

$$(34) \quad n \sum_{k=1}^m |z_k|^2 + n \sum_{\lambda=1}^n |k_\lambda|^2 \leq n^2 t + |a|^2$$

Sind insbesondere alle $a_{\lambda\lambda}$ gleich Null oder Eins, so wird $t = a$, also geht (34) nach Division durch n in die in der Einleitung angegebene Khintchinesche Ungleichung über.

Nimmt man, wie das den von Herrn Khintchine in seinem speziellen Fall gemachten Voraussetzungen entspricht, insbesondere an, dass die Matrix A nur in den $m < n$ ersten Zeilen von 0 verschiedene Größen enthält, so gilt sogar die präzisere Ungleichung

$$m \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + n \sum_{\lambda=1}^n |k_\lambda|^2 \leq m n t + |a|^2.$$

Man erhält dies, indem man in der Ungleichung (23) für B die Matrix wählt, die in den m ersten Kolonnen lauter Einsen, in den $n - m$ letzten lauter Nullen enthält.

Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung.

Dem Gedächtnis von Leon Lichtenstein gewidmet

von

Alexander Ostrowski

in Basel

Inhaltsübersicht

Literaturzusammenstellung	372
Einleitung	374
Kapitel I. Anwendung der Eigenschaften harmonischer Funktionen im Halbstreifen.	380
§ 1. Argumentschwankung in der Nähe eines Randpunktes. Sätze I—III, Nr. 1—6.	380
§ 2. Beschränkte harmonische Funktionen im Halbstreifen. Sätze IV—VII, Nr. 7—9.	391
§ 3. Allgemeines über Winkeltreue und Winkelproportionalität am Rande. Sätze VIII—XVI, Nr. 10—16.	402
Kapitel II. Der Hauptsatz über Winkeltreue und Winkelproportionalität am Rande.	412
§ 4. Der konforme Winkel. Sätze XVII—XXIII, Nr. 17—19.	412
§ 5. Ungleichungen für konforme Massè. Sätze XXIV—XXX, Nr. 20—25.	422
§ 6. Der Hauptsatz über die Winkelproportionalität am Rande bei konformer Abbildung. Sätze XXXI—XXXIII, Hauptsatz (XXXIII), Nr. 26—29.	440
	371

Kapitel III. Die Faltensätze. S. 449

§ 7. Eine vorbereitende Abschätzung, Satz XXXIV, Nr. 30—32. 449

§ 8. Der erste Faltensatz. Sätze XXXV, XXXVI, Nr. 33—35. 456

§ 9. Der zweite Faltensatz. Sätze XXXVII—XL, Nr. 36—39. 463

Literaturzusammenstellung¹⁾

L. Ahlfors, (1) Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Nova ser. A, 1, Nr. 9 (1930), pp. 1—40.

P. Bessonoff et M. Lavrentieff, (1) Sur l'existence de la dérivée limite, Bull. de la Soc. math. de France, Vol. 58 (1930), fasc. I—II, pp. 175—198.

L. Bieberbach, (1) Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2, zweite Aufl. (1932).

M. Biernacki, (1) Sur l'allure de la représentation conforme dans le voisinage d'un point exceptionnel, Mathematica, Cluj, Vol. V (1931), pp. 1—6.

C. Carathéodory, (1) Ueber die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann. 73 (1913), pp. 323—370. — (2) Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildung, Schwarz Festschrift (1914), pp. 19—41. — (3) Ueber Winkelderivierte von beschränkten analytischen Funktionen, Sitzber. der Berl. Akad., Math.-phys. Klasse, (1929), pp. 39—54. — (4) Conformal Representation, Cambridge Tracts, (1932).

T. Carleman and G. H. Hardy, (1) Fourier's series and analytic functions, Proc. of the Royal Soc. of London, Vol. CI (1922), pp. 124—133.

G. H. Hardy, (1) s. Carleman and Hardy (1). — (2) A theorem concerning harmonic functions, Journal L. M. S., 1 (1926), pp. 130—131.

J. L. W. V. Jensen, (1) Investigation of a class of fundamental inequalities in the theory of analytic functions, Annals of Math. XXI (1919), pp. 1—29.

G. Julia, (1) Sur quelques majorantes utiles dans la théorie des fonctions analytiques ou harmoniques. A. É. N. S. (3) XLVIII. (1931), pp. 15—64. — (2) Principes géométriques d'analyse, II, Cahiers scientifiques, Fasc. XI (1932).

¹⁾ In diesem Verzeichnis sind nur Arbeiten oder Bücher angeführt, die mit dem Text in direkter Beziehung stehen. Sie werden jeweils nur mit der Angabe des Verfassers und der Nummer der Arbeit zitiert.

P. Koebe, (1) Ueber das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie, Math. Ztschr. 6 (1920), pp. 52—84.

A. Korn, (1) Lehrbuch der Potentialtheorie, Bd. 2 (1901), pp. 348—354.

E. Landau and G. Valiron, (1) A deduction from Schwarz' Lemma, Journal of the London Math. Society, 4 (1929), pp. 162—163.

M. Lavrentieff, (1) Sur la représentation conforme, C. R. 184 (1927), pp. 1407—1409. — (2) s. Bessonoff et Lavrentieff (1). — (3) Zur Theorie der konformen Abbildung, (russisch). Abhandl. d. Physikal.-math. Instituts Stekloff, math. Abtlg. Bd. 5.

L. Lichtenstein, (1) Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen des elliptischen Typus, Math. Ann. 67 (1909), pp. 559—575. — (2) Ueber das Poissonsche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials, Crelles J. Bd. 141 (1912), pp. 12—42. — (3) Zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete, Arch. der Math. u. Phys. (3) 25 (1917), pp. 179—180. — (4) Ueber die konforme Abbildung ebener, analytischer Gebiete mit Ecken, Crelles J. Bd. 140 (1911), pp. 100—119.

E. Lindelöf, (1) Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel, Acta societatis scientiarum Fennicae, Bd. 35, Nr. 7, (1908), pp. 3—35. — (2) Sur un principe général de l'analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme, Acta societatis scientiarum Fennicae, Bd. 46, Nr. 4, (1915), pp. 1—35. — (3) Sur la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur l'aire d'un cercle, C. R. du quatrième Congrès des math. scand. à Stockholm (1916), pp. 59—90.

K. Löwner, (1) Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Math. Ann. 89 (1927), pp. 103—121.

H. Milloux, (1) Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières. Journ. de Math., (9) t. 3 (1924), pp. 345—401. — (2) Sur le théorème de Picard. Bull. Soc. math. de France, t. 53 (1925), pp. 181—207.

P. Montel, (1) Sur la représentation conforme. Journ. de Math., (7) t. 3 (1917), pp. 1—54.

R. Nevanlinna, (1) Ueber eine Minimumaufgabe in der Theorie der konformen Abbildung, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, Nr. 37 (1933), pp. 103—115. — (2) Sur la mesure harmonique des ensembles des points. C. R. 199 (1934), pp. 512—514. — (3) Sur un principe général de l'Analyse. C. R. 199 (1934), pp. 548—550. — (4) Das harmonische Mass

von Punktmengen und seine Anwendung in der Funktionentheorie, 8. Skand. Math. Kongr. (1935), pp. 116—133.

A. Ostrowski, (1) Ueber das Poissonsche Integral und fast stetige Funktionen. Jahresber. d. D. M. — V., XXXVI (1927), pp. 349—353. — (2) Ueber quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen. Acta math. Bd. 53 (1929), pp. 181—266. — (3) Ueber den Habitus der konformen Abbildung am Rande des Abbildungsbereiches. Acta. math., Bd. 64 (1934), pp. 81—184. — (4) Bemerkungen zur vorstehenden Note von Hrn. Warschawski. Math. Ztschr. Bd. 38 (1934), pp. 684—686.

P. Painlevé, (1) Sur la théorie de la représentation conforme. C. R. 112 (1891), pp. 653—657.

Erhard Schmidt, (1) Ueber den Millouxschen Satz, Sitzber. der Berl. Akad., Math.-phys. Klasse (1932), pp. 1—9.

G. Valiron und E. Landau, (1) A deduction from Schwarz' Lemma. Journal of the London Math. Society, 4 (1929), pp. 162—163.

C. Visser, (1) Ueber beschränkte analytische Funktionen und die Randverhältnisse bei konformen Abbildungen, Math. Ann. 107 (1933), pp. 28—39.

S. Warschawski, (1) Ueber das Randverhalten der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung. Math. Ztschr. Bd. 35 (1932), pp. 321—456. — (2) Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung. Comp. math. Vol. I (1935), pp. 314—343.

J. Wolff, (1) Sur la représentation conforme des bandes. Comp. math. Vol. I (1935), pp. 217—222. — (2) Sur la conservation des angles dans la représentation conforme d'un domaine au voisinage d'un point frontière. C. R. 200 (1935), pp. 42—43. — (3) Démonstration d'un théorème sur la conservation des angles dans la représentation conforme d'un domaine au voisinage d'un point frontière, Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38 (1935), pp. 46—50.

