Über den verallgemeinerten Fluss-Divergenz Satz

von

Witold Wilkosz

Kraków.

§ 1. Allgemeine Definition des Flusses.

Es sei D eine offene beschränkte Menge des n-dimensionalen euklidischen Raumes und $\mathbf{a}(P)$ eine in den Punkten P des Randes F von D definierte Vektorfunktion.

Greifen wir einen beliebigen Einheitsvektor $\mathbf{m}$ des Raumes heraus und bezeichnen mit $a_{\mathbf{m}}(P)$ die Komponente von $a(P)$ in der Richtung $\mathbf{m}$, so gilt:

$$a_{\mathbf{m}}(P) = \mathbf{a}(P) \times \mathbf{m}$$ [1]

Nun betrachten wir eine $(n-1)$-dimensionale Ebene Π, die zu $\mathbf{m}$ orthogonal ist, sonst aber willkürlich gewählt werden kann und definieren die Funktion $\Phi_{\mathbf{m}}(Q)$ — genauer $\Phi_{\mathbf{m}}(Q_i, \mathbf{a}(P))$ — auf folgende Weise.

Durch jeden Punkt Q von Π führen wir die zu $\mathbf{m}$ parallele Gerade l_Q. Diese durchsetzt D längs einer linearen, offenen und beschränkten Menge Ω_Q, die in höchstens abzählbar unendlich viele offene Segmente $\overline{P_i' P_i''}$ zerfällt; P_i' bedeute den Anfang, P_i'' das Ende — in der Richtung $\mathbf{m}$ — eines jeden von ihnen. Ist nun die Menge Ω_Q leer, dann sei $\Phi_{\mathbf{m}}(Q) = 0$. Besteht die Menge Ω_Q aus endlich oder abzählbar unendlich vieleu Segmenten $\overline{P_i' P_i''}$, dann setzen wir:

$$\Phi_{\mathbf{m}}(Q) = \sum_i \{a_{\mathbf{m}}(P_i'') - a_{\mathbf{m}}(P_i')\};$$

---

[1]) $\times$ bedeutet die skalare Multiplikation.

für den Fall einer unendlichen Anzahl von Segmenten setzen wir absolute Konvergenz der auf der rechten Seite der Definitionsgleichung stehenden Reihe voraus. [Der Grenzwert ist also von der willkürlichen Anordung der Glieder unabhängig].

Wenn die Funktion $\Phi_{\mathbf{m}}(Q)$ *fast—überall definiert* und *summierbar* ist, bilden wir das Integral:

$$A(\mathbf{m}) = \int\limits_{\Pi} \Phi_{\mathbf{m}}(Q)\, dQ.$$

Ist nun

I. $A(\mathbf{m})$ für *jede* Richtung $\mathbf{m}$ des Raumes definiert (endlich),

II. die Summe

$$M = A(\mathbf{m}_1) + A(\mathbf{m}_2) + \ldots + A(\mathbf{m}_n)$$

für n zueinander orthogonale Einheitsvektoren $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \ldots, \mathbf{m}_n$, die zusammen ein Koordinatenrechtssystem bilden, von der speziellen Wahl des Systems unabhängig,

dann nennen wir M den Wert des *Flusses* des Vektors $\mathbf{a}(P)$ *aus D durch den Rand F.*

Bemerkung I. Dem Wortlaut der vorstehenden Definition nach ist der Fluss ein von $\mathbf{a}(P)$ und D abhängiges Funktional. Die klassische Definition dagegen erklärt den Fluss als Funktion des Vektors $\mathbf{a}(P)$ und des Randes F von D.

Diese Definition liefert aber eine eindeutige Funktion nur in dem einfachen Fall, wo z. B. der Rand F aus einer endlichen Anzahl regulärer, geschlossener Flächen besteht und die Richtung der Normalen ein hinreichend scharfes Kriterium darstellt zur Unterscheidung der offenen Menge D von deren Komplementärmenge. Die moderne Topologie verfügt indessen über Beispiele von abgeschlossenen Mengen F, die den vollständigen Rand von endlich oder gar unendlich vielen Gebieten bilden. Kaum lässt man also die Einschränkung betreffs der Randstruktur fallen, tritt eine Unzulänglichkeit der klassischen Erklärung deutlich zu Tage; wir müssen der Abhängigkeit des Flusses von der Wahl des Gebietes nachträglich Ausdruck geben.

Bemerkung II. Definitionsgemäss ist der Wert des Flusses von der besonderen Wahl des rechtwinkligen Koordinatenrechtssystems unabhängig. Die Existenz des Flusses stellt also eine *innere (intrinsèque) Eigenschaft* der Menge D und der Funktion $\mathbf{a}(P)$ dar.

Bemerkung III. Herr Cino Poli bezeichnet in seiner aus dem

Jahre 1913 stammenden Arbeit „Sugli integrali estesi al contorno di un campo qualunque" (Atti della R. Accademia. Torino) mit einem Ausdruck, der etwa unserem $A(\mathbf{m})$ entspricht, wo $\mathbf{m}$ den Einheitsvektor der x- oder y-Achse in der Ebene bedeutet, den Wert des Integrales

$$\int a_{\mathbf{m}}(x, y)\, dx \qquad \text{oder} \qquad \int a_{\mathbf{m}}(x, y)\, dy.$$

Diese Ausdrücke stellen aber *keine innere*, geometrische oder physikalische Begriffe dar; sie haben vielleicht nur die Anwendung des bekannten Satzes von Fubini zu erleichtern.

§ 2. Die G—Eigenschaft offener Mengen.

Wir behalten alle Begriffe und Bezeichnungen des vorigen Paragraphen und nehmen die offene beschränkte Menge D in Betracht. Nun erklären wir eine von dem Einheitsvektor $\mathbf{m}$ abhängige Funktion $\varphi_{\mathbf{m}}(Q)$ folgendermassen:

$\varphi_{\mathbf{m}}(Q)$ = Anzahl der durch l_Q bestimmten, offenen Strecken $\overline{P_i' P_i''}$ ($\varphi_{\mathbf{m}}(Q)$ kann also gegebenenfalls positiv unendlich werden).

Definition I. Ist die Funktion $\varphi_{\mathbf{m}}(Q)$ *fast überall endlich und summierbar*, dann sagen wir von der Menge D, *sie besitze in der Richtung* $\mathbf{m}$ *die Eigenschaft* (G).

