

Sie sind beide trigonometrische Polynome ohne konstantes Glied, und es ist offenbar $p_N(t)$ die Ableitung von $P_N(t)$.

Nun sind wir am Ziele, wenn wir einfach N so gross gewählt denken, dass $P_N(0) > \frac{\pi}{2} - \delta$ ist (was wegen $P_N(0) \rightarrow F(0) = \frac{\pi}{2}$ möglich ist).

Dann genügt nämlich das trigonometrische Polynom $p(t) = p_N(t)$ nebst seinem Integral $P(t) = P_N(t)$ unseren Forderungen; denn es ist erstens $\min \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} = 1$, zweitens nach einer bekannten Eigenschaft der Fejérschen Summen

$$\text{Obere Grenze } |p_N(t)| \leq \text{Obere Grenze } |f(t)| = 1, \quad -\infty < t < \infty$$

und drittens

$$P(0) = P_N(0) > \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Zur Theorie der Randwertaufgaben bei hyperbolischen Gleichungen.

Von

Ch. H. Müntz

Leningrad.

1. Die gemischten linearen Randwertaufgaben werden gewöhnlich entweder durch die mehr hypothetische Heranziehung aller Eigenfunktionen des Problems erledigt, oder durch die separate Lösung zweier Grundfragen: a) des Cauchyschen Anfangswertproblems, b) der Bildung der *Greenschen Funktion* für jede einzelne Begrenzung¹⁾.

Noch in der 1932 erschienenen französischen Ausgabe seines klassischen Buches „Le problème de Cauchy“ spricht J. Hadamard (vgl. S. 484, Z. 9 — 12) für *hyperbolische* Gleichungen von der „nécessité d'introduire, en dehors de la solution élémentaire, une fonction dépendant essentiellement de la forme de la frontière“, und für parabolische Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten ist letzteres allein in der Literatur durchgeführt von M. Gevrey²⁾.

Indessen ist es, wie Verfasser seit 1931 in einer Reihe von Vorträgen und Publikationen für verschiedene Fälle gezeigt hat³⁾, überhaupt vollständig ausreichend, für jede fragliche Gleichung (einerlei, ob von parabolischem oder hyperbolischem Typus) die Funktionalösung für das zugehörige *Cauchysche Anfangswertproblem allein* zu finden. Dies geschieht jeweilig durch die explizite Zurückführung auf eine *Volterrasche* Gleichung.

¹⁾ Vgl. die Ausführungen von V. Volterra in den Berichten des Internationalen Mathematikerkongresses in Strassburg (1920).

²⁾ Vgl. C. R. 171 (1920), p. 839; ibd. 195 (1932), p. 690.

³⁾ Vgl. insbesondere: C. R. 194 (1932), S. 1456; Matematičeskij Sbornik 39 (1932), S. 113; Math. Zschr. 38 (1934), S. 323; C. R. 198 (1934), S. 821.

und der daraus bestimmbare Kern der Lösung genügt dann, um für jede der typischen Randwertaufgaben wieder sofort eine entsprechende Volterra'sche Gleichung aufzustellen. Im folgenden soll dies am Beispiel der Wellengleichung im beliebig vieldimensionalen, sowohl homogenen wie inhomogenen Raume durchgeführt werden. Gewisse hierbei entstehende formale Schwierigkeiten werden — auch im nichtanalytischen Falle — durch die Heranziehung des Komplexen überwunden.

1. Wir beginnen mit dem Fall einer beliebigen geraden Dimensionenzahl, $n=2k$, des eigentlichen Raumes und gehen dabei von der einfachsten Wellengleichung in einem homogenen isotropen Mittel aus:

$$(1) \quad u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad c = \text{const} > 0.$$

Selbstverständlich bedeuten hier die ausgeschriebenen Ausdrücke folgendes:

$$(1,1) \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\Delta u = \sum_{v=1}^{2k} \frac{\partial^2 u}{\partial X^v{}^2};$$

die Indizes der kontravarianten kartesischen Koordinaten eines Raumpunktes

$$(1,2) \quad X = (X^1, \dots, X^{2k})$$

setzen wir dabei nach oben.

Unter dem Poisson-Parsevalschen Kern der Gleichung (1) verstehen wir den Ausdruck der üblichen „Grundlösung“:

$$(1,3) \quad V_0 = V_0(\xi, x, t) = C_{2k} (t^2 - c^{-2} r^2)^{\frac{1}{2} - k};$$

$$- C_{2k} = \frac{\Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot (-\pi c^2)^k}; \quad r^2 = \sum_{v=1}^{2k} (x^v - \xi^v)^2.$$

Das wichtigste Anfangswertproblem der Gleichung (1), bei dem im Moment $t=+0$ ein ursprüngliches Gleichgewicht $u(0)=0$ durch das Einsetzen einer gegebenen, zunächst $(k-1)$ -mal stetig differenzierbaren Impulsstörung

$$(1,4) \quad u_t(0) = u_t(X, 0) = f(X)$$

aufgehoben wird, liefert dann bekanntlich das Resultat, im Sinne des Hadamardschen Hauptwerts = endlichen Teils (daher das Hakenzeichen):

$$(1,5) \quad u = \left| \int \dots \int V_0(\xi, X, t) f(\xi) d\xi, \right.$$

worin das Integrationsgebiet rechts, mit $t > 0$, im Vollraume ξ für jedes t gerade so weit zu erstrecken ist, als der Ausdruck von V_0 im Integranden gemäss der Formel (1,3) noch positiv bleibt.