Einleitung

Die vorliegende Abhandlung hat zum Ziel, einige Fragen zu klären, die sich auf das Randverhalten der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung beziehen, wobei wir die Annahme machen, dass die Abbildung im betrachteten Randpunkt winkeltreu oder winkelpropportional ist. Die ersten schärferen Ergebnisse in dieser Richtung verdankt man, nach zwei spezielleren Untersuchungen von Painlevé (1891)²⁾ und Korn (1901)³⁾, erst Leon Lichtenstein.

²⁾ Painlevé (1).

³⁾ Korn (1).

Das Wesentliche an der Lichtensteinschen Fragestellung, wie sie in zwei 1909 und 1912 erschienenen Abhandlungen⁴⁾ behandelt wird, besteht darin, dass in ihr das Verhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion für die *allseitige* Approximation des Bildpunktes gegen das Bild des betrachteten Randpunktes untersucht wird, sodass also dabei der Bildpunkt sowohl durch das Innere des Bildgebietes als auch längs des Randes gegen den Bildpunkt des betrachteten Randpunktes konvergiert. Die durch diese Hinwendung zur Betrachtung der allseitigen Approximation entstehende Problemstellung soll nun in der vorliegenden Untersuchung eine in einem gewissen Sinne abschliessende Behandlung erfahren.

Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der ζ -Ebene, das im unendlich fernen Punkt einen erreichbaren Randpunkt π_0 besitzt, und es sei $z=f(\zeta)$ eine Funktion, die Γ auf das Innere der Halbebene $H_z: \Re z > 0$ derart konform abbildet, dass $\zeta=\pi_0$ und $z=\infty$ einander entsprechen und die Abbildung dort winkeltreu oder winkelpropportional ist. Es sei ζ ein innerer oder Randpunkt von Γ . Es handelt sich nun für uns in erster Linie darum, aus den deskriptiven Eigenschaften von Γ in der Nähe von ζ Aufschlüsse zu erhalten über die Lage des Punktes $f(\zeta)$ unter der Annahme, dass die Abbildung für die Winkelhalbierende von H_z im Unendlichen, also die reelle Axe, bekannt ist. Es gelingt, eine im Sinne der asymptotischen Äquivalenz vollständige Lösung der Frage zu geben. Hierzu hat sich der Begriff des *faltentfreien Kerns* von Γ sowie der *Faltenbereiche* von Γ fundamental erwiesen.

Um diese Begriffe einzuführen, denke man sich Γ so gedreht, dass ein Halbstrahl der positiven reellen Axe in Γ verläuft und seine Richtung im Unendlichen der Richtung der positiven z -Axe im Unendlichen entspricht. Dann lässt sich der *faltentfreie Kern* Γ^* von Γ als ein geeignetes Teilgebiet von Γ definieren, das einen Halbstrahl der positiven reellen Axe enthält und von jedem Kreis um den Nullpunkt, wenn überhaupt, längs eines einzigen Kreisbogens durchsetzt wird. Γ^* entsteht aus Γ durch die Abtrennung gewisser Teilgebiete längs kreisbogenförmiger Querschnitte, die zum Rand von Γ^* gehören. Diese Teilgebiete nennen wir *Falten* von Γ . Werden die Faltengebiete von Γ durch Hinzunahme der Randpunkte abgeschlossen, so entstehen die *Faltenbereiche* von Γ . Ist ζ ein innerer oder Randpunkt von Γ^* , so setzen wir $\rho_\zeta = |\zeta|$. Ist ζ ein Punkt eines der Faltenbereiche von Γ , so verstehen wir unter ρ_ζ den Radius des Querschnitts, längs dessen der betreffende Faltenbereich von Γ abgetrennt wird.

⁴⁾ Lichtenstein (1), pp. 561—563; (4), pp. 100—110.

Dann besagt unser wichtigstes Ergebnis (erster Faltensatz, XXXV, § 8, Nr. 34), dass die Abbildung in die Falten des Gebietes hinein zu verfolgen gestattet:

Strebt ζ über das Innere und den Rand von Γ gegen π_0 , so gilt

$$|f(\zeta)| \sim |f(p_\zeta)|^5.$$

Den ersten Beweis dieses Satzes haben wir im Falle, dass beide Randzweige von Γ in π_0 Tangenten besitzen, durch Kombination einer Ahlfors'schen Ungleichung mit einem Satz des Verfassers gefunden, der vor einigen Jahren veröffentlicht wurde (vergleiche den Satz XV der vorliegenden Abhandlung). Die Ausdehnung dieses Beweises auf den allgemeinsten Fall bot allerdings zuerst grosse Schwierigkeiten, zu deren Ueberwindung die Ahlfors'sche Methode erst verallgemeinert werden musste. In dieser Abhandlung wird ein anderer Beweis dieses Satzes entwickelt, der auf gewissen Ungleichungen für das konforme Mass beruht. Inzwischen haben wir noch einen dritten Beweis des obigen Satzes gefunden, der eine Ungleichung aus einer bekannten Arbeit von E. Lindelöf⁶⁾ benutzt und wohl am kürzesten ist. Auf diesen letzten Beweis, sowie auf unseren ersten, mit der Ahlfors'schen Methode zusammenhängenden soll an anderer Stelle eingegangen werden.

Bei allen unseren Beweisen des obigen Satzes wird von der Tatsache wesentlich Gebrauch gemacht, dass sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Winkeltreue und Winkelproportionalität der obigen Abbildung von Γ auf H_z mit Hilfe der deskriptiven Randeigenschaften des Gebietes in der Nähe des betrachteten Punktes direkt formulieren lassen. Soll die obige Abbildung von Γ auf H_z winkeltreu im Unendlichen „im Winkel“ sein, so ist hierzu auf jeden Fall notwendig, dass Γ Winkelräume enthält, deren Oeffnungen in π_0 beliebig nahe an π herankommen, und keinen Winkelraum, dessen Oeffnung in π_0 grösser als π ist. Es ist leicht zu sehen, dass, wenn diese Bedingung erfüllt ist, es einen Halbstrahl S : $\arg \zeta = \alpha$ gibt, derart, dass Γ Winkelräume mit beliebig nahe an π heranreichenden Oeffnungen enthält, deren Winkelhalbierende zu S parallel sind. — Die obige Bedingung ist aber

⁵⁾ Dieser Satz gestattet ohne weiteres, eine Reihe von Grenzrelationen, die bisher nur als „im Winkel“ gültig bekannt waren, auf die Annäherung über den ganzen faltenfreien Kern auszudehnen. So gilt z. B., dass, wenn eine Winkelderivierte im Unendlichen existiert, — d. h. der von 0 und ∞ verschiedene Grenzwert von $\frac{\zeta}{z}$ bei der Annäherung im Winkel — derselbe Grenzwert im ganzen faltenfreien Kern von T vorhanden ist. Vgl. hierzu die Bemerkungen in der Nr. 16.

⁶⁾ Lindelöf (2), pp. 16 — 18.

natürlich nicht hinreichend. Herrn Carathéodory⁷⁾ verdankt man den Satz, dass die Existenz einer Tangente im Unendlichen an den Rand von Γ unter Voraussetzung der Jordanberandung für die Winkeltreue der Abbildung hinreichend ist. Diesen Satz hat kürzlich H. J. Wolff⁸⁾ auf einen wesentlich allgemeineren Begriff der Tangente ausgedehnt. Wir beweisen nun im Folgenden (der Hauptsatz über die Winkelproportionalität am Rande, Satz XXXIII, § 6, Nr. 29), dass, wenn die obige Winkelraumbedingung erfüllt ist, für die Winkeltreue der Abbildung von Γ auf H_z im Unendlichen notwendig und hinreichend die Existenz einer durch das Unendliche hindurchgehenden abgeschlossenen Jordankurve L mit einer zu S senkrechten Tangente im Unendlichen ist, derart, dass beide im Unendlichen zusammenstossende Zweige von L mit dem Rand von Γ je eine abzählbare Folge gemeinsamer Punkte ζ_v, ζ'_v haben, mit:

$$\begin{aligned} \zeta_v &\rightarrow \pi_0, & \zeta'_v &\rightarrow \pi_0 \\ \frac{\zeta_v + 1}{\zeta_v} &\rightarrow 1, & \frac{\zeta'_v + 1}{\zeta'_v} &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Der Sinn dieses Satzes ist offenbar der, dass im allgemeinsten Falle der Winkeltreue der Rand von Γ zwar keine Jordankurve mit einer Tangente im Unendlichen zu sein braucht, wohl aber mit einer geeigneten derartigen Kurve eine hinreichend dichte Menge gemeinsamer Punkte haben muss.

Unser Beweis dieses Satzes beruht wiederum auf verschiedenen Ungleichungen für das konforme Mass, wobei man mit umso weniger Vorbereitungen auskommt, je schärfer die herangezogene Ungleichung ist.

Aus der obigen Lösung des Problems der Winkeltreue ergibt sich insbesondere der oben erwähnte Wolff'sche Satz als eine spezielle Folgerung ohne weiteres. Was aber die obige Äquivalenzrelation zwischen $|f(\zeta)|$ und $|f(p_\zeta)|$ anbetrifft, so ist in ihr insbesondere für den speziellen Fall der Jordanberandung, für die die sogenannte Bedingung der *linearen Unbewaltheit* zutrifft, ein wichtiger Satz von Herrn Warschawski⁹⁾ in wesentlich verschärfter Form enthalten.