Bemerkung. Die Abhängigkeit $\varphi_{\mathbf{m}}(Q)$ von der $(n-1)$—dimensionale Ebene Π ist nur scheinbar. Die Bedingungen der Endlichkeit und der Summierbarkeit bleiben bestehen, wenn man Π durch eine andere, ebenfalls zu $\mathbf{m}$ orthogonale $(n-1)$—dimensionale Ebene ersetzt.

Ebenso hängt das Integral

$$B(\mathbf{m}) = \int\limits_{\Pi} \varphi_{\mathbf{m}}(Q)\, dQ$$

nur scheinbar von Π ab.

Definition II. Besitzt die Menge D die Eigenschaft (G) in *jeder* Richtung $\mathbf{m}$ des Raumes, dann sagen wir kurz, D besitze die Eigenschaft (G) oder D sei eine „*Greensche*" offene beschränkte Menge.

Satz. Für *jede* offene beschränkte Menge D und für jede Richtung $\mathbf{m}$ des Raumes ist die dazugehörige Funktion $\varphi_{\mathbf{m}}(Q)$ im *Borelschen* also auch *Lebesgueschen* Sinne *messbar.*

Beweis. Einfachheitshalber betrachten wir nur den zweidimensionalen Fall einer in der Ebene E gelegenen Menge D. Natürlich wird diese Einschränkung ohne Einfluss auf die Allgemeingütligkeit der Methode der Beweisführung bleiben.

Es sei Π eine zu **m** orthogonale Gerade der Ebene E; wir wählen Π zur x — Achse eines orthogonalen Rechtssystems (x, y). Betrachten wir ferner ∞^2 Gerade $l_{s,\,t}$ der Ebene, deren Gleichungen:

$$\{l_{s,\,t}\} \qquad y = \frac{t}{2^s}, \qquad \begin{array}{l} t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ; \\ s = 0, 1, 2, \ldots ; \end{array}$$

lauten.

Für $s = \text{const.}$ bilden die Geraden $l_{s,\,t}$ die Schar T_s. Diese teilt die Ebene in Streifen von konstanter Breite $\frac{1}{2^s}$. Den zwischen den Geraden $l_{s,\,t}$ und $l_{s,\,t+1}$ gelegenen Streifen bezeichnen wir $B_{s,\,t}$; $l_{s,\,t}$ und $l_{s,\,t+1}$ teilen wir dem Streifen zu.

Wir bilden nun ein Funktionensystem $\varphi_{s,\,t}(x)$ auf folgende Weise. Die Gerade $x = x_0$ schneide den Streifen $B_{s,\,t}$ längs der Strecke $\overline{P_1 P_2}$ (die Endpunkte mitbegriffen).

(1) Wenn $\overline{P_1 P_2}$ aus lauter Punkten von D besteht, dann setzen wir

$$\varphi_{s,\,t}(x_0) = 0$$

(2) Besteht $\overline{P_1 P_2}$ aus lauter gegen D *äusseren* Punkten (keine Randpunkte!), dann sei auch

$$\varphi_{s,\,t}(x_0) = 0.$$

(3) Gehören alle Punkte von $\overline{P_1 P_2}$ zu D mit *alleiniger* Ausnahme eines Punktes, der *zwischen* P_1 und P_2 liegt, somit ein Randpunkt von D ist, dann definieren wir:

$$\varphi_{s,\,t}(x_0) = 1.$$

(4) In allen anderen Fällen sei:

$$\varphi_{s,\,t}(x_0) = \frac{1}{2}.$$

Wir behaupten, dass für jedes $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und jedes $s = 0, 1, 2, \ldots$ die Funktionen $\varphi_{s,\,t}(x)$ (B) — und (L) — messbar sind. Bezeichnen wir mit E_1, E_2, E_3, E_4 die Gesammtheiten aller x, die für

die Funktion $\varphi_{s,\,t}(x)$ den Fällen (1), (2), (3) und (4) entsprechen, dann stellen wir fest:

(1) Die Gesammtheit E_1 ist eine offene, also (B)—messbare Menge.

(2) Dasselbe gilt für die Menge E_2.

(3) Um die Menge E_3 zu konstruieren führen wir zwei Funktionen ein

$\lambda(x_0) =$ Entfernung des Punktes $x = x_0$, $y = \frac{t}{2^s}$ von der abgeschlossenen Menge $F \times B_{s,\,t}$, gemessen auf der Geraden $x = x_0$.

$\mu(x_0) =$ Entfernung des Punktes $x = x_0$, $y = \frac{t+1}{2^s}$ von $F \times B_{s,\,t}$, gemessen auf der Geraden $x = x_0$.

Beide Funktionen sind auf einer abgeschlossenen, also (B)—messbaren Menge K ($K =$ Projektion von $B_{s,\,t} \times F$ auf Π) sinnvoll und, wie leicht zu ersehen ist, *nach oben oder unten halbstetig*. Sie gehören somit zu den (B) — messbaren Funktionen. Nun haben wir

$$E_3 = (\hat{x})\left(\lambda(x) + \mu(x) = \frac{1}{2^s}\right) \times (\hat{x})(\lambda(x) \neq 0) \times (\hat{x})(\mu(x) \neq 0).$$

($(\hat{x})\varphi(x)$ bezeichnet — nach Russel — die Gesemmtheit aller x, die die Bedingung $\varphi(x)$ erfüllen).

Als Produkt dreier (B)—messbaren Mengen ist E_3 selbst (B)—messbar.

(4) E_4 ist die Komplementärmenge der Summe $E_1 + E_2 + E_3$, daher auch (B)—messbar.

Die Funktion $\varphi_{s,\,t}(x)$ nimmt nur die Werte $0, \frac{1}{2}, 1$ und zwar jeden auf einer (B) — messbaren Menge: $E_1 + E_2, E_4$ oder E_3 an. Sie ist daher (B)—und folglich auch (L)—messbar.

Bilden wir nun

$$\varphi_s(x) = \sum_{t \mid -\infty}^{t \mid \infty} \varphi_{s,\,t}(x) \qquad\qquad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

so entstehen wiederum (B)—messbare Funktionen. Wir behaupten, dass

$$\varphi_{\mathrm{m}}(x) = \lim_{s \mid +\infty} \varphi_s(x).$$

Wenn nämlich die Gerade $x = x_0$ die Menge D längs einer *endli-*

chen Anzahl von Strecken schneidet, so besteht, von einem hinreichend grossen s aufwärts, die Gleichheit

$$\varphi_s(x_0) = \Phi_m(x_0).$$

Schneidet dagegen $x = x_0$ die Menge D längs unendlich vieler Strecken, dann wächst $\varphi_s(x_0)$ offenbar ohne Grenze, wenn wir s gegen $+\infty$ streben lassen.