Herrscht umgekehrt zu Anfang Ruhe, $u_t(0)=0$, bei gegebenen — hier etwa k -mal stetig differenzierbaren — Verschiebungen (bzw. Verdichtungen usf.):

$$(1,6) \quad u(0) = u(X, 0) = F(X),$$

so lautet die entsprechende Lösung, selbstverständlich wieder im Sinne des Hadamardschen Hauptwertes:

$$(1,7) \quad u = \frac{\partial}{\partial t} \left| \int \dots \int V_0(\xi, x, t) F(\xi) d\xi. \right.$$

Im allgemeinsten Falle des Anfangswertproblems zu (1):

$$(1,8) \quad u(0) = F(X), \quad u_t(0) = f(X)$$

hat man also durch Superposition:

$$(1,9) \quad u = \frac{\partial}{\partial t} \left| \int \dots \int V_0(\xi, X, t) F(\xi) d\xi + \right.$$

$$\left. + \left| \int \dots \int V_0(\xi, X, t) f(\xi) d\xi. \right. \right.$$

Es ist mitunter bequem, das vorhin genannte Integrationsgebiet noch beliebig weit auszudehnen, wobei nur noch rein imaginäre Bestandteile hinzukommen. Die Lösung braucht dann etwa nur mit Hilfe des üblichen Realzeichens ausgeschrieben zu werden:

$$(1,10) \quad u = \Re \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left| \int \dots \int V_0 F + \left| \int \dots \int V_0 f \right. \right. \right\}.$$

wobei die Abkürzungen rechterhand aus (1,9) ohne weiteres verständlich sind. Als Integrationsgebiet kann man sich nach dem obigen beispielsweise ein hinreichend grosses ξ -Parallelotop denken, auf dessen Begrenzung V_0 bereits überall für die betrachteten t , $0 < t \leq t_0$, negativ ausfällt.

2. Es sei nunmehr die zu (1) gehörende inhomogene Gleichung — wieder etwa mit $(k-1)$ -mal stetig differenzierbarer rechter Seite — gegeben:

$$(2) \quad L_0[u] = u_{tt} - c^2 \Delta u = q(X, t).$$

Nach erfolgter Lösung des homogenen Anfangswertproblems (§ 1) genügt es für das vorliegende Problem, diejenige partikuläre Lösung von (2) zu kennen, die nebst ihrer Ableitung nach t für $t=0$ überall verschwindet. Diese Lösung lässt sich aber sofort explizit ausschreiben, nämlich:

$$(2,1) \quad u = \Re \int_0^t d\tau \left[\int \dots \int V_0(\alpha, X, t-\tau) q(\alpha, \tau) d\alpha \right].$$

Der Beweis ergibt sich ohne weiteres durch direkte Nachprüfung.

3. Im Vollraume R_n ($n=2k$) sei ein endliches ein- bzw. mehrfach zusammenhängendes Gebiet D gegeben, dessen $(n-1)$ -dimensionale Begrenzung mit S bezeichnet werden möge; wir nehmen dabei zunächst an, dass die Innennormale ν von S überall k -mal stetig differenzierbare Richtungskosinus aufweist. Nunmehr definieren wir als „Potential der einfachen Wellenbelegung“, mit einer zunächst wieder k -mal differenzierbaren Dichte $\varphi(\sigma, t)$, wobei σ einen beliebigen Punkt auf S bedeutet, den Ausdruck:

$$(3) \quad u = \Re \int_0^t d\tau \left[\int \dots \int V_0(\sigma, X, t-\tau) \varphi(\sigma, \tau) d\sigma \right],$$

unter $d\sigma$ das Flächenelement von S verstanden; X sei zunächst ein Innenpunkt von D . Das Realzeichen \Re ist hier vorangestellt, um grössere Freiheit für das Integrationsgebiet zu gewinnen, das dann z. B. auf die gesamte Begrenzung S ausgedehnt werden kann.

Bekanntlich darf jede Differentiation eines Hadamardschen Hauptwertes unter dem Integralzeichen selbst vorgenommen werden, was übrigens bereits beim Nachweis der Richtigkeit der Formeln (1,5), (1,7) und (2,1) zu benutzen ist. Man ersieht daraus ohne weiteres, dass das

vorhin aufgestellte Potential (3) wiederum der Wellengleichung (1) genügt; überdies hat man hier

$$u(0) = 0, u_t(0) = 0.$$

Ebenso ersieht man, dass der genannte Potentialausdruck beim Übergang des Punktes X aus dem Innern von D auf die Begrenzung S stetig bleibt.

Es ist indessen von Interesse, das Verhalten der Ableitung von u aus (3) in der Richtung der Innennormalen zu prüfen. Es sei ν_0 die auf einer solchen Normalen in einem Punkte σ_0 von S abgetragene Länge; dann ist zu beachten, dass für Punkte X in der Nähe von S im Ausdruck (3) infolge des rechts voranstehenden Realzeichens die obere Grenze t durch $t - \frac{\nu}{c}$ ersetzt werden kann, unter ν den kürzesten Abstand von X

nach S verstanden, da für grössere ν der Wert von V_0 rein imaginär wird. Bei der Ableitung von u in der Richtung ν tritt daher ausser dem durch Differentiation unter dem Integralzeichen entstehenden Gliede noch ein anderes auf, nämlich:

$$(3,1) \quad -c^{-1} \Re \left[\int \dots \int V_0\left(\sigma, X, \frac{\nu_0}{c}\right) \varphi\left(\sigma, t - \frac{\nu_0}{c}\right) d\sigma \right].$$

Dies aber liefert beim Übergang zu $\nu_0=0$, $X=\sigma_0$, nach den Resultaten von § 2 einfach $-c^{-1} \varphi(\sigma_0, t)$, so dass man die folgende Endformel erhält:

$$(3,2) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_0} = -c^{-1} \varphi(\sigma_0, t) + \Re \int_0^t d\tau \left[\int \dots \int \frac{\partial}{\partial \nu_0} V_0(\sigma, \sigma_0, t-\tau) \varphi(\sigma, \tau) d\sigma \right].$$

Es ist klar, dass man auf diese Weise für die Lösung des zugehörigen Neumannschen Problems, bei dem — ohne Einschränkung der Allgemeinheit —

$$(3,3) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_0} = F(\sigma_0, t), \quad u(0) = 0, u_t(0) = 0$$

vorgeschrieben ist, sofort eine eigenartige *Volterrasche* Integralgleichung erhält, die durch das Hadamardsche Hakenzeichen reichlich kompliziert

erscheint, so dass wir im folgenden für die hier notwendige Auflösung noch weitere Umformungen vorzunehmen haben werden.