An den Satz von Hrn. Warschawski anknüpfend, hat Hr.

⁷⁾ Carathéodory (2), pp. 37 — 41.

⁸⁾ Wolff (2), (3).

⁹⁾ Warschawski (1), pp. 361 — 376, (2), pp. 320 — 325. Für speziellere Klassen von Gebieten vgl. Lavrentieff (1), sowie Bessonoff u. Lavrentieff (1).

J. Wolff¹⁰⁾ unter den von Hrn. Warschawski zu Grunde gelegten Voraussetzungen eine weitere Formulierung gefunden, in der eine gewissermassen zur obigen inverse Fragestellung behandelt wird. Man betrachte unter den oben zu Grunde gelegten Annahmen über Γ und die Abbildung von Γ auf H_z den Halbkreisbogen $|z|=r$ aus H_z und seine Bildkurve Λ_r in der ζ -Ebene. Was lässt sich über den asymptotischen Verlauf von Λ_r für $r \rightarrow \infty$ sagen, wenn die Abbildung der positiven reellen z -Achse bekannt ist? Diese Frage lässt sich mit den Methoden unserer Abhandlung weitgehend und im Falle der Existenz einer Tangente im Unendlichen abschliessend beantworten. Kennt man die Lage der Endpunkte von Λ_r nicht, so folgt aus dem ersten Faltensatz auf jeden Fall, dass $|\zeta|$ für die Punkte von Λ_r in den Teilstücken, die innerhalb des faltenfreien Kerns liegen, mit $|f(r)|$ äquivalent ist, und Λ_r im Uebrigen nur in diejenigen Falten von Γ eintreten kann, für die die Radien der abschliessenden Kreisbogenquerschnitte mit $|f(r)|$ äquivalent sind. Bereits in dieser Formulierung ist der Satz von Herrn J. Wolff unter den von ihm zu Grunde gelegten Annahmen in wesentlich verschärfter Form enthalten. Kennt man aber die Lage eines Endpunktes von Λ_r , etwa $f(ir)$, so lässt sich über das zugehörige, $f(r)$ und $f(ir)$ verbindende Stück Λ_r^+ von Λ_r eine wesentlich schärfere Aussage machen. Man beschreibt den Verlauf von Λ_r^+ am besten, wenn man diese Kurve mit der Jordankurve V_r^+ vergleicht, die $f(r)$ und $f(ir)$ über Γ und den Rand von Γ gewissermassen auf „direktestem Wege“ verbindet. Die Kurve V_r^+ ist dadurch charakterisiert, dass *erstens* ihre sämtlichen Punkte auf Γ und dem Rand von Γ liegen, *zweitens* die Bildkurve von V_r^+ in H_z die Punkte r und ir stetig verbindet, *drittens* jedes ihrer Teilstücke zwischen zwei innerhalb Γ liegenden Punkten nicht länger ist als jede andere Verbindungslinie dieser Punkte, die nicht ins Aeusserere von Γ tritt und sich in H_z auf eine stetige Kurve abbildet. Dann lässt sich unser wichtigstes Resultat über den Verlauf von Λ_r^+ dahin formulieren, dass Λ_r^+ mit V_r^+ *asymptotisch äquivalent* ist, wenn der betreffende Randzweig von Γ im Unendlichen eine Tangente besitzt. Im allgemeinsten Fall der winkeltreuen Abbildung beweisen wir über die Faktoren, um die sich die Punkte von Λ_r^+ von den entsprechenden Punkten von V_r^+ unterscheiden, dass ihre absoluten Beträge auf jeden Fall zwischen positiven Konstanten

$$(1 - \varepsilon) e^{-\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi}, \quad (1 + \varepsilon) e^{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi}, \quad \varepsilon \rightarrow 1.$$

¹⁰⁾ Wolff (1).

liegen. Um die Darstellung nicht mit Betrachtungen über die Existenz von V_r^+ zu belasten, formulieren wir im Text der Abhandlung die den Verlauf von Λ_r^+ betreffenden Resultate direkt, sodass sie als unmittelbare Folgerungen aus dem zweiten Faltensatz (Satz XXXVIII, § 9, Nr. 38) und dem Satz XL erscheinen.

Den Beweis des zweiten Faltensatzes erbringen wir im Folgenden gleichfalls mit Hilfe der Methode des konformen Masses. Allerdings haben wir diese Ergebnisse mit etwas schlechteren Konstanten zuerst auf einem anderen Wege hergeleitet — mit Hilfe der Methode des Dirichletschen Integrals. Doch erschien es uns von Interesse, alle drei Hauptsätze dieser Abhandlung in den Kap. II und III auf möglichst einheitlichem Wege herzuleiten.

Die methodische Grundlage dieser Abhandlung bildet also, wie bereits erwähnt, die Theorie des konformen Masses, die in den beiden ersten Paragraphen des zweiten Kapitels für den Fall einfach zusammenhängender Gebiete an das Löwner—Montelsche Lemma anknüpfend ausführlich entwickelt wird. Es dürften die dabei hergeleiteten Sätze wohl noch manches andere Problem der Theorie der konformen Abbildung zu lösen gestatten.

Das erste Kapitel der Abhandlung ist aber gewissen vorbereitenden Betrachtungen gewidmet, bei denen die potentialtheoretischen Sätze direkt auf unsere Fragestellung angewandt werden. Dabei ist das Charakteristische, dass dies zumeist nach einer logarithmischen Abbildung auf das Innere eines Halbstreifens geschieht. Wir beweisen auf diesem Wege zunächst einige Ergebnisse (Sätze XV, XVI), die wir vor einigen Jahren¹¹⁾ aus einem potentialtheoretischen Satz von Lichtenstein¹²⁾ gefolgert haben. Die ganze Deduktion gestaltet sich aber wesentlich durchsichtiger und führt weiter, wenn man die Betrachtung von vornherein im Halbstreifen durchführt. Doch handelt es sich dabei bei einem der Hauptdurchgangspunkte der ganzen Entwicklung wiederum um eine Transformation des gleichen Lichtensteinschen Satzes. Es sei hier darauf hingewiesen, dass in der oben zitierten Abhandlung¹⁰⁾ von Herrn J. Wolff ein Beweis eines Satzes von Hrn. Visser¹³⁾ — eines Spezialfalls des Satzes XII — skizziert wird, der sich mit unserer Betrachtungsweise enge berührt.

Unter den Einzelergebnissen, die sich in diesem Kapitel neu ergeben, sei auf den Satz XII verwiesen, worin insbesondere die Tatsache

¹¹⁾ Ostrowski (3).

¹²⁾ Lichtenstein (2).

¹³⁾ Visser (1), pp. 32 — 33.

enthalten ist, dass, wenn irgend ein Teilwinkelraum $\vartheta_1 \geq \arg z \geq \vartheta_2$ von H_z bei der betrachteten Abbildung sich konform abbildet, dasselbe dann für jeden Winkelraum $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \delta > 0$, der Fall ist.

Manchem Leser wird vielleicht die grosse Ausführlichkeit der Darstellung im § 1 auffallen, in dem einige Tatsachen über die Beschränktheit der Argumentschwankung in der Nähe des betrachteten Randpunktes von Γ zusammengestellt werden. Natürlich kann der Leser, dem diese Tatsachen selbstverständlich erscheinen, ihre Beweise überschlagen. Indessen wurde dieser Abschnitt im Laufe der Ausarbeitung der vorliegenden Abhandlung wiederholt umgearbeitet, und wir haben dabei die Erfahrung machen müssen, dass nur eine in allen Einzelheiten ausführliche Darstellung die betreffenden Resultate zu sichern vermag.

Im übrigen wurden an manchen Stellen Tatsachen, die an sich innerhalb der vorliegenden Abhandlung nur die Rolle von Hilfssätzen spielen, weiter entwickelt, als unbedingt notwendig gewesen wäre, wenn sie uns auch selbständiges Interesse zu besitzen schienen.

Die Hauptresultate der vorliegenden Abhandlung sind in zwei vorläufigen Mitteilungen, C. R. 202 (1936), pp. 727 — 728; pp. 1135 — 1137 veröffentlicht worden.

KAPITEL I.

Anwendung der Eigenschaften harmonischer Funktionen im Halbstreifen.

§ 1. Argumentschwankung in der Nähe eines Randpunktes.

