

# Zur mathematischen Theorie der Gestalt des Weltmeeres.

Von

Leon. Lichtenstein. †. <sup>1)</sup>

1. In dieser Note werden die in einer ebenfalls von Lichtenstein hinterlassenen Arbeit <sup>2)</sup> dargestellten Methoden benutzt, die freie Oberfläche des Weltmeeres in der Nachbarschaft einer als bekannt anzusehenden Gleichgewichtskonfiguration zu bestimmen. Dabei wird von der störenden Wirkung von Sonne und Mond abgesehen.

Es sei (vgl. Glig. S. 83 ff)  $\mathfrak{D}$  ein starrer, von einer *analytischen und regulären* Fläche  $\mathfrak{S}$  begrenzter gravitierender, der Wirkung äusserer Kräfte entzogener Körper, (s. Fig. 1), der um eine im Raume ruhende Achse mit konstanter *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega$  rotiert. Die Achse sei die  $z$ -Achse eines um diese mit  $\omega$  rotierend gedachten kartesischen Koordinatensystems  $(x, y, z)$ . Setzen wir voraus, dass die Dichte in  $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$  *analytisch und regulär* ist, so ist das Gravitationspotential in dem Gesamtraume nebst

<sup>1)</sup> Aus dem von L. Lichtenstein hinterlassenen Manuskript sind die Formeln (1) — (42) ohne Änderung abgedruckt, der wenige dort vorkommende Text ist durch Kursivdruck kenntlich gemacht. Die übrigen Erläuterungen sollen das Verständnis der vorliegenden Arbeit erleichtern. Sie sind zum Teil wörtlich aus dem Buche Lichtensteins (Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin 1933, S. 83 ff, zitiert als Glig.) übernommen, wo sich ein ähnlicher Gegenstand behandelt findet. Im übrigen wird auf die ins einzelne gehende Einführung der krummlinigen Koordinaten wie auch auf nähere Erklärungen bei den Beweisen für die grundlegenden Abschätzungen verzichtet, da sich a. a. O. alles aufs genaueste durchgeführt findet. Wir begnügen uns daher öfters mit Hinweisen, — Von den im Manuskript enthaltenen Figuren habe ich drei zum Abdruck bringen lassen.

Karl Maruhn.

<sup>2)</sup> L. Lichtenstein, Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren homogener Flüssigkeiten, Math. Zeitschr. 39 (1935), S. 639—648.

seinen Ableitungen erster Ordnung stetig und sowohl in  $\mathfrak{D} + \mathfrak{E}$  als auch in dem Komplementärbereiche  $\mathfrak{D} + \mathfrak{E}$  analytisch und regulär. Das mit  $\mathfrak{D}$  längs eines gewissen Flächenstückes von  $\mathfrak{E}$  zusammenhängende Gebiet  $T$  mit dem Flächenstück  $S$  als freier Oberfläche sei mit einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte  $f = \text{konst.}$  erfüllt. Ferner soll  $S$  der Klasse  $A_h$  angehören und  $\mathfrak{E}$  nirgends berühren.

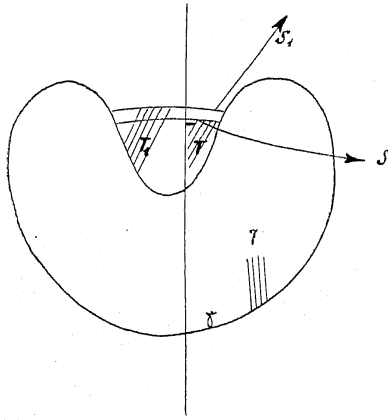


Fig. 1.

Wir verstehen ferner unter  $\Theta$  ein um  $S$  gelagertes Gebiet, das von einem Teile von  $\mathfrak{E}$ , von einem in dem Aussenraume von  $\mathfrak{D} + T$  gelegenen Flächenstück  $S^0$  und einem in  $T$  verlaufenden Flächenstück  $S''$  begrenzt wird (Fig. 2).  $S^0$  und  $S''$  werden später noch genauer charakterisiert werden. Die Lage der Punkte in  $\Theta$  werde auf ein krummliniges Koordinatensystem  $\xi, \eta, \zeta$  bezogen, unter  $\xi, \eta$  irgend ein System Gausscher Parameter auf  $S$  verstanden. Wir nehmen noch an, dass in  $\Theta$  und auf dessen Berandung die Schwerkraft von Null verschieden sei.