Die Behandlung des entsprechenden *Dirichletschen* Problems, wieder schon mit $u(0) = 0$, $u_t(0) = 0$, liegt auf der Hand. Man braucht dann nur

$$(3,4) \quad u = \Re \int_0^t d\tau \left| \int \dots \int \frac{\partial}{\partial v} V_0(\sigma, X, t - \tau) \varphi(\sigma, \tau) d\sigma \right.$$

anzusetzen. Dass auch dieses u der Wellengleichung (1) genügt, kann heuristisch wie in der gewöhnlichen Potentialtheorie begründet und nachträglich ebenfalls streng verifiziert werden. Analog wie dort wird auch der Übergang zu $X \rightarrow \sigma_0$ vollzogen, indem man

$$(3,5) \quad \varphi(\sigma, \tau) = \varphi(\sigma_0, t) + [\varphi(\sigma, \tau) - \varphi(\sigma_0, t)]$$

ansetzt und nur das kritische erste Glied in darauf elementarer Weise untersucht. Man erhält:

$$(3,6) \quad u(\sigma_0, t) = c^{-1} \varphi(\sigma_0, t) + \\ + \Re \int_0^t d\tau \left| \int \dots \int \frac{\partial}{\partial v} V_0(\sigma, \sigma_0, t - \tau) \varphi(\sigma, \tau) d\sigma \right.$$

Bei gegebenem $u(\sigma_0, t)$ liefert dies wiederum eine Volterrasche Integralgleichung von der oben geschilderten besonderen Art, deren Auflösung also im folgenden mitgegeben werden soll.

Als letztes Randwertproblem sei hier noch der Fall erwähnt, da auf der Hyperfläche S die Impulse u_i durch eine Ortsfunktion $f(\sigma_0, t)$ vorgeschrieben sind. Wieder führt dann der Ansatz (3) zum Ziele.

Übrigens ist es im vorangehenden durchaus nicht nötig, sich die Grenzhypersfläche S als unbeweglich vorzustellen: vielmehr kann sie (bzw. ihre einzelnen Bestandteile) eine beliebige, hier zunächst $(k+1)$ -mal differenzierbare Bewegung $\sigma = \sigma(t)$ — ohne Selbstdurchschneidung — ausführen, worauf dann nur in den Formeln (3) — (3,6) überall σ durch $\sigma(t)$ und σ_0 durch $\sigma_0(t)$ bzw. $\sigma_0(t)$ zu ersetzen ist.

4. Die unmittelbare Auflösung der vorhin erhaltenen Volterraschen Integralgleichungen stösst insofern auf gewisse Schwierigkeiten, als bei der jeweiligen wirklichen Ausrechnung der Hadamardschen Hauptwerte in den betreffenden Integralausdrücken nicht mehr die unbekannte

Funktion $\varphi(\sigma, \tau)$ selbst, sondern vielmehr die entsprechende Gesamtheit ihrer Ableitungen $(k-1)$ -ter Ordnung (linear) auftritt, demnach eigentlich eine etwas komplizierte Integrodifferentialgleichung entsteht, deren Lösung dann im Reellen immer höhere Ableitungen beanspruchen würde.

Man kann indessen diese Schwierigkeit völlig umgehen, indem man das an sich reelle ursprüngliche Integrationsgebiet in den räumlichen Variablen X, \dots, X^n komplex erweitert. Nebenbei werden daraufhin auch die oben jeweilig genannten recht stark einschränkenden Differenzierbarkeitsbedingungen für die gegebenen Funktionen $f(\lambda)$ usf. in noch hinreichender Weise reduziert werden können. Die fragliche Erweiterung lässt sich zunächst für die Formel (1,5) ohne weiteres vollziehen, wenn die dort auftretende Funktion

$$(4) \quad f(\xi) \equiv f(\xi^1, \dots, \xi^n)$$

überall in der Umgebung der Punkte eines reellen Hyperwürfels

$$(4,1) \quad |\xi^1| \leq T_0, \dots, |\xi^n| \leq T_0$$

für ein gewisses endliches Gebiet in X als regulär analytisch augenommen wird. Man kann dann für $0 < t \leq t_0$ folgendermassen verfahren. Man führe in X Polarkoordinaten ein:

$$(4,2) \quad \xi^1 = X^1 + \rho ct \cos \Theta_1,$$

$$\xi^2 = X^2 + \rho ct \sin \Theta_1 \cos \Theta_2, \dots, \dots,$$

$$\xi^n = X^n + \rho ct \sin \Theta_1 \dots \sin \Theta_{n-1};$$

$$0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \Theta_1 \leq \pi, \dots, 0 \leq \Theta_{n-2} \leq \pi;$$

$$0 \leq \Theta_{n-1} \leq 2\pi.$$

Statt der Formel (1,5) erhält man daraufhin:

$$(4,2) \quad u = C_{2k} \left| \int \dots \int c^{2k} t (1 - \rho^2)^{1/2-k} \rho^{2k-1} d\rho \cdot \right. \\ \left. \cdot f(\xi) \prod_{\mu=1}^{2k-1} \sin^{2k-1-\mu} \Theta_\mu d\Theta_\mu \right.$$

Der Sinn der Hadamardschen Integration besteht dann ausdrücklich darin, dass in der Taylorsche Entwicklung von $f(\xi) \equiv f_*(\rho)$ in der Nähe von $\rho=1$ die ersten $k-1$ Glieder einfach unterdrückt werden.