1. Wir verstehen unter H_z die rechte Halbebene $\Re z > 0$ der z -Ebene. Konvergiert z für irgend ein positives δ aus H_z gegen ∞ derart, dass dabei beständig

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$$

bleibt, so sagen wir, z konvergiere gegen ∞ aus H_z im Winkel oder über eine *Winkelumgebung*. Konvergiert ferner z gegen $z = \infty$ so, dass für irgend ein positives $d < \pi$ beständig

$$\frac{\pi}{2} > \arg z > \frac{\pi}{2} - d$$

bleibt, so sagen wir, z konvergiere gegen ∞ aus H_z *halbseitig* an der positiven imaginären Axe, und eine analoge Definition gilt für die negative imaginäre Axe. Endlich konvergiert z *allseitig* gegen ∞ aus H_z , wenn es dabei keinen weiteren Einschränkungen unterworfen wird. Es ist unmittelbar klar, wie die entsprechenden Definitionen im Falle des Einheitskreises, bzw. des Parallelstreifens (wenn der zu approximierende Grenzpunkt im Unendlichen liegt) zu formulieren sind. Es sei noch hervorgehoben, dass, wenn wir im Folgenden behaupten, irgend ein Sachverhalt gelte bei Approximation im Winkel, bzw. bei halbseitiger Approximation, dann, sofern nicht das Gegenteil angegeben wird, immer gemeint ist, der betreffende Sachverhalt gelte bei *jeder* Approximation im Winkel (also für *jedes* $\delta > 0$) bzw. bei *jeder* halbseitigen Approximation.

Definition: Es sei L ein ins Unendliche verlaufender Jordanbogen. Wir sagen, L habe im Unendlichen die Richtung φ , falls das Argument von z , geeignet festgelegt, gegen φ konvergiert, wenn z längs L ins Unendliche strebt.

Jeder Halbstrahl, der mit der positiven reellen Axe den Winkel φ bildet, wird als *Tangente von L im Unendlichen* bezeichnet, und der obige Sachverhalt wird auch so formuliert, dass L im Unendlichen eine *Tangente besitzt*. Offenbar bleibt die Richtung von L im Unendlichen und die Gesamtheit der Tangenten an L im Unendlichen bei jeder Parallelverschiebung der Ebene unverändert.

2. I. Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das im Unendlichen einen erreichbaren Randpunkt π_0 ¹⁴⁾ und im Endlichen einen erreichbaren Randpunkt ζ_0 besitzt. Eine bis auf die Endpunkte in Γ liegende Jordankurve λ möge ζ_0 mit π_0 verbinden. Es mögen die Werte von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ auf λ in Γ bei geeigneter stetiger Festlegung im Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ liegen.

Dann bleiben die Werte von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ in Γ bei entsprechender stetiger Festlegung im Intervall

$$(2,1) \quad \langle \alpha - 2\pi, \beta + 2\pi \rangle.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $\zeta_0 = 0$ vorausgesetzt werden. Man schneide die Ebene längs λ auf und bezeichne das entstehende Gebiet mit \bar{E} . Man lege die Werte von $\arg \zeta$ auf dem

¹⁴⁾ Es sei daran erinnert, dass einem erreichbaren Randpunkt von Γ bei der konformen Abbildung von Γ etwa auf das Innere des Einheitskreises ein einziger Peripheriepunkt des Einheitskreises entspricht, während umgekehrt diesem Peripheriepunkt ein ganzes Randpunktkontinuum von Γ entsprechen kann, das dann jenen erreichbaren Randpunkt als einzigen aus dem Inneren von Γ erreichbaren Punkt enthält. Diese Verhältnisse sind zum ersten Mal von Carathéodory, Carathéodory (1), sowie Lindelöf, Lindelöf (2), klargelegt worden.

linken Ufer von λ — d. h. auf dem Ufer, an das \bar{E} beim Durchlaufen von λ von 0 nach π_0 von links grenzt — so fest, dass sie in $\langle \alpha, \beta \rangle$ liegen und bezeichne diese Wertebelegung auf λ als Funktion des Punktes ζ mit $\varphi(\zeta)$. Die dadurch eindeutig festgelegte Bestimmung des Arguments in \bar{E} und auf den beiden Ufern von λ sei als Funktion des Punktes mit $\Phi(\zeta)$ bezeichnet.

Verbindet man einen Punkt ζ_1 auf dem linken Ufer von λ mit dem gegenüberliegenden Punkt ζ_1' auf dem rechten Ufer durch einen sonst in \bar{E} verlaufenden, sich nicht überschneidenden Weg η , so muss η den Nullpunkt einmal umkreisen, da durch η das zwischen 0 und ζ_1 liegende Stück von λ von π_0 getrennt wird. Zugleich umkreist η , von ζ_1 nach ζ_1' durchlaufen, den Nullpunkt im positiven Sinne, da η bei ζ_1 , von λ aus gesehen, nach links verläuft und daher das Stück 0 ζ_1 von λ links von η bleibt. Daraus folgt, dass $\Phi(\zeta)$ in ζ_1' genau den Wert $\varphi(\zeta_1) + 2\pi$ haben muss.

Man bilde nun durch die Funktion $w = \lg \zeta$ das Gebiet \bar{E} auf die w -Ebene ab, indem als $\Im \lg \zeta$ der entsprechende Wert von $\Phi(\zeta)$ angenommen wird. Dabei geht das linke Ufer von λ in eine Kurve L_1 über, die sich von $-\infty$ nach $+\infty$ hinzieht und stets im Parallelstreifen $\alpha \leq \Im w \leq \beta$ verläuft. Die Bildkurve L_2 des rechten Ufers von λ entsteht aus L_1 durch Verschiebung um 2π parallel zur imaginären Axe nach oben. Alle Punkte des Bildgebietes \bar{G} von \bar{E} haben nun die Eigenschaft dass sie sich sowohl mit L_1 als auch mit L_2 verbinden lassen, ohne dass dabei unterwegs L_2 bzw. L_1 getroffen wird. Diese Eigenschaft kommt aber weder den Punkten mit $\Im w \leq \alpha$, noch den Punkten mit $\Im w \geq \beta + 2\pi$ zu. Daher liegt \bar{G} im Parallelstreifen $\alpha < \Im w < \beta + 2\pi$.

Wir sehen, dass $\Phi(\zeta)$ zwischen α und $\beta + 2\pi$ bleibt.

Nun wird Γ durch λ in zwei Teilgebiete zerschneiden, von denen das eine, Γ_0^+ an das linke Ufer, das andere, Γ_0^- an das rechte Ufer von λ grenzt. Wählen wir auf λ die durch $\varphi(\zeta)$ gegebene Bestimmung des Arguments, so ergeben sich in Γ_0^+ durch stetige Fortsetzung die durch $\Phi(\zeta)$ gegebenen Werte. Im Inneren von Γ_0^- ergeben sich aber dabei die durch $\Phi(\zeta) - 2\pi$ gegebenen Werte, da der Funktion $\Phi(\zeta)$ am rechten Ufer von λ die Argumente $\varphi(\zeta) + 2\pi$ entsprechen. Die Werte von $\Phi(\zeta)$ und $\Phi(\zeta) - 2\pi$ liegen aber im Intervall $\langle \alpha - 2\pi, \beta + 2\pi \rangle$, womit I bewiesen ist,

3. Aus dem damit bewiesenen Satz ergeben sich unmittelbar folgende Korollare:

a) *Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das im Unendlichen einen erreichbaren Randpunkt π_0 und im Innern einen Punkt ζ_0*

besitzt. Eine bis auf π_0 in Γ liegende Jordankurve λ möge ζ_0 mit π_0 verbinden. Durch einen in Γ liegenden, λ nur in ζ_0 treffenden Einschnitt möge Γ in ein Teilgebiet Γ_0 verwandelt werden. Liegen dann die Werte von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ auf λ bis auf ζ_0 und π_0 bei geeigneter stetiger Festlegung im Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$, so bleiben die Werte $\arg(\zeta - \zeta_0)$ in Γ_0 bei entsprechender stetigen Festlegung im Intervall (2,1).

Denn man braucht zum Beweise offenbar nur I auf Γ_0 anzuwenden. — Unter den Voraussetzungen des Korollars a) liegt natürlich die Schwankung von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ auch in jedem Teilgebiet von Γ_0 im gleichen Intervall (2,1). Daraus folgt aber sofort:

b) *Gelten die Voraussetzungen von a) und wird aus Γ durch einen, λ nur in einem Punkte treffenden Jordanquerschnitt¹⁵⁾ ein Teilgebiet Γ_1 abgegrenzt, das ein unendliches, in π_0 mündendes Stück von λ enthält, so liegen die Argumentwerte von $\zeta - \zeta_0$ in Γ_1 bei stetiger Festlegung im Anschluss an die Werte auf λ im Intervall (2,1).*

Denn zieht man im Komplementärgebiet Γ_1' von Γ_1 in bezug auf Γ einen Einschnitt bis zum Punkte ζ_0 , der λ nicht mehr trifft, so wird durch diesen Einschnitt aus Γ ein Teilgebiet erzeugt, in dem Γ_1 liegt.