Es sei weiter  $\mathcal{L}$  ein System analytischer und singularitätenfreier Kurvenstücke (Koordinatenkurven, vgl. Glig. S. 84) mit folgenden Eigenschaften: Durch jeden Punkt  $(x, y, z)$  in  $\Theta$  und auf dessen Berandung geht ein und nur ein Kurvenstück  $(g)$  des Systems;  $(g)$  durchsetzt sowohl  $S$  als auch alle anderen Niveaulächen der Konfiguration in  $\Theta$  in einem einzigen Punkte und zwar unter einem von Null verschiedenen Winkel. Die einzelnen Individuen von  $\mathcal{L}$  sind durch ihre Schnittpunkte mit  $S$  vollständig charakterisiert. Diejenigen Kurvenstücke aus  $\mathcal{L}$ , die

durch den Rand von  $S$  hindurchgehen, liegen ganz auf  $\mathfrak{E}$ . Der zu  $\mathfrak{E}$  gehörige Teil des Randes von  $\Theta$  besteht also aus lauter Kurvenstücken des Systems.

Es sei jetzt  $\zeta$  die Länge des von  $(x, y, z)$  und  $(\xi, \eta)$  begrenzten Bogens von  $(g)$ , positiv im Sinne der Aussennormalen zu  $S$  in  $(\xi, \eta)$  gerechnet. Die Grössen  $\xi, \eta, \zeta$  sind die erwähnten krummlinigen Koordinaten. Wir nehmen ferner an, dass die beiden  $\Theta$  begrenzenden Flächenstücke  $S^0$  und  $S''$  die Gleichungen  $\zeta = \Omega$  und  $\zeta = -\Omega$  ( $\Omega$  konstant) haben. (s. Fig. 2).

Wir setzen nunmehr voraus, dass die gesuchte freie Oberfläche, das Flächenstück  $S_1$ , sich nur wenig von  $S$  unterscheidet und die Gleichung von  $S_1$  sich in der Gestalt  $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$  darstellen lässt, unter  $\zeta(\xi, \eta)$  eine auf  $S$  stetige Funktion verstanden. Die Existenz von  $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$  braucht dagegen hier nicht vorausgesetzt zu werden.

Es bezeichne weiter  $T_1$  den von  $S_1$  und  $\mathfrak{E}, \mathfrak{U}$  den schalenförmigen, von  $S, S_1$  und einem Stück von  $\mathfrak{E}$  begrenzten Raumteil.

Sind  $X_1, Y_1, Z_1$  bzw.  $X, Y, Z$  die kartesischen Koordinaten des Schnittpunktes eines Kurvenstückes  $(g)$  aus  $\mathcal{L}$  mit  $S_1$  bzw.  $S, a, b, c$  die Richtungskosinus der Tangente an  $(g)$  in dem auf  $(g)$  zwischen  $(X_1, Y_1, Z_1)$  und  $(X, Y, Z)$  gelegenen Punkte  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = (\xi, \eta, \zeta)$ ,  $a, b, c$  die Richtungskosinus der Tangente an  $(g)$  im Punkte  $(X, Y, Z)$ , so ist

$$\begin{aligned} X_1 &= X + \int_0^{\zeta} \bar{a} d\bar{\zeta} = X + a\zeta + \int_0^{\zeta} (\bar{a} - a) d\bar{\zeta}, \\ Y_1 &= Y + b\zeta + \int_0^{\zeta} (\bar{b} - b) d\bar{\zeta}, \\ Z_1 &= Z + c\zeta + \int_0^{\zeta} (\bar{c} - c) d\bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Es bezeichne weiter  $V_1(x, y, z)$  das Newtonsche Potential von  $\mathfrak{D}, V_1$  dasjenige von  $T_1$  und  $V$  dasjenige von  $T$ . Es gilt zunächst

$$V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X, Y, Z) = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} V_1(X, Y, Z) + \frac{\zeta^2}{2!} \frac{\partial^2 V_1}{\partial \zeta^2} + \dots \quad (2)$$

Weiterhin ist

$$(3) \quad V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X, Y, Z) + V_1(X, Y, Z) - V(X, Y, Z),$$

wobei sich für die erste Differenz rechter Hand, unter  $(X, Y, Z)$  ein Punkt  $(\xi, \eta, \zeta)$  auf  $(g)$  zwischen  $(X, Y, Z)$  und  $(X_1, Y_1, Z_1)$  verstanden.