Genau die entgegengesetzt gleiche Formel entsteht, wenn man in (4,2) ρ durch $-\rho$ und dann auch $f_*(\rho)$ durch $f_*(-\rho)$ ersetzt. Man braucht daher nur in der komplexen ρ -Ebene den geradlinigen Integrationsweg $-1 \dots 1$ als Schlitz durch einen ihn um 0 lemniskatisch umschliessenden Weg L zu ersetzen, um auf letzterem den gesuchten Wert von u viermal zu erhalten. Das Hadamardsche Hakenzeichen wird jetzt völlig überflüssig^{*)}, und man erhält statt (1,5):

$$(4,4) \quad u = \frac{1}{4} C_{2k} \int \dots \int_L V_0(\xi, X, t) f(\xi) d\xi,$$

worin also der Weg L sich auf die ρ -Ebene bezieht, und unter dem Integralzeichen eigentlich der gleiche Ausdruck wie in (4,3) zu verstehen ist. Auch eine Halblemniskate würde genügen.

Nun braucht aber für das Gelingen dieser Methode der Regularisierung des Hadamardschen Integrals (1,5) die gegebene Funktion $f(\xi)$ durchaus nicht von vornherein analytisch zu sein. Infolge der endlichen Geschwindigkeit der Wellenausbreitung genügt es, für ein beschränktes X -Gebiet und beschränktes t überhaupt nur einen ξ -Bereich (4,1) mit hinreichend grossem T_0 zu betrachten. Denkt man sich dann in der komplexen $\rho = (\eta + i\zeta)$ -Ebene den reellen Schlitz $-T_0 \dots T_0$ gelegt und auf beiden Seiten desselben die gleichen gegebenen (übrigens nicht notwendig reellen) Randwerte $H(\eta, \zeta)$ ausgebreitet, so lassen sich dieselben mit Hilfe der zugehörigen konjugierten harmonischen Funktion $K(\eta, \zeta)$ zu einer Funktion der komplexen Veränderlichen ρ

$$(4,5) \quad G(\rho) = H(\eta, \zeta) + iK(\eta, \zeta)$$

ergänzen, die ausserhalb des geführten Schlitzes überall regulär ausfällt. Bekanntlich genügt dann bei einem Kreisrand schon die Erfüllung einer Lipschitzschen Bedingung mit einem Exponenten ε ($0 < \varepsilon < 1$) für die Randwerte $H(\eta)$, damit auch diejenigen von $K(\eta)$ existieren und einer ebensolchen Bedingung genügen. Durch konforme Abbildung auf das Kreissäussere bestätigt sich die Richtigkeit eines entsprechenden Satzes auch in unserem Falle, und zwar in der folgenden, hier vollkommen ausreichenden Fassung.

Es möge $H(\eta)$ für $-1 \leq \eta \leq 1$ den folgenden Bedingungen genügen:

$$|H(\eta)| \leq C; |H(\eta + \sigma) - H(\eta)| \leq C \left| \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right|^\varepsilon,$$

$$C = \text{const}, 0 < \varepsilon < 1;$$

^{*)} Von Hadamard selbst in etwas anderer Form für den einfachsten Fall erwähnt. Vgl. Le problème de Cauchy, S. 185.

dann genügt die *konjugierte* Funktion $K(\eta)$ ebendort den Beziehungen:

$$|K(\eta)| \leq AC; |K(\eta + \sigma) - K(\eta)| \leq AC \left| \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right|^\varepsilon,$$

wosin $A = \text{const}$ nur von ε abhängt.

A fortiori sind solche Beziehungen dann gleichmässig im ganzen Aussengebiet erfüllt. Durch Anwendung der Poisson- oder Schwarzschen Formel für das Kreissäussere und Rückkehr zum betrachteten Schlitzgebiet lässt sich übrigens $G(\rho)$ durch $H(\eta)$ auch *explizit* ausdrücken. Gleichen reellen Randwerten $H(\eta)$ an beiden Ufern des Schlitzes entsprechen dabei *entgegengesetzt* gleiche Werte von $K(\eta)$; für reelle ρ ausserhalb des Schlitzes fällt ferner die Vollfunktion $G(\rho)$ reell aus, während sie also an beiden Ufern des Schlitzes selbst jeweilig konjugiert komplexe Werte annimmt.

Auf diese Weise lässt sich auch die gegebene Funktion $f(\xi)$, die bei irgendwelchen festgehaltenen θ_n als Funktion von ρ allein wieder mit $f_*(\rho)$ bezeichnet werden möge, zu einer Vollfunktion des komplexen Arguments $f^*(\rho)$ ergänzen.