Die Funktion $\Phi_m(x)$ stellt sich somit als Grenze einer Folge von (B)—messbaren Funktionen auch selbst (B)—und (L)—messbar heraus.

§ 3. Vektorfunktionen von Punkten.

Wir erhalten eine nützliche Definition von Vektorfunktionen eines Punktes P im n-dimensionalen Raume,

$$\mu = F(P), \tag{1}$$

indem wir die bekannte Riemannsche allgemeine Definition der Funktion auf den Fall der Abhängigkeit eines Vektors von einem Punkte zweckmässig erweitern.

Wir werden im Folgenden die kartesischen orthogonalen Koordinaten-rechtssysteme im Raume mit (S), (S'), (S''), ... bezeichnen.

In einem von diesen, es sei (S), nimmt die Beziehung (1) die Forman

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ u_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_n), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ u_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{2}$$

wo $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die *Komponenten* des Vektors $\mathbf{u}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die *Koordinaten* des Punktes P darstellen. Wir nennen $f_1, \ldots, f_n$ *Komponenten* der Funktion $F(P)$.

Nun wollen wir gewisse *innere (intrinsèque)* Eigenschaften der Vektorfunktionen untersuchen.

Definitionen I. Die Vektorfunktion $\mathbf{u} = F(P)$

(1) strebt im Punkte $P = P_0$ gegen die Greuze $\mathbf{u}^0$,
(2) ist im Punkte P_0 stetig.

(3) ist beschränkt,
(4) ist integrierbar oder summierbar
(5) ist ein Polynom des Punktes P,

wenn in *jedem* System (S)

(1) $$\lim_{x_1, \ldots, x_n \mid x_1^0, \ldots, x_n^0} f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u^0_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

$(x_1^0, \ldots, x_n^0$ (stellen die Koordinaten von P_0, $u_1^0, \ldots, u_n^0$ die Komponenten von $\mathbf{u}^0$ dar) ist;

(2) $f_k(x_1, \ldots, x_n)$ im Punkte $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ für $k = 1, 2, \ldots, n$

stetig,

(3) $f_1, f_2, \ldots, f_n$ beschränkt,

(4) $f_1, f_2, \ldots, f_n$ integrierbar oder snmmierbar,

(5) $f_1, f_2, \ldots, f_n$ Polynome der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$

sind.

Alle diese Definitionen gehören dem Typus an, den wir als Typ ω bezeichnen; er ist von der Art, dass wenn die Bedingungen einer Definition in einem der Systeme (S) gelten, so sind sie in allen diesen Systemen erfüllt; mit anderen Worten, kommt die definierte Eigenschaft der Funktion in einem der (S) — Systeme zu, so bleibt sie in allen diesen Systemen bestehen.

Wir wollen den Definitionen (1)—(3) eine innere, von der Wahl des (S) — Systems unabhängige Form geben.

Zunächst führen wir folgende *innere* Begriffe und Bezeichnungen ein:

(1) $$\text{mod } \mathbf{a} = \text{Modul des Vektors } \mathbf{a}$$

(2) $B - A$ = Vektor des Punktepaares (A, B);

(3) $A + \mathbf{a}$ = Summe des Punktes A und des Vektors $\mathbf{a}$ = Punkt B von der Art, dass $\mathbf{a}$ der Vektor des Punktepaares (A, B), ist

Die Begriffe der Summe von Vektoren, des Produktes eines Vektors mit einer reellen Zahl, des skalaren sowie vektoriellen Produktes zweier Vektoren nehmen wir als bereits bekannt an.

Wir formen unsere Definitionen um:

(1) $$\lim_{P \mid P_0} F(P) = \mathbf{u}^0$$

bedeute:

(a) P_0 ist ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches M der Funktion $F(P)$,

(b) für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ von der Art, dass die Ungleichheit

$$\operatorname{mod}(P - P_0) < \delta$$

für jedes P aus M

$$\operatorname{mod}(F(P) - \mathbf{u}^0) < \varepsilon$$

folgert.

( ) Die Stetigkeit von $F(P)$ im Punkte $P = P_0$ bedeute

$$\lim_{P \mid P_0} F(P) = F(P_0).$$

(3) Die Beschränktheit von $F(P)$ bedeute: es gibt eine Schranke $K > 0$, dass

$$\operatorname{mod} F(P) < K.$$

im ganzen M bleibt.

Die Definitionen (4) und (5) ist es zweckmässiger in der früheren Gestalt ungeändert zu lassen.

Wir stellen noch einige allgemein bekannte Begriffe und Tatsachen aus der Theorie der linearen Vektortransformationen zusammen.

Eine Operation α heisst *lineare Vektoroperation* oder *vektorielle Homographie*, wenn sie

(1) Vektoren in Vektoren transformiert,

(2) Den Regeln:

$$\alpha\,\mathbf{a} + \alpha\,\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

$$\alpha\, m\,\mathbf{a} = m\,\alpha\,\mathbf{a},$$

($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ beliebige Vektoren, m — willkürliche reelle Zahl, $\alpha\,\mathbf{u}$ = der aus $\mathbf{u}$ durch die Transformation α erzeugte Vektor) gehorcht.

In einem (S)—Koordinatensystem, dessen Achsenversoren $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n$ sind, representiert die Homographie σ die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_{11}, & \sigma_{12} & , \ldots, & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21}, & \sigma_{22} & , \ldots, & \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1}, & \sigma_{n2} & , \ldots, & \sigma_{nn} \end{matrix} \right\|$$

der Elemente

$$\sigma_{ik} = \sigma\,\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_k, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Es gilt, wenn $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n$, die Komponenten der Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ darstellen und

$$\mathbf{v} = \sigma\,\mathbf{u}$$

ist

$$v_i = \sum_{k \mid 1}^{n} \sigma_{ik}\, u_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen kehren wir zur Betrachtung der Vektorfunktionen zurück. (Den für die vektoriellen Homographien näher interessierten Leser verweisen wir auf das Buch von C. Burali-Forti und R. Marcolongo „Analisi vettoriale generale, t. I, Bologna 1929).