$$(4) \quad V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X, Y, Z) = \int_0^\zeta \frac{\partial}{\partial g} V_1(X, Y, Z) d\zeta = \int_0^\zeta \frac{\partial}{\partial g} V_1(X, Y, Z) d\zeta + \int_0^\zeta \left[ \frac{\partial}{\partial g} V_1(X, Y, Z) - \frac{\partial}{\partial g} V_1(X, Y, Z) \right] d\zeta = \zeta \frac{\partial}{\partial g} V_1(X, Y, Z) + R_1$$

ergibt. Mit

$$(5) \quad \text{Max } |\zeta| = \Omega, \quad \Omega \leq \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0, \text{ hinreichend klein})$$

findet sich wegen

$$(6) \quad \left| \frac{\partial}{\partial g} V_1(X, Y, Z) - \frac{\partial}{\partial g} V_1(X, Y, Z) \right| \leq \alpha_1 \zeta |\log \zeta| \leq \alpha_1 \Omega |\log \Omega|,$$

$\alpha_1$  konstant, wie später auch  $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ ,

für  $R_1$  die Abschätzung

$$(7) \quad |R_1| \leq \alpha_1 \Omega^2 |\log \Omega|.$$

Wir grenzen nunmehr um  $(X, Y, Z)$  auf  $S$  ein Flächenstück  $D$  (s. Fig. 2) ab durch den Kreiszyylinder, der die Normale in  $(X, Y, Z)$  zur Achse und den Querschnittsradius  $\Omega$  besitzt. Die durch den Rand von  $D$  verlaufenden Kurven  $(g)$  schneiden aus  $\Theta$  das Gebiet  $\Theta^*$  aus. Es bezeichne weiter  $V_2$  das Newtonsche Potential des „schalenförmigen“ Körpers  $\Psi$ , wobei zu beachten ist, dass die Volumelemente  $d\tau'$  positiv oder negativ zu rechnen sind, je nachdem  $\tau' \geq 0$  ist. Wir erhalten so, unter  $\tau'$  den Integrationspunkt in  $\Theta$ , unter  $d\tau'$  das dort gelegene Volumelement und unter  $\bar{\rho}$  die Entfernung der Punkte  $(\tau')$  und  $(X, Y, Z)$  verstanden,

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial g} V_1(X, Y, Z) = \frac{\partial}{\partial g} V(X, Y, Z) + \frac{\partial}{\partial g} V_2(X, Y, Z),$$

$$(9) \quad \left| \frac{\partial}{\partial g} V_2(X, Y, Z) \right| < \int_{\Theta} \frac{f'}{\bar{\rho}^2} |d\tau'| = \int_{\Theta^*} \frac{f'}{\bar{\rho}^2} |d\tau'| + \int_{\Theta - \Theta^*} \frac{f'}{\bar{\rho}^2} |d\tau'| = L_1 + L_2,$$

$$(10) \quad L_1 \leq \beta_1 \Omega,$$

$$(11) \quad L_2 \leq \beta_2 \int_{S-D-\Omega} \frac{f'}{\bar{\rho}^2} |d\tau'| \leq \beta_3 \Omega \int_{S-D} \frac{f'}{\bar{\rho}^2} d\sigma' \leq \beta_4 \Omega |\log \Omega|,$$

$$\bar{\rho}^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2;$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ , konst., wie später  $\beta_5, \beta_6, \dots$ ,

(vgl. hierzu Gfig. S. 86).

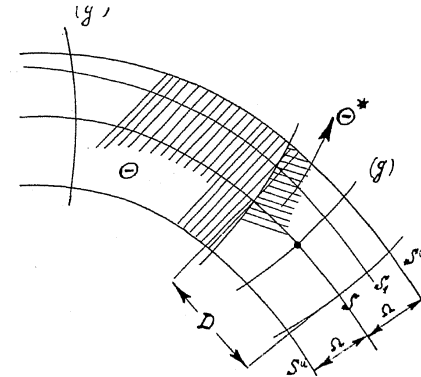


Fig. 2.