Wird nun daraufhin in der Formel (4,3) $f^*(\rho)$ anstelle von $f(\xi)$ geschrieben, so kommen dabei zwar für die dort gebrauchten reellen ρ auf jeder Seite des Schlitzes $-1 \leq \rho \leq 1$ zu den reellen $f_*(\eta)$ noch die entsprechenden entgegengesetzten rein imaginären Werte der konjugierten Funktion $f^*(\eta) = -f_*(\eta)$ hinzu; beim Übergang zum Randintegral (4,4) heben sich aber die diesbezüglichen entgegengesetzt gleichen Bestandteile wieder fort, so dass die Richtigkeit jenes Integrals gewahrt bleibt. In analoger Weise hat man nach Einführung Gausscher Koordinaten $\sigma^1, \dots, \sigma^{n-1}$ auf S in (3,2) usw. zu verfahren. Der Unterschied gegen (4,3) bei der Ausführung, der Substitutionen (4,2) besteht dann nur darin, dass hier $\cos \theta_{n-1}$ und $\sin \theta_{n-1}$ für jeden geschlossenen Bestandteil von S als nicht notwendig eindeutige, aber stetig zusammenhängende, zunächst k -mal differenzierbare Funktionen von ρ und den anderen θ_n anzusetzen sind. Man kann aber für $0 < t \leq t_0$ bei jedem der genannten Bestandteile im Gebiete des Reellen eine obere Grenze für $r = ct$ angeben, nämlich ct_0 , und in der r -Ebene den obengenannten lemniskatisch geschlossenen Umweg, den man dann, unter Festhaltung von $\rho = 0$, jeweilig um den Schlitz $-ct_0 \dots ct_0$ nach Belieben verschieben darf, bei hinreichend grossem t_0 derart einrichten, dass S alsdann für jedes σ_0 durch eine feste komplexe Hülle ersetzt wird, auf die alle Formeln (3)–(3,6) zu beziehen sind.

Um nun die gewonnenen Integralgleichungen (3,2) und (3,6) wirklich aufzulösen, braucht man jetzt in ihnen nur die singulären Hadamardschen

Integrale durch die oben eingeführten regulären komplexen Randintegrale zu ersetzen [in der letzteren also $\varphi^*(\rho, \tau)$ statt $\varphi(\sigma, \tau)$ zu schreiben] und in gewohnter Weise mit sukzessiven Approximationen fortzufahren. Jedes neue Glied der so erhaltenen Volterraschen Entwicklung ergibt sich zuerst als *reelle* Funktion $f_m(\sigma_0, t)$, die dann beim nächstfolgenden Schritt wieder ins Komplexe überzuführen ist. Die Konvergenz der genannten Entwicklung ergibt sich daraus, dass nach Voraussetzung einer gleichmässigen Lipschitzschen Bedingung mit dem Exponenten ε für das freie Glied $f(\sigma_0, t)$ der betrachteten Integralgleichung sich ohne weiteres hinreichend günstige ebensolche Bedingungen für alle weiteren $f_m(\sigma_0, t)$ ergeben, in denen, genau wie bei völlig regulären Volterraschen Integralgleichungen, neben m -ten Potenzen konstanter Grössen (im Zähler) jeweilig die Faktorielle $m!$ im Nenner auftritt.

Auch die Übertragung der gesamten Theorie der iterierten Funktionen und der iterierten Kerne auf die neue Art regularisierter Volterraschen Gleichungen kann jetzt direkt vorgenommen werden. Der Grund zu einer solchen Möglichkeit liegt darin, dass für vielfache Hadamardsche Integrale die gewöhnlichen Gesetze der Vertauschbarkeit unverändert bestehen bleiben. Ein Nenner $y^{p+\frac{1}{2}} z^{q+\frac{1}{2}}$ verlangt nämlich dort einfach die Unterdrückung aller Glieder mit $y^{p'} z^{q'}$, $p' < p$, $q' < q$ in der Taylorschen Entwicklung des hinreichend regulären Zählers um $(0,0)$, was offenbar von der Reihenfolge der Integrationen in bezug auf y und z unabhängig ist. Bei der Überführung ins Komplexe nach dem oben geschilderten Erweiterungsverfahren ergibt sich infolge der völligen Regularisierung die behauptete Vertauschbarkeit erst recht.

Die Integralgleichungen (3,2) und (3,6), in denen jetzt V_0 durch $\frac{1}{4} V_0$ (bei halblemniskatischem Wege durch $\frac{1}{2} V_0$) zu ersetzen ist, werden dann aber zu völlig regulären Volterraschen Integralgleichungen in bezug auf t , so dass ihre Auflösung — ungeachtet der nunmehr komplex gewordenen Koordinaten von σ und σ_0 — regulär gesichert erscheint. Man kann diese Lösung unmittelbar mit Hilfe der zugehörigen Resolvente ausschreiben, woraus dann sofort folgt, dass die jeweilige Lösung ausserhalb des geführten Schlitzes überall analytisch ausfällt. Es versteht sich dabei von selbst, dass in jeweilig angebbaren Zeiträumen an der Grenze eine entsprechende Zurückwerfung der Wellen erfolgt, die dann das freie Glied beeinflusst, so dass man etappenweise vorgehen muss: das Wesen der Methode bleibt davon unberührt.

5. Bei der oben gegebenen Zurückführung auf komplexe Randintegrale benutzt man im Grunde nirgends den analytischen Charakter

der betrachteten Funktionen im Gesamtgebiete der reellen räumlichen Variablen, sondern allein den Umstand, dass jene Funktionen auf beiden Seiten des Schlitzes — $ct_0 \leq \rho ct \leq ct_0$ mit gleichen reellen Werten gegeben sind. Zwar wurde dabei z. B. für $f(\frac{z}{t})$ der Verlauf jener Werte am Schlitzufer selbst noch als analytisch vorausgesetzt; indessen ist dies offenbar für die eindeutige analytische Fortsetzung ins komplexe Gebiet durchaus nicht unbedingt notwendig. Man braucht ja nur, um dies einzusehen, das Äussere des jeweiligen Schlitzes — $ct_0 \leq r \leq ct_0$ auf dasjenige des Einheitskreises symmetrisch konform abzubilden. Die fragliche analytische Fortsetzung ist auf diese Weise sogar *beliebig weit hinaus* eindeutig gesichert, nachdem für das ganze in Frage kommende endliche Gebiet des Reellen gleichmässig ein und derselbe hinreichend weit gezogene reelle ρ -Schlitz genommen worden ist. Daraus folgt aber die Möglichkeit, alle vorhin betrachteten gegebenen eindeutigen Funktionen im Reellen beispielsweise einfach als einmal stetig differenzierbar voranzusetzen. Es ist nämlich nur notwendig, dass für alle gesuchten Funktionen noch die zweiten Ableitungen in bezug auf X im Reellen existieren und stetig bleiben. Letztere werden aber hier durch unmittelbare Differentiationen unter dem Integralzeichen im Komplexen gewonnen, und ein noch stetiger Anschluss an das Reelle ist dabei gesichert, wenn dies für die eingeführten komplexen Erweiterungen der gegebenen Funktionen der Fall ist.