Definition II. Die Funktion $F(P) = \mathbf{u}$ heisst im Punkte P_0 *differenzierbar*, wenn eine Homographie α und eine Vektorfunktion $\mathbf{m}(h)$ des Vektors $\mathbf{h}$ existieren von der Art, dass

$$F(P_0 + \mathbf{h}) - F(P_0) \equiv \alpha\,\mathbf{h} + \mathbf{m}(\mathbf{h}), \tag{3}$$

in der Umgebung von P_0 und

$$\lim_{\operatorname{mod}\mathbf{h} \mid 0} \frac{\operatorname{mod}\mathbf{m}(\mathbf{h})}{\operatorname{mod}\mathbf{h}} = 0 \tag{4}$$

ist.

Satz. Es gibt höchstens *eine* Zerlegung der Differenz $F(P_0 + \mathbf{h}) - F(P_0)$ von der Form (3) der Definition II.

Beweis. Nehmen wir an, dass noch

$$F(P_0 + \mathbf{h}) - F(P_0) \equiv \beta\,\mathbf{h} + \mathbf{n}(\mathbf{h})$$

mit

$$\lim_{\operatorname{mod}\mathbf{h} \mid 0} \frac{\operatorname{mod}\mathbf{n}(\mathbf{h})}{\operatorname{mod}\mathbf{h}} = 0$$

ist. Es würden dann in jeden (S) — System der Vektoren $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n$ die Gleichheiten

$$\alpha(\lambda\,\mathbf{i}_s) + \mathbf{m}(\lambda\,\mathbf{i}_s) \equiv \beta(\lambda\,\mathbf{i}_s) + \mathbf{n}(\lambda\,\mathbf{i}_s), \quad {}_{s = 1, 2, \ldots, n,}$$

für alle $0 < \lambda < \lambda_0$ und ein entsprechend gewähltes $\lambda_0 > 0$ gelten. Daraus folgt

$$\lambda [\alpha \mathbf{i}_s - \beta \mathbf{i}_s] = \mathbf{n} (\lambda \mathbf{i}_s) - \mathbf{m} (\lambda \mathbf{i}_s)$$

oder

$$\alpha \mathbf{i}_s - \beta \mathbf{i}_s = \frac{\mathbf{n}(\lambda \mathbf{i}_s)}{\lambda} - \frac{\mathbf{m}(\lambda \mathbf{i}_s)}{\lambda}.$$

Wegen $\operatorname{mod} \lambda \mathbf{i}_s = \lambda$, orhalten wir durch Grenzübergang

$$\alpha \mathbf{i}_s = \beta \mathbf{i}_s, \qquad s = 1, 1, \dots, n,$$

und daher für beliebiges $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{u} &= \alpha [u_1 \mathbf{i}_1 + \dots + u_n \mathbf{i}_n] \\ &= u_1 \alpha \mathbf{i}_1 + \dots + u_n \alpha \mathbf{i}_n \\ &= u_1 \beta \mathbf{i}_1 + \dots + u_n \beta \mathbf{i}_n \\ &= \beta \mathbf{u}, \end{aligned}$$

somit

$$\alpha = \beta,$$

also auch

$$\mathrm{m}(\mathbf{h}) = \mathbf{n}(\mathbf{h}),$$

Definition III. Ist die Funktion $\mathbf{u} = F(P)$ im Punkte $P = P_0$ differenzierbar, dann nennen wir die durch die Zerlegung (3) bestimmte Homographie α *Ableitung* von $F(P)$ *nach* P im Punkte $P = P_0$ und bezeichnen sie

$$\frac{d\,F(P)}{d\,P} \text{ für } P = P_0.$$

Satz. Ist $\mathbf{u} = F(P)$ im Punkte $P = P_0$ *differenzierbar*, so sind in *jedem* (S) — System die Komponenten $f_s(x_1, \dots, x_n)$ $(s = 1, 2, \dots, n)$ im Punkte $x_i = x_i^0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ im Stolzschen Sinne *total differenzierbar* und umgekehrt. Die Definition III gehört zum Typ ω.

Wir überlassen dem Leser den einfachen Beweis dieses Satzes, indem wir ihn nur aufmerksam machen, dass

(1) die Zerlegung (3) der Definition II in einem (S)—System den Zerlegungen

$$\begin{aligned} f_i(x_1^0 + h_1, \dots, x_n^0 + h_n) &- f_i(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= a_{i\,1} h_1 + \dots + a_{i\,n} h_n + m_i(h_1, \dots, h_n), \\ &\qquad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

[$h_1, \dots, h_n$ sind die Komponenten von $\mathbf{h}$, $m_1, \dots, m_n$ die von $\mathbf{m}(\mathbf{h})$] entspricht;

(2) die Bedingung (4) der Def. II, hier

$$\lim_{h_1, \dots, h_n \to 0} \frac{m_i(h_1, \dots, h_n)}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

bedeutet.

Satz. Wenn $\mathbf{u} = F(P)$ im Punkte $P = P_0$ differenzierbar ist, so gilt in jedem (S) — System

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \dots\dots, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x^1}, & \dots\dots, & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|.$$

Bemerkung. (1) Unsere Definition II stimmt mit der von Burali-Forti und Marcolongo in dem oben genannten Buche vorgeschlagenen *nicht* überein.

(2) Wir betonen *ausdrücklich*, dass die Existenz der Derivierten $\dfrac{df_i}{dx_k}$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ im Punkte $P = P_0$ sogar für alle (S)—Systeme für die Differenzierbarkeit von $F(P)$ im Punkte $P = P_0$ *nicht hinreichend ist*. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von $\dfrac{dF}{dP}$ kann man durch eine evidente Modifikation der von mir in der Arbeit „Sul differenziale esatto" (Fundamenta Mathematicae, t. II) aufgestellten Bedingungen erhalten.

Jede vektorielle Homographie σ besitzt n Hauptinvarianten $I_s \sigma$, $s = 1, 2, \dots, n$ [2]). In jedem (S) — System hat die erste Hauptinvariante der Homographie

$$\sigma = \left\| \begin{matrix} \sigma_{11}, & \dots & , \sigma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n\,1}, & \dots & , \sigma_{nn} \end{matrix} \right\|$$

[2]) Burali-Forti und Marcolongo, op. cit.

die Gestalt

$$I_1\,\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \ldots + \sigma_{nn}\,.$$

Definition IV. Wenn die Funktion $\mathbf{u} = F(P)$ in Punkte $P = P_0$ *differenzierbar* ist, nennen wir die *erste Hauptinvartante* von $\frac{dF}{dP}$ im Punkte P_0 die *Divergenz* von $F(P)$ für $P = P_0$.