Somit ist

$$(12) \quad \left| \frac{\partial}{\partial g} V_2(X, Y, Z) \right| \leq \beta_5 \Omega |\log \Omega|,$$

$$(13) \quad \zeta \frac{\partial}{\partial g} V_1(X, Y, Z) = \zeta \frac{\partial}{\partial g} V(X, Y, Z) + R_2, \quad |R_2| \leq \beta_5 \Omega^2 |\log \Omega|,$$

darum

$$(14) \quad V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X, Y, Z) = \zeta \frac{\partial}{\partial g} V(X, Y, Z) + R_1 + R_2,$$

$$|R_1 + R_2| \leq \vartheta_6 \Omega^2 |\log \Omega|.$$

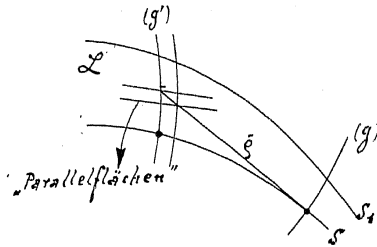


Fig. 3.

Nun zu der zweiten, in (3) rechter Hand stehenden Differenz. Wir denken uns durch den Punkt  $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}') = (\xi', \eta', \zeta')$  auf  $(g)$  ( $\zeta' = \vartheta \zeta$ ,  $0 \leq \vartheta \leq 1$ ) diejenige „Parallelfläche“ zu  $S$  gelegt, die durch die Gleichung  $\zeta = \bar{\zeta}' = \text{konst.}$  gegeben ist (s. Fig. 3.). Es sei  $d\bar{\sigma}'$  das Flächenelement auf dieser,  $\varphi'$  der von  $(g')$  und  $S$ ,  $\bar{\varphi}'$  der von  $(g')$  und der „Parallelfläche“ eingeschlossene Winkel und  $\bar{\rho}$  der Abstand der Punkte  $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$  und  $(X, Y, Z)$ . Jetzt bekommen wir

$$(15) \quad V_1(X, Y, Z) - V(X, Y, Z) = V_2(X, Y, Z) = \int_S f' \zeta' \frac{\sin \varphi'}{\rho} d\sigma' + \left( V_2(X, Y, Z) - \int_S f' \zeta' \frac{\sin \varphi'}{\rho} d\sigma' \right),$$

$$(16) \quad V_2(X, Y, Z) - \int_S f' \zeta' \frac{\sin \varphi'}{\rho} d\sigma' = \int_S d\sigma' \int_0^{\zeta'} f' \frac{\sin \bar{\varphi}'}{\bar{\rho}} d\bar{\zeta}' \left( \frac{d\bar{\sigma}'}{d\sigma'} - 1 \right) + \int_S d\sigma' \int_0^{\zeta'} \frac{f'}{\bar{\rho}} (\sin \bar{\varphi}' - \sin \varphi') d\bar{\zeta}' + \int_S d\sigma' \int_0^{\zeta'} f' \sin \varphi' \left( \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\rho} \right) d\bar{\zeta}' = K_1 + K_2 + K_3.$$

Es gelten dabei die Abschätzungen

$$(17) \quad \left| \frac{d\bar{\sigma}'}{d\sigma'} - 1 \right| \leq \alpha_2 \Omega, \quad |K_1| \leq \alpha_3 \Omega \int_S \frac{d\sigma'}{\rho} \int_0^{\zeta'} f' d\bar{\zeta}' \leq \alpha_4 \Omega^2, \\ |\sin \bar{\varphi}' - \sin \varphi'| \leq \alpha_5 \Omega, \quad |K_2| \leq \alpha_6 \Omega^2, \quad |K_3| \leq \alpha_7 \Omega^2 |\log \Omega|^3.$$

Somit erhalten wir

$$(18) \quad V_1(X, Y, Z) - V(X, Y, Z) = \int_S f' \frac{\sin \varphi'}{\rho} \zeta' d\sigma' + R_3, \quad |R_3| \leq \alpha_8 \Omega^2 |\log \Omega|,$$

und schliesslich ist wegen (14), (18) und (3) alles in allem

$$(19) \quad V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = \zeta \frac{\partial}{\partial g} V(X, Y, Z) + \int_S f' \frac{\sin \varphi'}{\rho} \zeta' d\sigma' + R_1, \quad |R_1| \leq \alpha_9 \Omega^2 |\log \Omega|.$$