Insbesondere ergibt sich aus dem Satz I und den beiden obigen Korollaren, dass die Schwankung von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ bei entsprechender stetiger Festlegung in einer hinreichend nahen alleseitigen Umgebung von π_0 im Intervall (2, 1) bleibt. Dabei muss aber die „Nähe“ im topologischen und nicht im metrischen Sinne aufgefasst werden. Man kann diese Auffassung etwa so präzisieren: Bildet man Γ so konform auf den Parallelstreifen $|\Im w| < \pi$ ab, dass π_0 in den „rechten“ unendlich fernen Punkt $+\infty$ übergeht, so wird eine Umgebung dieses unendlich fernen Punktes im Parallelstreifen durch jeden Querschnitt abgegrenzt, der beide Randgeraden des Parallelstreifens miteinander verbindet. Diese Umgebung liegt umso „näher“ an den betreffenden unendlich fernen Punkt, je weiter nach rechts sämtliche Punkte des betreffenden Querschnitts liegen. Dabei könnten aber sehr wohl gewissen Punkten aus jeder solchen Umgebung Punkte des Gebietes Γ entsprechen, die etwa innerhalb des Einheitskreises liegen, also vom metrischen Standpunkt der Γ -Ebene aus durchaus nicht etwa gegen π_0 konvergieren,

Legt man den soeben gekennzeichneten topologischen Begriff der „Nähe“ zugrunde, so können wir als weitere Korollare formulieren:

c) *Unter den Voraussetzungen des Satzes I bzw. des Korollars a) liegen die Argumentwerte von $\zeta - \zeta_0$ in einer topologisch hinreichend na-*

¹⁵⁾ Für die hier und weiter in Betracht kommenden topologischen Eigenschaften einfach zusammenhängender Gebiete vgl. Carathéodory (1).

hen Umgebung von π_0 bei entsprechend stetiger Festlegung im Intervall (2, 1).

d) Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit einem erreichbaren Randpunkt π_0 im Unendlichen. Es möge ein im Endlichen gelegener innerer oder Randpunkt ζ_0 von Γ die Eigenschaft haben, dass der Winkelraum

$$\Delta : \gamma \leq \arg(\zeta - \zeta_0) \leq \delta$$

ganz in Γ verläuft. Verbindet man ζ_0 mit dem Rand von Γ durch einen Weg q , dessen innere Punkte Δ nicht treffen, so wird durch einen Einschnitt längs q aus Γ ein Gebiet Γ_0 erzeugt, in dem die Argumentwerte von $\zeta - \zeta_0$ bei entsprechender stetiger Festlegung im Intervall $\langle \delta - 2\pi, \gamma + 2\pi \rangle$ liegen. (Wenn ζ_0 ein Randpunkt ist, fällt Γ_0 mit Γ zusammen).

Zum Beweise braucht man nur den Satz I bzw. das Korollar a) zweimal anzuwenden, indem man als Λ einmal den Halbstrahl: $\arg(\zeta - \zeta_0) = \gamma$ und das andere Mal den Halbstrahl: $\arg(\zeta - \zeta_0) = \delta$ wählt. Es ergeben sich so für die Argumentwerte von $\zeta - \zeta_0$, die durch stetige Fortsetzung aus Δ entstehen, die Intervalle $\langle \gamma - 2\pi, \gamma + 2\pi \rangle$, $\langle \delta - 2\pi, \delta + 2\pi \rangle$. Der Durchschnitt dieser beiden Intervalle ist aber gerade das Intervall $\langle \delta - 2\pi, \gamma + 2\pi \rangle$. Wie man sieht, gehen in diesem Falle die Schranken über das ursprüngliche Intervall nach beiden Seiten um $2\pi - (\delta - \gamma)$ hinaus.

Insbesondere gelten die gleichen Schranken unter den Voraussetzungen von d) in jeder topologisch hinreichend nahen Umgebung von π_0 .

Es sei endlich noch bemerkt, dass die in den Behauptungen von Satz I und den Korollaren a) — d) vorkommenden abgeschlossenen Intervalle sich durch die entsprechenden offenen Intervalle ersetzen lassen, da $\arg z$ eine harmonische, nicht konstante Funktion ist.

4. Das für unsere späteren Betrachtungen Wesentliche am Korollar c) zum Satz I ist, dass unter den entsprechenden Voraussetzungen die Schwankung von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ in einer Umgebung von π_0 überhaupt beschränkt ist. Der Punkt ζ_0 ist aber dabei zunächst ein fester innerer oder Randpunkt. Wenn nun ζ_0 im Innern von Γ liegt oder ein geradlinig erreichbarer Randpunkt ist, dann genügt natürlich bereits die Existenz einer irgendwo in Γ liegenden Jordankurve Λ , die in π_0 mündet und längs deren die Schwankung von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ beschränkt bleibt, da man ja dann Λ durch einen in Γ liegenden Streckenzug mit ζ_0 verbinden kann und dadurch nur ein beschränkter Zuwachs an Argumentsschwankung hinzukommt. Es ist nun leicht zu sehen, dass dies nicht mehr richtig zu bleiben braucht, wenn ζ_0 ausserhalb Γ liegt, da

dann unendlich viele topologisch beliebig nahe bei π_0 liegende Randstücke sich beliebig oft um ζ_0 herum winden könnten,

Dagegen lässt sich dies noch beweisen, falls die topologische Nähe für π_0 mit der metrischen zusammenfällt, d. h. falls die Distanzen der Randpunkte von Γ vom Nullpunkt ins Unendliche streben, wenn man längs des Randes gegen π_0 geht¹⁰⁾. Wir behaupten nämlich den folgenden Satz:

II. Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der ζ -Ebene mit dem Rand R , das im Unendlichen einen erreichbaren Randpunkt π_0 besitzt. Es möge Γ die Eigenschaft haben, dass, wenn man längs R gegen π_0 geht, die Distanzen der dabei durchlaufenen Randpunkte vom Nullpunkt ins Unendliche konvergieren. Es seien ζ_0, ζ_1 zwei beliebige (nicht notwendig verschiedene) im Endlichen gelegene Punkte der ζ -Ebene.

Gibt es einen in Γ verlaufenden und in π_0 mündenden Jordanbogen Λ^* , längs dessen das $\arg(\zeta - \zeta_0)$, irgendwie stetig festgesetzt, absolut beschränkt bleibt, so gibt es eine, durch einen im Endlichen liegenden Querschnitt von Γ abgegrenzte Umgebung von π_0 , in der das $\arg(\zeta - \zeta_1)$, irgendwie stetig festgesetzt, absolut beschränkt bleibt.

Beweis: Man verbinde ζ_0 mit ζ_1 durch eine Strecke s und grenze durch einen aus endlich vielen Strecken bestehenden Querschnitt q_1 von Γ eine solche Umgebung Γ_0 von π_0 in Γ ab, dass alle Punkte von s ausserhalb von Γ_0 liegen.

Ist ζ_2 irgend ein innerer Punkt von q_1 , so verbinde man ζ_0 mit ζ_2 durch eine Strecke s_1 und grenze von Γ_0 durch einen aus endlich vielen Strecken bestehenden Querschnitt q eine solche Umgebung Γ_1 von π_0 ab, dass s_1 ganz ausserhalb von Γ_1 liegt. Ist dann ζ_3 irgend ein innerer Punkt von q , so kann man ζ_2 mit ζ_3 durch einen Streckenzug S_1 verbinden, der ganz in Γ liegt. Der Streckenzug S_1 lässt sich so abändern, dass er bis auf ζ_3 ganz ausserhalb Γ_1 liegt. Der aus s_1 und S_1 bestehende Streckenzug S verbindet ζ_0 mit dem Randpunkt ζ_3 von Γ_1 und bleibt bis auf ζ_3 ausserhalb Γ_1 . S kann ferner als doppelpunktfrei vorausgesetzt werden, indem man eventuell vorhandene, geschlossene Teilstücke von S weglässt.

¹⁰⁾ Es läuft dies darauf hinaus, dass in diesem Fall der Punkt π_0 ein sogenanntes „punktförmiges Primende“ im Sinne von Carathéodory (1) ist, m. a. W.: Bildet man Γ konform auf das Innere des Einheitskreises etwa der w -Ebene ab, und entspricht dabei π_0 der Peripheriepunkt w_0 des Einheitskreises, so entspricht umgekehrt w_0 in der ζ -Ebene der einzige Randpunkt π_0 , sodass, wenn eine Punktfolge w_n aus dem Inneren des Einheitskreises gegen w_0 konvergiert, die entsprechenden Punkte ζ_n innerhalb Γ stets gegen π_0 konvergieren.

Wir behaupten nun zuerst, dass in Γ_1 $\arg(\zeta - \zeta_0)$ stetig und gleichmässig beschränkt festlegbar ist. Denn man kann annehmen, dass der Weg Λ^* samt seinem Anfangspunkt ζ_4 innerhalb Γ_1 liegt, da man ja Λ^* beliebig verkürzen kann. Zugleich kann man annehmen, dass ζ_4 geradlinig erreichbar ist. Nun verbinde man ζ_4 mit ζ_3 durch einen Streckenzug Λ_1 aus endlich vielen Strecken, der bis auf ζ_3 in Γ_1 liegt und Λ^* bis auf ζ_4 nicht trifft.