Es ist also in jedem (S) — System:

$$\operatorname{div}_P F(P) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}.$$

Aus dem gesagtem folgt unmittelbar der

Satz. Sind in einem (S)—System die Komponenten $f_1, f_2, \ldots f_n$ des Vektors $F(P)$ für $P = P(x_1, \ldots, x_n)$ im Stolzschen Sinne *total differenzierbar*, dann besitzt $F(P)$ in P die *Divergenz*

$$\operatorname{div}_P F(P) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Bemerkung. Die blosse Existenz von $\frac{\partial f_s}{\partial x_s}$ $(s = 1, 2, \ldots n)$ im Punkte P reicht für die Existenz der $div_P F(P)$ *nicht* aus; die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial f_s}{\partial x_s}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ sind schon hinreichend.

§ 4. Einige Eigenschaften des Flusses.

Die klassische Definition bezeichnet bekanntlich als Fluss des Vektors $\mathbf{a}\,(P)$ durch den Rand (S) des Gebietes G den Wert:

$$\int_S \mathbf{a}\,(P) \times \mathbf{n}\,(P)\, d\sigma$$

Es bedeutet in dieser Formel: $\mathbf{n}$ oder genauer $\mathbf{n}\,(P)$ den Einheitsvektor der Aussennormalen von S im Punkte P, $d\sigma$ das infinitesimale Oberflächenelement, das in der Formel nur symbolische Bedeutung besitzt. Um die bequeme Symbolik der klassischen Analysis wo möglich nachzuahmen, werden wir im Folgenden den Fluss mit:

$$\int_D \mathbf{a}\,(P) \times \mathbf{n}\,(P)\, dF(D)$$

oder kürzer mit

$$\int_D \mathbf{a}\,(P) \times \mathbf{n}\, dF$$

bezeichnen.

In diesen Formeln hat nicht nur dF, sondern auch der Vektor $\mathbf{n}$ ausschlieslich symbolische Bedeutung; es wurde aus algorithmischen Gründen behalten.

Wir beweisen jetzt folgende einfache Sätze.

Satz I. Existieren

$$\int_D \mathbf{a}\,(P) \times \mathbf{n}\, dF \quad \text{und} \quad \int_D \mathbf{b}(P) \times \mathbf{n}\, dF,$$

so existiert auch

$$\int_D [\mathbf{a}\,(P) + \mathbf{b}\,(B)] \times \mathbf{n}\, dF$$

und zwar ist

$$\int_D [\mathbf{a} + \mathbf{b}] \times \mathbf{n}\, dF = \int_D \mathbf{a} \times \mathbf{n}\, dF + \int_D \mathbf{b} \times \mathbf{n}\, dF.$$

Beweis. Wir erinnern an die Bezeichnungen der §§ 1 und 2 und bemerken, dass

$$(1) \quad \Phi_{\mathbf{m}}(Q; \mathbf{a}\,(P)) \text{ und } \Phi_{\mathbf{m}}\,(Q; \mathbf{b}\,(P))$$

für *fast* alle Punkte Q der Ebene Π. Grenzwerte der *absolut* konvergenten Reihen

$$\sum_i \{a_{\mathbf{m}}(P_i'') - a_{\mathbf{m}}(P_i')\} \text{ und } \sum_i \{b_{\mathbf{m}} P_i'') - b_{\mathbf{m}}(P_i')\}$$

sind,

(2) also auch

$$\Phi_{\mathbf{m}}\,(Q; \mathbf{a}\,(P) + \mathbf{b}\,(P)) = \Phi_{\mathbf{m}}\,(Q; \mathbf{a}\,(P)) + \Phi_{\mathbf{m}}\,(Q; \mathbf{b}\,(P))$$

somit

$$A\,(\mathbf{m}; \mathbf{a}\,(P) + \mathbf{b}\,(P)) = A\,(\mathbf{m}; \mathbf{a}\,(P)) + A\,(\mathbf{m}; \mathbf{b}\,(P))$$

gilt;
(3) für das (S) — System $\mathbf{m}_1, \ldots\ldots, \mathbf{m}_n$ daher

$$\sum_s A\,(\mathbf{m}_s; \mathbf{a}\,(P) + \mathbf{b}\,(P)) = \sum_s A\,(\mathbf{m}_s; \mathbf{a}(P)) + \sum_s A\,(\mathbf{m}_s; \mathbf{b}\,(P))\,;$$

die Summen auf der rechten Seite sind von der Wzhl des (S) — Systems unabhängig.

Daraus folgt auch unmittelbar der

Satz II. Existiert

$$\int \mathbf{a}\,(P) \times \mathbf{n}\, dF$$

und ist k eine beliebige reele Zahl, dann existiert auch

$$\int k\,\mathbf{a}\,(P) \times \mathbf{n}\, dF$$

und zwar ist

$$\int_D k\,\mathbf{a}\,(P) \times \mathbf{n}\, dF = k \,.\int_D \mathbf{a}\,(P) \times \mathbf{n}\, dF.$$

Bemerkung. Die Sätze I und II besagen, dass der Fluss, als Funktional des Argumentes $\mathbf{a}\,(P)$ eine *lineare* Operation darstellt. Die weitgehenden Konsequenzen dieser Tatsache wollen wir an dieser Stelle nicht verfolgen.

Satz III. Es sei

(1) D eine Greensche offene, beschränkte Menge;

(2) $\mathbf{a}^{(K)}\,(P)$ eine am Rande F von D gegen $\mathbf{a}$ *gleichmässig* konvergierende Vektorfunktionenfolge, für deren Elemente die Integrale

$$\int \mathbf{a}^{(K)} \times \mathbf{n}\, dF \qquad K = 1,\, 2, \,\ldots\ldots,$$

existieren.