2. Die Gleichgewichtsbedingungen, denen die gegebene und die gesuchte Konfiguration unterworfen ist, lauten auf  $S$ :

$$(20) \quad V_2(X, Y, Z) + V(X, Y, Z) + \frac{\omega^2}{2\kappa} (X^2 + Y^2) = C, \quad (C \text{ konstant}),$$

auf  $S_1$ :

$$(21) \quad V_2(X_1, Y_1, Z_1) + V_1(X_1, Y_1, Z_1) + \frac{\omega_1^2}{2\kappa} (X_1^2 + Y_1^2) = C_1, \quad (C_1 \text{ konstant}),$$

unter  $\kappa$  die Gaussche Gravitationskonstante und unter  $\omega_1$  die neue Winkelgeschwindigkeit des gesuchten Systems verstanden. Mit  $C_1 - C = s$  fassen wir (20) und (21) zu der einen Gleichgewichtsbedingung

$$(22) \quad \kappa V_2(X_1, Y_1, Z_1) + \kappa V_1(X_1, Y_1, Z_1) + \frac{\omega_1^2}{2} (X_1^2 + Y_1^2) - \kappa V_2(X, Y, Z) - \kappa V(X, Y, Z) - \frac{\omega^2}{2} (X^2 + Y^2) = s$$

zusammen. Mit

$$(23) \quad \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\kappa} = \lambda, \quad X^2 + Y^2 = R^2, \quad \tau = \frac{aX + bY}{R}$$

<sup>3)</sup> Vgl. hierzu die in <sup>2)</sup> genannte Arbeit.

findet sich mit Rücksicht auf (1)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega_1^2}{2\lambda} (X_1^2 + Y_1^2) - \frac{\omega^2}{2\lambda} (X^2 + Y^2) = \lambda R^2 + \frac{\omega^2}{\lambda} R \tau \zeta + \frac{\omega^2}{2\lambda} (a^2 + b^2) \zeta^2 \\
 & + 2\lambda R \tau \zeta + (a^2 + b^2) \lambda \zeta^2 + 2\lambda (X + a \zeta) \int_0^\zeta (\bar{a} - a) d\zeta + 2\lambda (Y + b \zeta) \\
 (24) \quad & \int_0^\zeta (\bar{b} - b) d\zeta + \lambda \left( \int_0^\zeta (\bar{a} - a) d\zeta \right)^2 + \lambda \left( \int_0^\zeta (\bar{b} - b) d\zeta \right)^2 + \frac{\omega^2}{2\lambda} \left[ 2(X + a \zeta) \right. \\
 & \left. \int_0^\zeta (\bar{a} - a) d\zeta + 2(Y + b \zeta) \int_0^\zeta (\bar{b} - b) d\zeta + \left( \int_0^\zeta (\bar{a} - a) d\zeta \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left( \int_0^\zeta (\bar{b} - b) d\zeta \right)^2 \right] = \lambda R^2 + \frac{\omega^2}{\lambda} R \tau \zeta + \Pi_1 \{\lambda, \zeta\}.
 \end{aligned}$$

Wir bezeichnen nunmehr mit  $\lambda \psi$  die Komponente der Schwerkraft in der Richtung von  $(g)$ , positiv im Sinne der Aussennormale gerechnet, und nehmen an, das in  $\Theta$  und auf seiner Berandung  $\psi < 0$  sein möge. Wegen

$$(25) \quad \lambda \psi = \lambda \frac{\partial}{\partial g} V_1(X, Y, Z) + \lambda \frac{\partial}{\partial g} V(X, Y, Z) + \omega^2 R \tau$$

und mit Rücksicht auf (2), (19) und (24) schreiben wir jetzt (23) in der Form

$$\begin{aligned}
 (26) \quad & \psi \zeta + \int_s^\zeta f' \frac{\zeta'}{\rho} \sin \varphi' d\sigma' = s - R^2 \lambda - \frac{\zeta^2}{2!} \frac{\partial^2 V_1}{\partial g^2} - \dots + \Pi \{\lambda, \zeta\}, \\
 & \Pi \{\lambda, \zeta\} = -R_1 - \Pi_1 \{\lambda, \zeta\},
 \end{aligned}$$

womit wir die *Integro-Differentialgleichung* des Problems gewonnen haben.