Man kann dann an Γ_1 einen um S liegenden Schlauch Γ_2 anfügen, der an Γ_1 nur längs eines zusammenhängenden Teilstückes von q grenzt und ζ_0 und ζ_3 zu Randpunkten hat, die übrigen Punkte von S aber im Innern enthält. Es genügt z. B., um Γ_2 zu bilden, eine Kreisscheibe mit ihrem Mittelpunkte längs S von ζ_3 nach ζ_0 fahren zu lassen, wobei der Radius von einem hinreichend kleinen Wert für ζ_3 an eigentlich monoton und stetig abnimmt und in ζ_0 den Wert 0 annimmt, und sodann diejenigen Punkte der überstrichenen Fläche zu betrachten, die ausserhalb Γ_1 liegen. Das aus Γ_1 und Γ_2 zusammengesetzte, einfach zusammenhängende Gebiet Γ_3 hat π_0 als einen erreichbaren Randpunkt und enthält die Jordankurve $\Lambda = \Lambda^* + \Lambda_1 + S$, die π_0 mit ζ_0 verbindet, bis auf diese beiden Punkte im Innern. Andererseits ist die Schwankung von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ auf dem Streckenzug $\Lambda_1 + S$ sowieso beschränkt, sodass alle Voraussetzungen des Satzes I erfüllt sind. Daher ist die Schwankung von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ in Γ_3 beschränkt und daher erst recht in Γ_1 , womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Um nun von ζ_0 zu ζ_1 überzugehen, darf man offenbar annehmen, dass die positive reelle Axe in die Richtung von ζ_0 nach ζ_1 weist und auf der Geraden durch ζ_0 , ζ_1 liegt, da ja die Schwankung des Arguments von der Wahl der Anfangsrichtung unabhängig ist. Da nun auf der Strecke s selbst keine Punkte von Γ_1 liegen, kann die Funktion $\arg(\zeta - \zeta_1)$ in Γ_1 stetig und so gewählt werden, dass durchweg $|\arg(\zeta - \zeta_0) - \arg(\zeta - \zeta_1)| < \pi$ bleibt. Denn, wenn ζ oberhalb bzw. unterhalb der reellen Axe liegt, liegen beide Argumente modulo 2π im Intervall $(0, \pi)$ bzw. im Intervall $(\pi, 2\pi)$. Liegt aber ζ auf der Geraden durch ζ_0 und ζ_1 , so sind die Argumente von $\zeta - \zeta_0$ und $\zeta - \zeta_1$ modulo 2π kongruent. Daher ist die Schwankung von $\zeta - \zeta_1$ in Γ_1 höchstens um 2π grösser als diejenige von $\zeta - \zeta_0$, womit der Satz II bewiesen ist.

Bemerkung zum Satz II. Der Satz II ist insbesondere dann anwendbar, wenn die beiden in π_0 zusammenstossenden Randzweige von Γ in einer Umgebung von π_0 Jordancharakter besitzen.

5. Bei den bisherigen Betrachtungen waren die Argumentwerte von $\zeta - \zeta_0$ (bzw. $\zeta - \zeta_1$) nur für die inneren Punkte von Γ definiert.

Man kann indessen auch am Rande das Argument von $\zeta - \zeta_0$ nach

Anbringung eines ζ_0 von ∞ trennenden Querschnittes q im stetigen Anschluss an die Werte im Inneren definieren. Es sei zunächst ζ_1 ein erreichbarer Randpunkt von Γ , der durch q von ζ_0 getrennt wird und die Eigenschaft hat, dass kein weiterer Randpunkt von Γ bei der konformen Abbildung auf H_z in denselben Randpunkt von H_z übergeht wie ζ_1 . Ist L ein in ζ_1 mündender, sonst in Γ verlaufender Jordanbogen, so definiert man $\arg(\zeta_1 - \zeta_0)$ als Grenzwert von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ auf L — dass dieser Grenzwert von der Wahl von L unabhängig ist, ist leicht einzusehen. Natürlich erhalten aber zwei verschiedene, in einem Punkt liegende Randpunkte im allgemeinen auch verschiedene Werte von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ zugeordnet.

Handelt es sich aber um ein sogenanntes Primende (oder Randelement) ζ_1 , das bei der Abbildung von Γ auf H_z etwa einem Randpunkt von H_z entspricht und doch aus einem ganzen Kontinuum von Werten besteht¹⁾, so wird ζ_1 eine unendliche und sogar kontinuierliche Menge von Werten zugeordnet, die man erhält, wenn man alle Punktfolgen aus Γ betrachtet, die gegen ζ_1 konvergieren, und alle Häufungsstellen der zugehörigen Argumentwerte von $\zeta - \zeta_0$ ins Auge fasst. Im Falle der Existenz von nicht punktförmigen Primenden ist also $\arg(\zeta - \zeta_0)$ sogar dann eine mehrdeutige Funktion von ζ auf dem Rande, wenn man die verschiedenen Randpunkte, die in einem und demselben Punkte liegen, als verschieden ansieht. Natürlich handelt es sich dabei aber stets um Punkte und Primenden, die von ζ_0 durch einen beliebigen aber festen Querschnitt getrennt worden sind.

Ist nun unter den Voraussetzungen des Satzes I C einer der beiden im Randpunkte π_0 zusammenstossenden Randzweige von Γ , so wird man im allgemeinsten Falle die Existenz der Tangente an C in π_0 folgendermassen definieren: Es muss das für irgend ein geeignetes ζ_0 aus Γ längs C im stetigen Anschluss an das Innere einer Umgebung von π_0 in Γ definierte Argument von $\zeta - \zeta_0$ einem bestimmten Werte φ_0 zustreben, wenn man längs C gegen π_0 geht. Dass $\arg(\zeta - \zeta_0)$ für gewisse ζ ein ganzes Kontinuum von Werten annimmt, braucht dabei nicht zu stören, es fragt sich nur, ob für jedes positive ε stets die Ungleichung

$$|\arg(\zeta - \zeta_0) - \varphi_0| < \varepsilon$$

gilt, sobald nur ζ auf C , topologisch genommen, nahe genug bei π_0 liegt. In diesem Sinne soll im Folgenden die Existenz der Tangente an einen Randzweig eines Gebietes im Unendlichen verstanden werden. Die

¹⁾ Dieses Kontinuum kann trotzdem einen erreichbaren Randpunkt von Γ enthalten.

Definition der Tangente an eine Jordankurve ist hierin natürlich als spezieller Fall enthalten.

Es ist indessen von Interesse, dass in gewissen Fällen sich ein noch wesentlich allgemeiner Tangentenbegriff, den man Herrn J. Wolff¹⁸⁾ verdankt, auch bewährt. Wir werden nämlich sagen, ein in π_0 mündender Zweig C des Randes von Γ besitze dort einen Halbstrahl s mit der Richtung φ als eine W-Tangente im Unendlichen, wenn Folgendes der Fall ist: Es gibt zwei Jordanbögen γ_1, γ_2 , die s im Unendlichen berühren und diesen Halbstrahl im Uebrigen zwischen sich enthalten, ohne ihn zu treffen. Verbindet man die Endpunkte von γ_1 und γ_2 durch einen Jordanquerschnitt q , der sonst weder γ_1 noch γ_2 noch C trifft, und betrachtet man das von $\gamma_1 \gamma_2 q$ begrenzte Gebiet, in dem s verläuft, so liegen alle Punkte von C , die, metrisch genommen, nahe genug bei π_0 liegen, ganz innerhalb oder ganz ausserhalb dieses Gebietes. Eine W-Tangente ist *deshalb* nicht notwendig eine Tangente im dem oben definierten Sinne, weil, wie schon früher erwähnt, es sehr wohl Punkte von C geben kann, die, topologisch genommen, beliebig nahe bei π_0 liegen und andererseits etwa im Innern des Einheitskreises bleiben und dort so verteilt sind, dass für sie die Argumente von $\zeta - \zeta_0$ für kein ζ_0 gegen φ_0 konvergieren. Im Uebrigen ist leicht zu sehen, dass mit s zugleich auch jeder andere Halbstrahl mit derselben Richtung im Unendlichen eine W-Tangente an C in π_0 sein muss¹⁹⁾.

Umgekehrt braucht eine Tangente im oben definierten Sinne keine W-Tangente zu sein. Man kann es z. B. so einrichten, dass C eine unendliche Folge von Randpunkten ζ_1, ζ_2, \dots enthält, die alle im Unendlichen liegen und längs C , topologisch genommen, gegen π_0 konvergieren. Wenn man dafür sorgt, dass die Grenzwerte für $\zeta_n - \zeta_0$

¹⁸⁾ In den Abhandlungen von Wolff, Wolff (2), (3), wird dieser Tangentenbegriff wenigstens implizite zugrunde gelegt.

¹⁹⁾ In unserer oben zitierten Abhandlung, Ostrowski (3) p. 96, ist eine Definition der Ecke (und damit der Tangente) gegeben worden, die in der dort gewählten Fassung zu Missverständnissen Anlass geben könnte. Die dortige Formulierung könnte unter Benutzung der obigen Bezeichnungen als die Definition einer W-Tangente aufgefasst werden, während, wie wir hier ausdrücklich hervorheben möchten, wir nur an die Definition der allgemeinen Tangente im oben zitierten Sinne gedacht haben. Dass insbesondere die Winkeltreue auch für eine W-Tangente gilt, geht aus der dort gegebenen Beweisführung keineswegs hervor, ist vielmehr erst in den beiden Abhandlungen von Hrn. J. Wolff, Wolff (2), (3) bewiesen worden. Um die Formulierung an der angegebenen Stelle zu präzisieren, sind dort in den Zeilen 6, 7 von oben die Worte: „alle Randpunkte von G , die hinreichend nahe bei P liegen“ zu ersetzen durch: „alle Randpunkte von G , die im Sinne der topologischen Anordnung der Randelemente hinreichend nahe bei P liegen“.

gegen φ_0 konvergieren, aber sämtlich von φ_0 verschieden sind, so hat kein in π_0 mündendes Stück von C eine W-Tangente in π_0 , während man es leicht erreichen kann, dass eine Tangente in unserem Sinne wirklich vorliegt.