Dann existiert auch

$$\int \mathbf{a}\,(P) \times \mathbf{n}\, dF$$

und zwar ist

$$\int_D \mathbf{a} \times \mathbf{n}\, dF = \lim_{K \mid \infty} \int_D \mathbf{a}^{(K)} \times \mathbf{n}\, dF.$$

Beweis. (1) Für fast alle Q sind die $\Phi_{\mathbf{m}}\,(Q; \mathbf{a}^{(K)}\,(P))$ Summen absolut konvergenter Reihen

$$\sum_i \{a^{(K)}_{\mathbf{m}}\,(P_i'') - a^{(K)}_{\mathbf{m}}\,(P_i')\}.$$

(2) Aus

$$\operatorname{mod}\,\{\mathbf{a}^{(K)}\,(P) - \mathbf{a}\,(P)\} < \varepsilon$$

folgt
$$|\,a^{(K)}_{\mathbf{m}}\,(P) - a_{\mathbf{m}}\,(P)\,| < \varepsilon.$$

Wir haben also, bei gegebenem $\varepsilon > 0$, von einem N aufwärts

$$|\,a^{(K)}_{\mathbf{m}}\,(P) - a_{\mathbf{m}}\,(P)\,| < \varepsilon \qquad (\text{für } K > N)$$

auf dem ganzen Rande F von D.

Für *fast* alle Q gilt daher

$$|\,\Phi_{\mathbf{m}}\,(Q; \mathbf{a}\,(P)\,| \leq |\,\Phi_{\mathbf{m}}\,(Q^{(K)}; \mathbf{a}(P)\,| + 2\,\varepsilon\,\varphi_{\mathbf{m}}\,(Q)$$

und

$$|\,\Phi_{\mathbf{m}}\,(Q; \mathbf{a}\,(P)\,) - \Phi_{\mathbf{m}}\,(Q; \mathbf{a}^{(K)}\,(P))\,| < 2\,\varepsilon\,\varphi_{\mathbf{m}}\,(Q)$$

Die Funktionen $\varphi_{\mathbf{m}}\,(Q)$ und $\Phi_{\mathbf{m}}\,(Q; \mathbf{a}^{(K)}\,(P))$ sind aber summierbar also

$$A\,(\mathbf{m}; \mathbf{a}\,(P)) = \lim_{K \mid \infty} A\,(\mathbf{m}; \mathbf{a}^{(K)}\,(P))$$

Daraus folgt auch die Unabhängigkeit der Summe

$$\sum_s A\,(\mathbf{m}_s; \mathbf{a}\,(P))$$

von der Wahl des (S) — Systems. Der Satz ist somit bewiesen.

Satz IV. Ist D eine *Greensche* offene beschränkte Menge und $\mathbf{a}\,(P)$ eine Vektorfunktion mit den Eigenschaften

(1) $\operatorname{mod}\,\mathbf{a}\,(P) < M$ am Rande F von D,

(2) $\displaystyle\int \mathbf{a}\,(P) \times \mathbf{n}\, dF$ ist sinnvoll,

so gilt die Abschätzung

$$\left| \int \mathbf{a}(P) \times \mathbf{n}\, dF \right| \leqq M \, . \, \lambda_D \, ,$$

wo λ_D eine *nur von* D abhängige Konstante bedeutet.

Beweis. Zur Beweisführung legen wir ein übrigens beliebig gewähltes (S) — System der Vektoren $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \ldots, \mathbf{m}_n$. Dann ist:

$$\int_D \mathbf{a}(P) \times \mathbf{n}\, dF = A(\mathbf{m}_1) + \ldots, + A(\mathbf{m}_n) \, .$$

Es gilt aber, was unmittelbar zu sehen ist,

$$|A(\mathbf{m}_S)| \leqq 2 M B(\mathbf{m}_S) \, .$$

Setzen wir

$$\lambda D = 2 \text{ Max } \{ B(\mathbf{m}_1), \ldots, B(\mathbf{m}_n) \},$$

so ergibt sich die Ungleichung

$$\left| \int \mathbf{a}(P) \times \mathbf{n}\, dF \right| \leqq M \, . \, \lambda_D \, .$$

Bemerkung. Der Fluss $\int_D \mathbf{a}(P) \times \mathbf{n}\, dF$ aus einer (G) — Menge ist somit ein *stetiges, beschränktes* Funktional des Argumentes $\mathbf{a}(P)$.

§ 5. Über die Existenz des Flusses.

Zunächst beweisen wir das vektorielle Analogon des bekannten Satzes von Weierstrass.

Satz I. Eine im abgeschlossenen n — dimensionalen Würfel K stetige Vektorfunktion $\mathbf{a}(P)$ lässt sich gleichmässig in K durch eine Folge von Vektorpolynomen approximieren.

Beweis. Es sei $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n$ ein (S) — System; mit $f_s(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichen wir die Komponenten von $\mathbf{a}(P)$ in diesem System.

Es gibt n Polynomenfolgen

$$\{ f_s^{(K)}(x_1, \ldots, x_n) \} \qquad \begin{array}{l} K = 1, 2, \ldots\ldots, \\ s = 1, 2, \ldots, n, \end{array}$$

die *gleichmässig* in K die Komponenten $f_s(x_1, \ldots, x_n)$ approximieren. Die Vektorfunktionen

$$\mathbf{a}^{(K)}(P) = f_1^{(K)} \mathbf{i}_1 + f_2^{(K)} \mathbf{i}_2 + \ldots + f_n^{(K)} \mathbf{i}_n \, , \quad K = 1, 2, \ldots,$$

approximieren $\mathbf{a}(P)$ gleichmässig in K, da

$$\text{mod} \{ \mathbf{a}(P) - \mathbf{a}^{(K)}(P) \} \leqq \sum_s | f_s(x_1, \ldots x_n) - f_s^{(K)}(x_1, \ldots, x_n) |$$

im ganzen K samt dem Rande ist; $\mathbf{a}(P)$ sind aber Vektorpolynome (§ 3) weil die Definition eines Vektorpolynoms **zum** Typ ω gehört.

Satz II. (*Hauptsatz von der Existenz des Flusses*). Der Fluss

$$\int_D \mathbf{a}(P) \times \mathbf{n}\, dF(D)$$

existiert *immer*, wenn

(1) D eine Greensche, offene, beschränkte Menge und

(2) $\mathbf{a}(P)$ eine am Rande F von D *stetige* Vektorfunktion ist.

Beweis. (1) Zunächt erweitern wir $\mathbf{a}(P)$ zu einer, im Würfel K, der die Menge D in seinem Inneren enthält, stetigen Vektorfunktion $\mathbf{b}(P)$. Diese Erweiterung ist immer auf Grund des bekannten Bohrschen Satzes (s. z. B. Carathéodory „Vorlesungen über reelle Funktionen) möglich.