Die Lösung der gefundenen Volterraschen Integralgleichungen erfolgt sofort im gesamten betrachteten komplexen Gebiet, unbeschadet dessen, dass die jeweiligen Integrationen in bezug auf die komplexe Hilfsvariable ρ nur längs einer Randlinie vorgenommen werden. Wesentlich ist, dass diese Auflösung jetzt in völlig regulärer Weise gesichert erscheint.

6. Der Fall einer ungeraden räumlichen Dimensionenzahl, $n = 2k + 1$, für die fundamentale Wellengleichung (1) könnte daraufhin in wohlbekannter Weise durch Hinzufügung einer weiteren räumlichen Dimension erledigt werden, mit der Bedingung, dass alle gegebenen Anfangs- und Randwerte von der neu hinzugenommenen räumlichen Variablen unabhängig seien, was sich dann auch auf die *gesuchten* Funktionen überträgt.

Nun ist allerdings ein solcher Umweg an sich keineswegs nötig. Auch für eine ungerade räumliche Dimensionszahl lässt sich bekanntlich ein *direktes* Funktional für die Lösung des Cauchyschen Problems aufstellen, sogar mit Hilfe eines bloss $2k$ -dimensionalen regulären Oberflächenintegrals*) — der Erfüllung des Huygensschen Prinzips. Mutatis

*) Vgl. Hadamard, Le problème de Cauchy, S. 335.

mutandis lässt sich auch dieses Funktional dann für die eigentlichen Randwertprobleme in $2k+1$ (räumlichen) Dimensionen ebenso verwenden, wie dies oben mit V_0 angegeben worden ist; ein Übergang ins Komplexe wird dabei aber auch hier insofern für $k > 1$ benötigt, als dort im genannten Funktional selbst bereits $(k-1)$ -te Ableitungen (nach der Zeit) auftreten. Die dadurch entstehende Komplikation wird durch der Umweg über das Komplexe analog behoben, wie für $n=2k$.

Die Lösung des Cauchyschen Grundproblems (1,4), hier an sich ein Oberflächenintegral, kann auch als Volumintegral geschrieben werden. Für $c=1$ hat man dann:

$$(6) \quad 4\pi^{k-1}u = \left(\frac{\partial}{2t\partial t}\right)^{k-1} \int \dots \int f(\xi) d\xi,$$

genommen über die ganze Kugel $0 \leq r \leq t$.

Nach Einführung der Polarkoordinaten (4,2) erhält man daraus ein volles Schlitzintegral, wenn der Integrand in (6) mit einem Faktor multipliziert wird, dessen Realteil am unteren Ufer gleich $+1$, am oberen aber gleich -1 ist — nämlich, mit $\rho t = r$, $\varphi(\infty) = 0$:

$$(6,1) \quad \varphi(\rho) = \frac{2}{\pi i} \log \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - 1} - 1}{\rho + \sqrt{\rho^2 - 1} + 1},$$

worauf man hier aus (6) sogar zu *geschlossenen* Randintegralen im Komplexen gelangt.

7. Die vorstehenden Ausführungen bilden eine ausreichende Basis für die Behandlung der verallgemeinerten linearen Wellengleichung:

$$L[u] = u_{tt} - \sum_{k,l} g^{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial X^k \partial X^l} - \sum_m h^m \frac{\partial u}{\partial X^m} - ju = 0; \quad k, l, m = 1, \dots, n.$$

Wieder beginnen wir dabei mit dem formell einfacheren Fall einer geraden räumlichen Dimensionenzahl:

$$(7,4) \quad n = 2k.$$

Alle hier gegebenen Funktionen g^{kl} , h^m und j denken wir uns zunächst als *Ortsfunktionen*, also von der Zeit t unabhängig.

Wieder stellen wir uns als erste Aufgabe die Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems der Impulse:

$$(7,2) \quad u(X, 0) = 0; \quad u_t(X, 0) = f(X)$$

für die Gleichung (7) in Form eines expliziten Funktional:

$$(7,3) \quad u = u(X, t) = \int \dots \int V(\xi, X, t) f(\xi) d\xi,$$

wobei unter $d\xi$ etwa das invariante Volumelement in Räume ξ zu verstehen ist, bezogen auf eine naturgemäss mit der Gleichung (7) verbundene Riemannsche Metrik (die Summenzeichen lassen wir nun fort):

$$(7,4) \quad ds^2 = g_{kl} dX^k dX^l.$$

Nach den Ausführungen der vorigen Paragraphen ist selbstverständlich zu erwarten, dass auch die Formel (7,1) bestenfalls als Hadamardscher Hauptwert bzw. als komplexes Randintegral zu verstehen sein wird.

Die gesuchte „Grundlösung“ $V \equiv V(\xi, X, t)$ muss bekanntlich a) der gegebenen Gleichung (7) genügen, b) im Punkte ξ als Pol, in bezug auf den umgebenden Riemannschen Raum mit der Metrik (7,4), im wesentlichen die gleiche Singularität besitzen, wie sie für die Grundlösung der einfachsten Wellengleichung (1) bei $n=2k$ durch die Formel (1,3) gegeben worden ist.