Ist nun

$$(27) \quad |s|, |\lambda| \leq \Omega_1, \quad \Omega_1 \leq \varepsilon_1, \quad (\varepsilon_1 > 0, \text{ hinreichend klein}),$$

so erkennt man aus (19) und (24) leicht, dass

$$(28) \quad |\Pi \{\lambda, \zeta\}| \leq A(\Omega, \Omega_1)(\Omega + \Omega_1)$$

ist, unter  $A$  eine in dem Bereiche  $0 \leq \Omega \leq \varepsilon, 0 \leq \Omega_1 \leq \varepsilon_1$  erklärte posi-

tive, der Beziehung  $\Lambda \rightarrow 0$  für  $\Omega^2 + \Omega_1^2 \rightarrow 0$  genügende stetige Funktion verstanden, die bei festgehaltenem  $\Omega_1$  im Abhängigkeit von  $\Omega$ , bei festgehaltenem  $\Omega$  in Abhängigkeit von  $\Omega_1$  nicht abnimmt.<sup>4)</sup>

3. Wir nehmen jetzt an,  $\zeta$  sei eine ebenso wie  $\zeta$  beschaffene Funktion mit  $\text{Max } |\zeta| = \Omega$ , von der überdies

$$(29) \quad |\zeta - \bar{\zeta}| \leq 0$$

gilt.

Dann ist mit  $\dot{X}_1 = X + a \zeta + \int_0^\zeta (\bar{a} - a) d\bar{\zeta}, \dots, (\text{vgl. (1)}),$

$$\begin{aligned}
 & \dot{\Theta}(\zeta) - \dot{\Theta}(\bar{\zeta}) = \left[ V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) - \zeta \frac{\partial}{\partial g} V(X, Y, Z) \right. \\
 & \left. - \int_s^\zeta f' \frac{\zeta' \sin \varphi'}{\rho} d\sigma' \right] - \left[ V_1(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1) - V(X, Y, Z) - \bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial g} V(X, Y, Z) \right. \\
 (30) \quad & \left. - \int_s^{\bar{\zeta}} f' \frac{\bar{\zeta}' \sin \varphi'}{\rho} d\sigma' \right] = V_1(X_1, Y_1, Z_1) - \dot{V}_1(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1) \\
 & - (\zeta - \bar{\zeta}) \frac{\partial}{\partial g} V(X, Y, Z) - \int_s^\zeta f' \frac{\zeta' - \bar{\zeta}'}{\rho} \sin \varphi' d\sigma'. \quad 5)
 \end{aligned}$$

Wir machen die Umformung

$$\begin{aligned}
 (31) \quad & V_1(X_1, Y_1, Z_1) - \dot{V}_1(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1) = \dot{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) \\
 & - V_1(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1) - (\dot{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X_1, Y_1, Z_1)).
 \end{aligned}$$

Bezeichnet  $\frac{\partial}{\partial g} \dot{V}_1$  den Wert von  $\frac{\partial}{\partial g} \dot{V}_1$  in einem gewissen auf  $(g)$  zwischen  $(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1)$  und  $(X_1, Y_1, Z_1)$  liegenden Punkte, so ergibt sich

$$(32) \quad \dot{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) - \dot{V}_1(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1) = (\zeta - \bar{\zeta}) \frac{\partial}{\partial g} \dot{V}_1.$$

Weiter ist

<sup>4)</sup> Vgl. hierzu L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin 1931, S. 14 f.

<sup>5)</sup>  $\dot{\Theta}(\zeta)$  ist daher mit dem in (19) eingeführten Ausdruck  $R_1$  identisch.

$$(33) \quad (\zeta - \bar{\zeta}) \frac{\partial}{\partial g} \tilde{V}_1 - (\zeta - \bar{\zeta}) \frac{\partial}{\partial g} V(X, Y, Z) = (\zeta - \bar{\zeta}) \left[ \frac{\partial}{\partial g} \tilde{V}_1 - \frac{\partial}{\partial g} V \right] \\ + (\zeta - \bar{\zeta}) \left[ \frac{\partial}{\partial g} V - \frac{\partial}{\partial g} V(X, Y, Z) \right] = (\zeta - \bar{\zeta}) I_3 + (\zeta - \bar{\zeta}) I_4.$$

Wie bei (8) und (6) überzeugt man sich, dass

$$(34) \quad |I_3| \leq \alpha_{10} \Omega |\log \Omega|,$$

(vgl. Gfig. S. 84 ff.),

$$(35) \quad |I_4| \leq \alpha_{11} \Omega |\log \Omega|$$

ist. Also findet sich

$$(36) \quad \left| (\zeta - \bar{\zeta}) \frac{\partial}{\partial g} \tilde{V}_1 - (\zeta - \bar{\zeta}) \frac{\partial}{\partial g} V(X, Y, Z) \right| \leq \alpha_{12} \Omega |\log \Omega|.$$