(2) Hernach approximieren wir $\mathbf{b}(P)$ in K *gleichmässig* durch eine Vektorpolynomenfolge

$$\mathbf{b}^{(1)}(P), \mathbf{b}^{(2)}(P), \ldots\ldots$$

Jedes der Polynome $\mathbf{b}^{(K)}(P)$ besitzt im K die *stetige* Divergenz

$$\text{div}_P \, \mathbf{b}^{(K)}(P)$$

(3) Wir legen ein (S) — System $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \ldots, \mathbf{m}_n$ fest und betrachten das Integral

$$\int_D \text{div}_P \, \mathbf{b}^{(K)}(P)\, dP = \int_D \ldots \int \left\{ \frac{\partial f_1^{(K)}}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_n^{(K)}}{\partial x_n} \right\} dx_1 \ldots dx_n \, .$$

Nach dem bekannten Satz von Fubini ist

$$\int_D \ldots \int \frac{\partial f_s^{(K)}}{\partial x_s} d x_1 \ldots d x_n =$$

$$= \int_{\Pi_s} \ldots \int d x_1 \ldots d x_{s-1} \, d x_{s+1} \ldots d x_n \int_{M_s(Q)} \frac{\partial f_s^{(K)}}{\partial x_s} d x_s$$

wenn Π_s eine $(n-1)$ dimensionale zu **m** orthogonale Ebene und $M_s(Q) = D \times l_Q$ für jeden Punkt Q von Π ist, (l_Q bedeutet die durch Q zu $\mathbf{m}_s$ parallele Gerade).

Die Ableitungen $\frac{\partial f_s^{(K)}}{\partial x_s}$, $s=1, \ldots, n$; $K=1, 2, \ldots,$ sind *stetig*, daher

$$\int_{M_s(Q)} \frac{\partial f_s^{(K)}}{\partial x_s} d x_s = \Phi_s (Q; \mathbf{b}^{(K)}(P))$$

und

$$\int_D \mathrm{div}_P \, \mathbf{b}^{(K)}(P) \, d P = \sum_s A(\mathbf{m}_s; \mathbf{b}^{(K)}(P))$$

Die Unabhängigkeit der rechten Seite von der Wahl des (S) — Systems ist nunmehr bewiesen, folglich

$$\int_D \mathbf{b}^{(K)}(P) \times \mathbf{n} \, d F = \int_D \mathrm{div}_P \, \mathbf{b}^{(K)}(P) \, d P .$$

(4) Die Menge D besitzt die Eigenschaft (G) und es gilt

$$\lim_{K \to \infty} \mathbf{b}^{(K)}(P) = \mathbf{a}(P)$$

gleichmässtg auf dem Rande F von D.

(5) Die Existenz von

$$\int_D \mathbf{a}(P) \times \mathbf{n} \, d F$$

ergibt sich somit aus Satz III des § 4.

Bemerkung I. Die Bedingung (G) ist für die Existenz des Flusses einer auf dem Rande F der Menge D *stetigen* Vektorfunktion $\mathbf{a}(P)$ zwar *hinreichend*, doch nicht notwendig.

Ein Beispiel, von Herrn Adam Bielecki konstrniert, beweist dass diese Bedingung nicht einmal dann notwendig ist, wenn wir die Existenz des Flusses

$$\int_D \mathbf{a}(P) \times \mathbf{n} \, d F$$

für *jede* stetige Belegung $\mathbf{a}(P)$ des Randes F von D verlangen.

Wir betrachten auf der Ebene die offene, beschränkte Menge D, die aus dem offenen Quadrat K

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{array} \right\}$$

mit Ausschluss aller Punkte der Strecken

$$\lambda_n : \left. \begin{array}{l} 0 < x \leqq \frac{1}{n} \\ y = \frac{1}{n} \end{array} \right\} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

besteht. D ist ein einfach — zusammenhängendes Gebiet, doch *ohne Eigenschaft* (G).

Es sei nun $\mathbf{a}(P)$ eine *beliebige stetige* Vektor-Belegung des Randes F von D. Da jede Gerade der Ebene die Menge D nur längs einer *endlichen* Anzahl *koinzidierenden* Segmenten schneidet und daher

$$\Phi_{\mathbf{m}}(Q) = \sum_{i=1}^{T} \{ a_{\mathbf{m}}(P_i'') - a_{\mathbf{m}}(P_i') \} = a_{\mathbf{r}} \ (P_r'') - a_{\mathbf{m}}(P_1')$$

ist, können wir bei der Belegung von A $(\mathbf{m}_i)$ von den Strecken λ_n absehen und A $(\mathbf{m})$ lediglich unter Berücksichtigung der Berandung des Quadrates K bestimmen. Für K und jedes $\mathbf{a}(P)$ ist offenbar der Fluss

$$\int \mathbf{a}(P) \times \mathbf{n} \, d F$$

vorhanden.

Obgleich nur hinreichend ist die Eigenschaft (G) im Zusammenhang mit der Existenz des Flusses sehr wichtig.

In einer Reihe von Arbeiten, die demnächst zur Veröffentlichung gelangen, werde ich allein oder mit Herrn Bielecki die topologisch—metrische Natur der Greenschen Mengen genau untersuchen und dei

Theorie der sogenannten „Integralsätze der mathematischen Physik" entwickeln.

Bemerkung II. Nach einer Bemerkung der Herrn Ważewski könnte man unsere Bedingungen für die Existenz des Flusses durch folgende ersetzen:

(1) Die Vektorfunktion $\mathbf{a}(P)$ ist in *Umgebung* von F von D samt ihren *ersten Ableitungen stetig.*

(2) Die Menge D ist *offen* und *beschränkt.*

Die (G) — Eigenschaft wird weggelassen.

Der Beweis fusst auf einem Satze des Hern Bielecki[3]) aus welchem die Existenz einer Erweiterung von $\mathbf{a}(P)$ d. h. einer in dem *ganzen Raume* mitsamt ihren *ersten Ableitungen stetigen* Vektorfunktion $\mathbf{b}(P)$ folgt, auf F mit $\mathbf{a}(P)$ zusammenfällt. Wir wenden nun den Satz von Fubini direkt auf das Integral

$$\int_D \operatorname{div}_P \mathbf{b}(P)\, dP$$

an und erhalten daraus, ohne Voraussetzung der (G) — Eigenschaft, da wir keinen Grenzübergang unternehmen, die Behauptung.

§ 6. Die Lipschitz—Rademacherschen Bedingungen in vektorieller Form.