Wir wollen nun zeigen, was in der Literatur auscheinend bisher nicht bemerkt worden ist, dass auch die Bestimmung von V durch eine explizite Volterrasche Integralgleichung gegeben werden kann. Um dieselbe möglichst invariant zu gestalten, denken wir uns in bekannter Weise bei festgehaltenem Pol ξ orthogonale geodätische Koordinaten x^m um denselben eingeführt (Riemannsche Normalkoordinaten), so dass die in bezug auf die Metrik (7,4) genommene geodätische Entfernung z eines Punktes X von ξ wenigstens in einer gewissen endlichen Umgebung des Pols durch

$$(7,5) \quad z^2 = x^{12} + \dots + x^{n2}$$

gegeben sein wird. Man kann auch hier örtliche Polarkoordinaten einführen:

$$(7,6) \quad x^1 = r \cos \theta_1, \quad x^2 = r \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2, \dots$$

$$x^n = r \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1}.$$

Für die gesuchte Lösung (7,3) machen wir nun den folgenden Ansatz:

$$(7.7) \quad \left| \int \dots \int V(\xi, X, t) f(\xi) d\xi = \left| \int \dots \int V_0(\xi; X, t) f(\xi) d\xi \right. \\ \left. - \int_0^t d\tau \left| \int \dots \int V_0(\alpha, X, t-\tau) \Phi(\alpha, \tau) d\alpha \right. \right.$$

Hierbei ist allgemein

$$(7.8) \quad V_0(A, X, t) = (t^2 - r^2)^{1/2-k},$$

unter z die *geodätische Entfernung* der beiden Punkte A und X verstanden, bezogen auf die räumliche Metrik (7.4). Neben diese stellen wir noch die vollständigere „Weltmetrik“ unseres Problems:

$$(7.9) \quad dS^2 = dt^2 - g_{kl} dX^k dX^l.$$

Die Sicherung der Anfangswerte ist durch den Ansatz (7.7) gewährleistet, sobald $\Phi(\alpha, \tau)$ regulär ausfällt. Das Integrationsgebiet des zweiten Integrals rechter Hand in (7.7) ist offenbar der charakteristische Nullkegel in (X, t) , dasjenige der beiden übrigen Integrale — der innere Schnitt dieses Kegels mit der Anfangsebene $t=0$.

8. Wendet man jetzt auf beiden Seiten des Ansatzes (7.7) in wohlbekannter Weise die durch unsere Gleichung (7) definierte Operation $L[u]$ an, so erhält man auf Grund der gegebenen Definitionen identisch:

$$0 = \left| \int \dots \int L[V_0(\xi, X, t) f(\xi) d\xi - \Phi(X, t) \right. \\ \left. - \int_0^t d\tau \left| \int \dots \int L[V_0(\alpha, X, t-\tau)] \Phi(\alpha, \tau) d\alpha \right. \right.$$

was also zunächst wieder eine im wesentlichen *Volterrasche* Integralgleichung für Φ darstellt.

Gehen wir naturgemäss auch hier ins Komplexe über, zu voll- bzw. halblemniskatischen Wegen, so hat man sich nur bei V_0 überall den Faktor $1/4$ bzw. $1/2$ hinzuzudenken, worauf die Lösung in der folgenden Gestalt gewonnen wird:

$$\Phi(\alpha, \tau) = \sum_{p=0}^{\infty} \int \dots \int M_p(\xi, \alpha, \tau) f(\xi) d\xi; \\ M_0 = L[V_0(\xi, \alpha, \tau)].$$

$$M_{p+1} = - \int_0^{\tau} d\omega \left| \int \dots \int L[V_0(\beta, \alpha, \tau-\omega)] M_p(\xi, \beta, \omega) d\beta \right.$$

Durch Einsetzen dieser Resultate in (7.7) erhält man eine Identität, bei der man in allen Gliedern Integrale mit $f(\xi)$ vor sich haben wird, und zwar bei völlig willkürlicher Wahl der ursprünglichen Funktion $f(\xi)$. Man braucht daher $f(\xi)$, mit hinreichend regulärem Anschluss, etwa nur in einem kleinen Gebiet um einen festen Punkt ξ_0 als $\neq 0$ anzunehmen, um daraufhin mit Hilfe der Vertauschbarkeit der Integrationsfolgen schliessen zu können, dass die erwähnte Identität nur dann bestehen kann, wenn die Faktoren von $f(\xi) d\xi$ auf beiden Seiten im Sinne der Hadamardschen Integration einander gleich sind. Anderenfalls könnte man nämlich bei festgehaltenen X und t ohne weiteres derartige regularisierende $f(\xi)$ wählen, dass man in üblicher Weise zu einem Widerspruch käme.

Das Einsetzen von (8.1) in (7.7) ergibt danach:

$$(8.2) \quad V(\xi, X, t) = V_0(\xi, X, t) - \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^t d\tau \left| \int \dots \int V_0(\alpha, X, t-\tau) M_p(\xi, \alpha, \tau) d\alpha \right.,$$

womit V — dessen Existenz sonst (mit stärkeren Einschränkungen) durch die klassischen Untersuchungen von Hadamard gesichert erscheint, auch wirklich bestimmt ist.

Interessanter aber als die Auflösungsformel (8.2) ist die aus ihr unmittelbar folgende *direkte* Volterrasche Gleichung für V selbst:

$$(8.3) \quad V(\xi, X, t) = V_0(\xi, X, t) \\ - \int_0^t d\tau \left| \int \dots \int L[V_0(\xi, \alpha, \tau)] V(\alpha, X, t-\tau) d\alpha \right.,$$

deren Auflösung mit Hilfe der iterierten Kerne wörtlich (8.2) wiederherstellt. Man kann hier also die Grundlösung V , den Schlüssel zu allem weiteren, auf relativ einfache Weise effektiv berechnen. Mehr noch: man kann die ganze Theorie der Grundlösung und ihrer Anwendung überhaupt explizit auf die Integralgleichung (8.3) stützen, worauf wir hier aber nicht näher eingehen, da alle nötigen Hilfsmittel dazu nunmehr gegeben sind.

