - y^2}{x^3}.$$

Streszczenie.

Prof. K. Żorawski w rozprawie p. t. „O całkowaniu układów równań różniczkowych cząstkowych rzędu 1-go, linjowych i jednorodnych z jedną zmienną zależną (Prace mat.-fiz. t. III, 1892) wykazał, że pewne układy zupełne, nie będące układami Jacobiego, mają z nimi niektóre własności wspólne, a mianowicie własności, ułatwiające całkowanie układu zupełnego. Rozumowania te doprowadziły prof. Żorawskiego do definicji układu zupełnego „całkowalnego w pewnym kierunku".

Autor powyższej rozprawy, uogólniając definicję prof. Żorawskiego, otrzymuje szerszy zbiór układów zupełnych, dających się łatwo całkować.