Ferner ist zu bemerken, dass unsere obige Definition der Tangente durchaus von der Wahl von ζ_0 abhängig sein kann. Trotzdem ist sie nützlich, wie sich später herausstellen wird, da gewisse Sätze auch dann richtig bleiben, wenn es überhaupt Werte von ζ_0 gibt, in bezug auf die C in π_0 eine Tangente hat. Dagegen ist es sehr leicht zu sehen, dass unter den Voraussetzungen des Satzes II²⁰⁾ es auf die Wahl von ζ_0 nicht ankommt. Genauer gesagt, wenn C für ein ζ_0 in π_0 Tangenten hat und, falls man längs C gegen π_0 geht, die Distanz der Punkte von C vom Nullpunkt gegen ∞ strebt, so hat C auch für jedes andere ζ_0 die gleichen Tangenten, und dann ist es an sich auch nicht nötig, ζ_0 auf das Innere von Γ zu beschränken.

Im Folgenden werden wir uns stets nur mit Tangenten im oben definierten Sinne befassen bis auf die Nr. 19, in der wir kurz auf einen neueren Satz von Herrn J. Wolff über W-Tangenten eingehen.

6. III. *Es möge ein einfach zusammenhängendes Gebiet Γ in der Ebene mit einem erreichbaren Randpunkt π_0 im Unendlichen so konform auf die rechte z -Halbebene H_z abgebildet werden, dass π_0 in den unendlich fernen Punkt übergeht. Es mögen dabei die beiden Randzweige C_1, C_2 von Γ , die in π_0 zusammenstossen, dort für einen Punkt ζ_0 aus Γ Tangenten besitzen mit den Richtungen ψ_1, ψ_2 , wo also ψ_1 , bzw. ψ_2 die Grenzwerte von $\arg(\zeta - \zeta_0)$ auf diesen Randzweigen sind, wenn ζ längs C_1 bzw. C_2 ins Unendliche geht. Es möge C_1 etwa der negativen, C_2 der positiven imaginären Axe entsprechen. Dann ist $\psi_1 \leq \psi_2$, und die Schwan-
kung des Argumentes von $\zeta - \zeta_0$ ist in einer gewissen, durch einen ganz im Endlichen verlaufenden Querschnitt von Γ abgetrennten Umgebung von π_0 beschränkt.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $\zeta_0 = 0$ vorausgesetzt werden. Es sei ε eine beliebig kleine positive Zahl, und es seien C_1' und C_2' in π_0 mündende Stücke von C_1 bzw. C_2 , deren Anfangspunkte ξ_1 bzw. ξ_2 im Endlichen liegen und geradlinig erreichbar sind und auf denen $\arg \zeta$ sich von ψ_1 bzw. ψ_2 höchstens um ε unterscheidet. Man verbinde ξ_1 mit ξ_2 durch einen aus endlich vielen Strecken und Kreisbögen bestehenden und im Endlichen liegenden Querschnitt q von Γ , der 0 von π_0 trennt.

²⁰⁾ d. h. also, wenn es sich bei dem zu π_0 gehörenden Randelement um ein „punktförmiges Primende“ handelt.

Es sei T eine in Γ verlaufende und in π_0 mündende Jordankurve mit dem Anfangspunkt im Nullpunkt. Man kann T als einen Streckenzug voraussetzen, der zwischen jedem im Endlichen liegenden Punkt und 0 nur aus endlich vielen Strecken besteht, in seiner ganzen Ausdehnung aber natürlich auch unendlich viele Strecken enthalten kann. Es sei Γ_0 das durch q abgegrenzte Teilgebiet von Γ , das ein unendliches Stück von T enthält. Es sei ferner ξ_1 der letzte Punkt von q , der angetroffen wird, wenn man längs T von 0 aus ins Unendliche geht, und es sei das von ξ_1 nach π_0 laufende Stück von T mit T_1 bezeichnet. Wir wollen nun zeigen, dass man ξ_1, ξ_2 durch zwei solche Punkte η_1 bzw. η_2 auf C_1' bzw. C_2' ersetzen kann, das ein η_1 mit η_2 verbindender Kreisbogen mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt in Γ liegt.

Denn es sei R grösser als die maximale Distanz der Punkte von q vom Nullpunkt und K der Kreis um 0 mit dem Radius R . T_1 trifft K nur in endlich vielen Punkten, da nur endlich viele Teilstrecken von T_1 K überhaupt treffen können. Insbesondere ist die Anzahl der Punkte, in denen K von T_1 durchsetzt wird, sicher ungerade, da T_1 einen Punkt ξ_1 innerhalb K mit π_0 verbindet. Es gibt daher einen Teilbogen κ von K , dessen zwei Endpunkte η_1, η_2 auf dem Rande von Γ_0 liegen und der von T_1 in einer ungeraden Anzahl von Punkten durchsetzt wird. κ liegt daher bis auf η_1, η_2 in Γ_0 . Nun ist T_1 ein Querschnitt von Γ_0 , der ξ_1 mit π_0 verbindet und daher C_1' von C_2' trennt. Die beiden Teilgebiete, in die Γ_0 durch T_1 zerlegt wird, seien mit Γ_{01} und Γ_{02} bezeichnet, wobei C_1' zum Rande von Γ_{01} und C_2' zum Rande von Γ_{02} gehört. Wenn nun der eine Endpunkt η_1 von κ zum Rand von Γ_{01} gehört, so muss der andere Endpunkt η_2 auf dem Rande von Γ_{02} liegen, da κ eine ungerade Anzahl von Malen durchsetzt. Da aber diese Endpunkte nur auf C_1' und C_2' liegen können, verbindet κ einen Punkt η_1 von C_1' mit einem Punkt η_2 von C_2' . Wir können daher von vornherein annehmen, dass q ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt ist.

Es sei nun zuerst $\psi_1 = \psi_2$, und es sei $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$ gewählt. Dann liegen alle Punkte von C_1', C_2' im Winkelraum

$$(6, 1) \quad |\arg \xi - \psi_1| < \frac{\pi}{4}.$$

Da andererseits längs q die Argumente von ξ_1 und ξ_2 stetig zusammenhängen, liegen die stetig fortgesetzten Argumente aller Punkte von q zwischen den Argumentwerten von ξ_1 und ξ_2 , sodass auch q in (6, 1) liegt. Somit liegt der ganze Rand von Γ_0 in (6, 1). Wäre nun Γ_0 nicht ganz in (6, 1) enthalten, so müsste das ganze Aeusserere von (6, 1) zu Γ_0 gehören,

sodass der Nullpunkt ein innerer oder Randpunkt von Γ_0 wäre, während der Nullpunkt nach Konstruktion ausserhalb Γ_0 liegt. Daher liegt Γ_0 in (6, 1), und die Schwankung des Arguments ist in Γ_0 endlich, womit für $\psi_1 = \psi_2$ der Satz III bewiesen ist.

Es sei nun $\psi_1 \neq \psi_2$, und ε bei der obigen Konstruktion sei kleiner als $\frac{|\psi_2 - \psi_1|}{2}$ gewählt. Dann liegt auf q sicher der Punkt

$$\eta_0 = R e^{i \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}}$$

mit dem Argument $\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$. Der Halbstrahl $\sigma: t \eta_0, 1 < t < \infty$,

liegt dann ganz in Γ_0 , da sich auf σ durchweg durch stetige Fortsetzung der Argumentwert $\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$ ergibt, der ausserhalb der Intervalle

$< \psi_1 - \varepsilon, \psi_1 + \varepsilon >$, und $< \psi_2 - \varepsilon, \psi_2 + \varepsilon >$ liegt. Verbinden wir nun η_0 mit dem Nullpunkt innerhalb Γ durch einen Streckenzug σ_1 , der σ bis auf η_0 nicht trifft, so bleibt die Schwankung von $\arg \xi$ auf $\sigma_1 + \sigma$ beschränkt, und aus dem Korollar a) zum Satz I folgt die zweite Behauptung des Satzes III auch für $\psi_1 \neq \psi_2$.

Um aber einzusehen, dass $\psi_1 < \psi_2$ ist, betrachte man das Bildgebiet G_0 von Γ_0 in der z -Ebene, das von H_2 durch einen Querschnitt q' abgegrenzt wird. Sind die Bildpunkte von ξ_1, ξ_2 , resp. z_1, z_2 , so geht man beim positiven Umlauf um G_0 längs der imaginären Axe von $+i\infty$ bis z_2 , sodann längs q' von z_2 nach z_1 und endlich von z_1 längs der imaginären Axe nach $-i\infty$. Daher liegt Γ_0 zur linken Hand, wenn man längs q von ξ_2 nach ξ_1 geht. Insbesondere liegt dabei der Strahl σ links von q ; der Nullpunkt muss also dabei rechts von q liegen, und es folgt $\arg \xi_2 > \arg \xi_1$. Da aber $\arg \xi_1$ in $< \psi_1 - \varepsilon, \psi_1 + \varepsilon >$ und $\arg \xi_2$ in $< \psi_2 - \varepsilon, \psi_2 + \varepsilon >$ liegt und $\varepsilon < \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$ ist, muss $\psi_1 < \psi_2$ sein, w. z. b. w.