Es dürfte voninigem Interesse sein, das Hauptglied in $L[V_0(\xi, X, t)]$ anzugeben. Es ist dies der Beltramische Differentialausdruck:

$$(8.4) \quad \nabla^2 V_0 = \frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} - g^{kl} \frac{\partial^2 V_0}{\partial X^k \partial X^l};$$

die tieferen Glieder sind ohne Interesse. Bezieht man sich aber auf geodätische Polarkoordinaten im Pol ξ , so wird (8.4), abgesehen wie-

derum von Gliedern tieferer Ordnung, da V_0 nach Formel (7,8) überhaupt nur von t und r abhängt, zu

$$(8,5) \quad \nabla^2 V_0 \sim \frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V_0}{\partial r^2} = (2k-1)^2 (t^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}-k}.$$

Man hat also letzten Endes überhaupt:

$$(8,6) \quad L[V_0(\xi, X, t)] = W(\xi, X, t) (t^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}-k},$$

worin W für $r \rightarrow t$ endlich bleibt.

9. Sowie die Grundlösung V gefunden ist, lassen sich hier die klassischen gemischten Randwertaufgaben genau so behandeln, wie dies im Spezialfall der Grundgleichung (1) in § 5 bereits dargetan worden ist. Wesentlich ist, dass dabei die Analytizität der auftretenden Funktionen, wie schon auch in §§ 5—6, im Reellen nicht verlangt zu werden braucht: es genügt überall die Möglichkeit eines stetigen Anschlusses der eingeführten komplexen Erweiterungen an das Reelle, und hierzu wiederum ist es z. B. bereits hinreichend, alle gegebenen reellen Funktionen (bei den g^{kl} auch deren ersten Ableitungen) einer Lipschitz-Hölderschen Bedingung zu unterwerfen.

10. Die Gleichung (7) könnte noch ein Glied $-2p(X)u_t$ enthalten. Man setze alsdann in bekannter Weise

$$(9) \quad u = e^{p(X)t} U,$$

worauf man für U wieder die Form (7) erhält.

Die in der Gleichung (7) gegebenen Funktionen können im allgemeineren Fall auch von der Zeit t abhängen. Steht dann in der Gleichung auch noch ein Glied $-2p(X, t)u_t$, so befreit man sich hier von demselben durch den Ansatz

$$(9,1) \quad u = e^{\int_0^t p(X, \tau) d\tau} U.$$

Die weitere Behandlung mittels der Methode der Integralgleichungen verläuft dann ganz analog wie vorhin angegeben. Nur wird man den Hauptoperator wie folgt ansetzen: den Begriff der Normalen in bekannter Weise zu modifizieren haben.

Wichtig ist vor allem, dass die hier gegebenen Methoden auch

für die allgemeinste Form der linearen normalhyperbolischen Gleichung anwendbar bleiben:

$$G^{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial X^k \partial X^l} + H^m \frac{\partial u}{\partial X^m} + Ju = F,$$

$$k, l, m = 0; 1, \dots, n,$$

worin neben den „räumlichen“ Koordinaten $X^1 \dots X^n$ noch eine „zeitartige“ $X^0 \equiv T$ auftritt. Man kann dabei die obige Gleichung natürlich mit einem beliebigen Eichfaktor $\lambda^*(X)$ multiplizieren, worin X nun ein Punkt der vorliegenden Raum-Zeitwelt ist. Es folgt daraus, dass in Wahrheit nicht die eigentliche Riemannsche Metrik der genannten Welt hier für die Theorie massgebend ist, sondern deren „konforme“ (Weylsche) Erweiterung, bei der nur die Winkel, nicht aber die Längen unverändert bleiben.

Das Cauchysche Problem wird jetzt für eine beliebige n -dimensionale Mannigfaltigkeit

$$(10,1) \quad t(X^0, \dots, X^n) = 0$$

zu geben sein, deren Normale (= „Weltnormale“) überall zeitlich ausfällt. Wir legen einen beliebigen Eichfaktor $\lambda \equiv \lambda(X)$ für die Weltmetrik

$$(10,2) \quad ds^2 = \lambda G_{kl} dX^k dX^l$$

fest, und wählen neue unabhängige Variable, bei denen die Gesamtheit der von der obigen Fläche $t=0$ senkrecht ausgehenden Geodätischen zu einem System von Koordinatenlinien wird. Nach klassischen Sätzen von Beltrami geht dann die Gleichung (10) einfach in eine solche von der Form (7), i. a. mit einem Zusatzglied $-2pu_t$, über, in der alle Koeffizienten auch von t abhängen, worauf die Aufgabe nun als erledigt gelten kann. Es sei nur erwähnt, dass hier bei den Randwertaufgaben die Normale stets als „Weltnormale“ zu verstehen ist.

Die oben gegebene Erweiterung einer vorgegebenen linearen hyperbolischen Gleichung ins Komplexe und die einheitliche Zurückführung aller ihrer Randwertaufgaben, sowohl der Cauchyschen wie der gemischten, auf Volterrasche Integralgleichungen scheint uns die Theorie auf einen besonders durchsichtigen und einfachen Boden zu stellen. Die geschilderte Methode unterscheidet sich wesentlich von denjenigen, die in neuerer Zeit von den Herren Levy, Friedrichs, Courant, Soboleff, Mathisson und Schauder für die hyperbolische Gleichung verwendet worden sind. Überdies beziehen sich die Arbeiten der genannten Autoren nur auf das Cauchysche Problem allein, und die Möglichkeit der Anwendung ihrer Resultate auf eigentliche Randwertaufgaben bleibt zunächst, wie es uns scheint, ein noch offenes Problem.