H. Rademacher hat in seiner wichtigen und bekannten Arbeit „Uber partielle und totale Differenzierbarkeit" (Math. Annalen B. 79) den Begriff der „Lipschitzschen" Zahl für reelle Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher eingeführt, den wir auf folgende Weise auf die Vektorfunktionen des Punktes übertragen.

Definition. Es sei

(1) $\mathbf{u} = F(P)$ in einer Umgebung von $P = P_0$ definiert;

(2) $w\{P_0, \rho\}$ = obere Grenze von

$$\frac{\operatorname{mod}[F(P_0 + \mathbf{h}) - F(P)]}{\operatorname{mod}\, \mathbf{h}}$$

für $$0 < \operatorname{mod}\mathbf{h} < \rho, \quad \rho > 0;$$

[3]) A. Bielecki, Annales de la Soc. Math. Pol. t. X p. 33. Sur une généralisation d'un théorème de Weicrstrass.

(3) $$L(P_0) = \lim_{\rho \mid +0} w(P_0; \rho).$$

Wir nennen $L(P_0)$ die *Lipschitzsche Zahl* für die Funktion $\mathbf{u} = F(P)$ im Punkte $P = P_0$.

Die *Endlichkeit* von $L(P_0)$ ist eine *innere Eigenschaft* der Funktion $\mathbf{u} = F(P)$ im Punkte $P = P_0$; die Definition gehört zum Typ ω.

Es sei D eine offene beschränkte Menge und für die Funktion $\mathbf{u} = F(P)$

(1) $L(P)$ in *fast* allen Punkten von D endlich und in D *summierbar;*

(2) in allen Punkten von D, wo (1) nicht zutrifft, die Funktion $F(P)$ stetig.

Dann gelten — auf Grund der Ergebnisse der genannten Arbeit von Rademacher und der Erwägungen des § 3 — die Sätze:

(1) $\mathbf{u} = F(P)$ ist in alllen Punkten von D stetig;

(2) in jedem (S) — System sind die partiellen Derivierten (Dinische Zahlen) aller Komponenten auf D *summierbar;* [4])

(3) $\mathbf{u} = F(P)$ ist im fast allen Punkten von D *differenzierbar;*

(4) Fast *überall* existieren $\dfrac{dF}{dP}$ und div $F(P)$ und sind auf D summierbar.

§ 7. Der Fluss-Divergenz Satz.

Die Lusinsche Bedingung (N) für eine reelle Funktton $f(x)$ einer reelen Veränderlichen x besagt bekanntlich, dass $f(x)$ jede Nullmenge in eine Nullmenge überführt.

Herr S. Saks hat in einer, in B. VII der Fundamenta Mathematicae, veröffentlichten Arbeit bewiesen, dass die Stetigkeit von $y = f(x)$ in $[a, b]$, die Summierbarkeit einer ihrer Derivierten und die Bedingung (N) zusammen hinreichend und notwendig sind für die Totalstetigkeit von $f(x)$ in (a, b).

Wir wollen diesen Satz für unsere Zwecke verwenden.

Definition. Die Vektorfunktion $\mathbf{u} = F(P)$ genügt in D der (verallgemeinerten) (N) — Bedingung, wenn für **jede** *Richtung* $\mathbf{m}$ des Raumes die Komponente $a_{\mathbf{m}}(P) = \mathbf{a}(P) \times \mathbf{m}$ die (N) — Bedingung auf **fast** *allen* zu $\mathbf{m}$ parallelen *Geraden* erfüllt.

[4]) In allen Punkten ondlich, wo $L(P)$ endlich ist.

Wirr können nun dem Hauptsatz unserer Arbeit folgende Gestalt geben.

Fluss - Divergenz Satz. Es sei

(1) D eine offene beschränkte (G) — Menge;

(2) $\mathbf{a}(P)$ in $D+F$ definiert und $L(P)$ in **fast** allen Punkten von D endlich und auf D summierbar;

(3) in allen anderen Punkten von $D+F$ (also in allen von F) $\mathbf{a}(P)$ in Bezug auf den Raum *stetig*.

(4) $\mathbf{a}(P)$ genüge auf D der verallgemeinerten Lusinschen Bedingung N;

dann gillt:

$$\int_D \mathbf{a}(P) \times \mathbf{n}\, dF = \int_D \mathrm{div}_P\, \mathbf{a}(P)\, dP\,.$$

Beweis. Aus den Auseinandersetzungen der §§ 5 und 6 folgt:

(1) Der Fluss existiert;

(2) div $\mathbf{a}(P)$ ist in D summierbar;

(3) In jedem (S) — System $\mathbf{m}_1, \ldots \mathbf{m}_n$

ist

$$\int_D \mathrm{div}\, \mathbf{a}(P)\, dP = \underbrace{\int \ldots \int}_{D} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right\} dx_1 \ldots dx_n\,,$$

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{D} \frac{\partial f_s}{\partial x_s}\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \underbrace{\int \ldots \int}_{\Pi} dx_1 \ldots dx_{s-1}\, dx_{s+1} \ldots dx_n \int_{M_s(Q)} \frac{\partial f_s}{\partial x_s}\, dx_s$$

Auf Grund der (N) — Bedingung und des Sachsschen Satzes folgt ferner

$$\int_{M_s(Q)} \frac{\partial f_s}{\partial x_s}\, dx_s = \Phi_{\mathbf{m}_s}(Q; \mathbf{a}(P)) = \sum_i \{ a_{\mathbf{m}_s}(P''_i) - a_{\mathbf{m}_s}(P'_i) \}$$

$(f_s(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{a}(P) \times \mathbf{m}_s!)$. Somit ist

$$\int_D \mathrm{div}\, \mathbf{a}(P)\, dP = \sum_{s\,|\,1}^{n} A(\mathbf{m}_s) = \int_D \mathbf{a}(P) \times \mathbf{n}\, dF\,,$$

also der Beweis des Fluss - Divergenz Satzes erbracht.

Bemerkung. Aus den Voraussetzungen des Fluss — Divergenz — Satzes ist leicht zu ersehen, dass unsere Form des Satzes alle klassischen Fälle mitumfasst und noch weit darüber hinausgreift.

In den klassischen Fällen fällt die (G) — Bedingung — gemäss der erwähnten Bemerkung des Herrn Ważewski — weg.

Kraków, Oktober, 1934.

Anmerkung.

Die Ergebnisse dieser Arbeit wurden im Jahre 1932 während einer Krakauer Sitzung der Polnischen Mathematischen Geselschaft [20.IX] referiert.