Die zweite Differenz in (31) rechter Hand ist, unter  $\rho_1$  den Abstand von  $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$  und  $(X_1, Y_1, Z_1)$  verstanden,

$$(37) \quad \tilde{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X_1, Y_1, Z_1) = \int_S f' d\sigma' \int_{\bar{z}'}^{\bar{z}'} d\bar{z}' \cdot \frac{d\sigma'}{d\sigma'} \sin \varphi' \cdot \frac{1}{\rho_1}.$$

Es gilt ferner wegen

$$\int_S f' \frac{\bar{z}' - \bar{z}'}{\rho} \sin \varphi' d\sigma' = - \int_S d\sigma' \sin \varphi' \cdot \frac{1}{\rho} \int_{\bar{z}'}^{\bar{z}'} d\bar{z}'$$

die Beziehung

$$(38) \quad \tilde{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) - V_1(X_1, Y_1, Z_1) + \int_S f' \frac{\bar{z}' - \bar{z}'}{\rho} \sin \varphi' d\sigma' \\ = \int_S f' d\sigma' \int_{\bar{z}'}^{\bar{z}'} d\bar{z}' \left( \frac{d\sigma'}{d\sigma'} - 1 \right) \frac{\sin \varphi'}{\rho_1} + \int_S f' d\sigma' \int_{\bar{z}'}^{\bar{z}'} d\bar{z}' \sin \varphi' \frac{\sin \varphi'}{\rho_1} \\ + \int_S f' d\sigma' \sin \varphi' \int_{\bar{z}'}^{\bar{z}'} d\bar{z}' \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) = I_5 + I_6 + I_7.$$

Wegen

$$(39) \quad \left| \frac{d\sigma'}{d\sigma} - 1 \right| \leq \alpha_{13} \Omega$$

ist

$$(40) \quad |I_5| \leq \alpha_{14} \Omega \bar{\Omega}, \quad (\text{vgl. Gfig. S. 84 ff.}).$$

Weiterhin findet man, ähnlich wie bei Untersuchung von (16)

$$(41) \quad |I_6| \leq \alpha_{15} \Omega \bar{\Omega}, \quad |I_7| \leq \alpha_{16} \Omega |\log \Omega| \bar{\Omega}.$$

Insgesamt ist daher

$$(42) \quad |\bar{\Theta}\{\zeta\} - \bar{\Theta}\{\bar{\zeta}\}| \leq \alpha_{17} \Omega |\log \Omega| \bar{\Omega}.$$

Wie man aus (24) leicht erkennt, ist wegen (27)

$$(43) \quad |\Pi_*\{\lambda, \zeta\} - \Pi_*\{\lambda, \bar{\zeta}\}| \leq \alpha_{18} (\Omega + \Omega_1) \bar{\Omega}, \quad ^9)$$

somit auch gewiss

$$(44) \quad |\Pi\{\lambda, \zeta\} - \Pi\{\lambda, \bar{\zeta}\}| \leq B(\Omega, \Omega_1) \bar{\Omega},$$

wo  $B(\Omega, \Omega_1)$  eine ganz wie  $A(\Omega, \Omega_1)$  beschaffene Funktion ist. Die zur Sicherstellung der Auflösbarkeit nötigen Ungleichheiten für die rechte Seite von (26) sind daher gewiss erfüllt.

Hier ist (wie auch Gfig. S. 83 ff) stillschweigend angenommen worden, dass die Umdrehungsachse  $x=y=0$  eine *Hauptträgheitsachse* von  $\mathfrak{T}+T$  wie auch von  $\mathfrak{T}+T_1$  ist. Im allgemeinen wird dies nicht zutreffen. Über das hieraus sich ergebende neue Problem vgl. Gfig. S. 88 f.

Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass sich auf ähnliche Weise folgendes Problem behandeln lassen dürfte:

Gleichgewichtsfigur einer „*feuerflüssigen Masse*“, worauf sich eine *starre „Insel“* befindet. Man betrachte etwa: Ein *Jacobisches oder Maclaurinsches Ellipsoid als Ausgangskonfiguration*, von dem ein Teil  $\mathfrak{T}$  bei unveränderter Dichte starr geworden ist.

<sup>9)</sup> Die Beziehungen (43) und (44) sind nicht im Manuskript enthalten, sondern nur der Vollständigkeit wegen hinzugefügt worden.