§. 2. Beschränkte harmonische Funktionen im Halbstreifen.

7. Es möge nun das Gebiet Γ , für das etwa die Voraussetzungen des Satzes I oder des Korollars a) dazu erfüllt sind, mit Hilfe der Funktion $\zeta = f(z)$ auf die rechte Halbebene H_z der z -Ebene so konform abgebildet werden, dass der unendlich ferne Randpunkt π_0 dem Punkt $z = \infty$ entspricht. Durch eine weitere Transformation $z = e^w, w = \lg z$ wird Γ auf den Parallelstreifen $|\Im w| < \frac{\pi}{2}$ so abgebildet, dass π_0 in den

Punkt $w = +\infty$ übergeht. Ist dann $\zeta = g(w)$, so folgt aus dem Satze I, bzw. dem Korollar, a) dazu, dass $\Phi(w) = \arg(g(w) - \zeta_0)$ in einem gewissen Halbstreifen

$$S^* : |\Im w| < \frac{\pi}{2}, \Re w > u_0$$

gleichmässig absolut beschränkt und stetig festlegbar ist.

Wir wollen nun zuerst einige Sätze für derartige im Halbstreifen S^* gleichmässig absolut beschränkte harmonische Funktionen $\Phi(w)$ herleiten. Es sei die Bemerkung vorausgeschickt, dass in diesen Sätzen weder der Wert von u_0 noch die Lage des Halbstreifens, noch im allgemeinen die Tatsache, dass die Breite des Halbstreifens gleich π ist, eine Rolle spielt, da man durch eine lineare Transformation jeden Halbstreifen in jeden anderen überführen kann. Nur bei den expliziten Formeln muss der Halbstreifen parallel zu S^* orientiert und der Wert π in leicht ersichtlicher Weise durch die Breite des Streifens im allgemeinen Falle ersetzt werden. Ferner setzen wir allgemein in der w -Ebene von S^* : $w = u + iv$.

Ist w ein Punkt innerhalb S^* , dessen Abstand vom Rande von $S^* > d > 0$ ist, und ist für einen Punkt w' von S^* $w' = w + \rho e^{i\vartheta}$, $0 \leq \rho < d$, so lässt sich $\Phi(w')$ mit Hilfe des Poissonschen Integrals darstellen

$$(7,1) \quad \Phi(w') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(d^2 - \rho^2) \Phi(w + d e^{i\chi})}{d^2 - 2d\rho \cos(\vartheta - \chi) + \rho^2} d\chi;$$

daraus folgt weiter

$$(7,2) \quad \Phi(w') - \Phi(w) = \frac{\rho}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(d \cos(\vartheta - \chi) - \rho) \Phi(w + d e^{i\chi})}{d^2 - 2d\rho \cos(\vartheta - \chi) + \rho^2} d\chi,$$

woraus, wenn eine Schranke von $|\Phi(w)|$ in S^* mit a bezeichnet wird,

$$(7,3) \quad |\Phi(w') - \Phi(w)| \leq 2 \frac{a\rho(d + \rho)}{(d - \rho)^2}$$

folgt.

IV. Es sei $\Phi(w)$, $|\Phi(w)| \leq a$, eine in S^* gleichmässig beschränkte reguläre harmonische Funktion.

A. Ist M eine innerhalb S^* ins Unendliche verlaufende Jordankurve, die im Unendlichen eine Gerade $\Re w = v_0$, $-\frac{\pi}{2} < v_0 < \frac{\pi}{2}$, zur Asymptote hat, und konvergiert $\Phi(w)$ gegen einen Wert ψ , wenn w längs M ins

Unendliche geht, so strebt $\Phi(w)$ auch längs jeder anderen in S^* ins Unendliche laufenden Kurve mit der gleichen Asymptote gegen denselben Wert ψ .

B. Ist $f(w)$ eine in S^* reguläre Funktion mit $\Phi(w)$ als Imaginärteil, c die Schwankung von $\Phi(w)$ in S^* und w ein beliebiger Punkt von S^* mit der Distanz t vom Rande von S^* , so gilt

$$(7,4) \quad |f'(w)| \leq \frac{2c}{t} \quad ^{21)}$$

Beweis: A. folgt aus (7,3) unmittelbar. Beim Beweis von B. darf man annehmen, dass $a = \frac{c}{2}$ ist, da man sonst nur zu $\Phi(w)$ eine geeignete Konstante zu addieren braucht, wodurch $f'(w)$ nicht beeinflusst wird. Nunmehr differenziert man für ein d mit $0 < d < t$ (7,1) nach ρ für ein χ , das der Gradientenrichtung von $\Phi(w)$ entspricht, und es ergibt sich die Abschätzung

$$|f'(w)| = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi(w)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi(w)}{\partial v}\right)^2} \leq \frac{2c}{d},$$

aus der (7,4) sofort folgt, wenn man d gegen t wachsen lässt. Offenbar spielt beim Beweis des Satzes IV die Breite und die genaue Lage des Halbstreifens S^* keine Rolle.

Eine der Aussage des Teils A. von IV analoge Aussage lässt sich auch dann machen, wenn M einen der beiden Randstrahlen von S^* zur Asymptote hat. Ist z. B. $\Re w = -\frac{\pi}{2}$ die Asymptote von M , so ist

ψ auch der Grenzwert von $\Phi(w)$ längs jeder ins Unendliche laufenden Jordankurve mit der gleichen Asymptote, die oberhalb M liegt. Wir formulieren die vollständigen Sätze indessen für eine in einem Winkelraum beschränkte harmonische Funktion.

IV'. Es sei $\Phi(w)$ eine in der Halbebene H_w : $\Re w > 0$ gleichmässig beschränkte harmonische Funktion, die auch auf der negativen imaginären Axe stetig ist und dort gegen Null konvergiert, wenn w gegen $-i\infty$ geht. Ist dann L eine in H_w verlaufende Jordankurve, die im Unendlichen die negative imaginäre Axe berührt, so strebt $\Phi(w)$ auch längs L gegen Null.

Beweis: Es sei $\Phi_1(w)$ eine in H_w beschränkte harmonische Funktion, die auf der negativen imaginären Axe die gleichen Randwerte hat wie $\Phi(w)$, auf der positiven imaginären Axe aber verschwindet. Man

²¹⁾ (7,4) rührt von Lindelöf her, Lindelöf (1), p. 15. Vgl. auch Koebe (1) p. 61, sowie Jensen (1), p. 28.

kann z. B. $\Phi_1(w)$ mit Hilfe des Poissonschen Integrals bilden. Da die Randwerte von $\Phi_1(w)$ im Unendlichen gegen Null streben, strebt $\Phi_1(w)$ nach dem Schwarzschen Satz gegen Null auch längs L . Man braucht daher nur $\Phi(w) - \Phi_1(w)$ zu betrachten, d. h. man kann von vornherein annehmen, dass die Randwerte von $\Phi(w)$ auf der negativen imaginären Axe durchweg verschwinden. Man kann ferner ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $|\Phi(w)| < \pi$ überall in H_w ist. Ist dann $\Phi^*(w)$ die in H_w beschränkte harmonische Funktion, die auf der negativen imaginären Axe verschwindet und auf der positiven imaginären Axe gleich π ist, so gilt offenbar

$$|\Phi(w)| \leq \Phi^*(w).$$

Es genügt daher, die Behauptung für $\Phi^*(w)$ zu beweisen.

Nun ist aber bekannt, dass die Werte von $\Phi^*(w)$ auf dem Halbstrahl aus H_w , der mit der negativen imaginären Axe den Winkel φ bildet, $0 < \varphi < \pi$, gleich φ sind. Da aber L „zuletzt“ in jeden Winkelraum $-\pi + \varepsilon > \arg w > -\pi$ hineinkommt, folgt die Behauptung unmittelbar. — Offenbar gilt die analoge Tatsache, wenn die negative und die positive Axe vertauscht werden.

IV". Es sei in der w -Ebene eine vom Nullpunkt ausgehende und ins Unendliche verlaufende Jordankurve M gegeben, die im Unendlichen die Richtung γ_1 hat und für ein $\gamma_2 > \gamma_1$ den Halbstrahl $s: \arg w = \gamma_2$ nur im Nullpunkt trifft. Das „zwischen“ M und s liegende Gebiet, das alle hinreichend weit von Nullpunkt entfernten Punkte des Winkelraumes $\gamma_2 > \arg w > \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$ enthält, sei mit G bezeichnet. $\Psi(w)$ sei eine in G und

in den inneren Punkten von s und M definierte beschränkte harmonische Funktion, deren Werte gegen einen Wert ψ konvergieren, wenn w längs M ins Unendliche strebt. Ist dann L irgend eine in G verlaufende Jordankurve, die M im Unendlichen berührt, so strebt $\Psi(w)$ auch längs L gegen den gleichen Wert ψ .

Beweis: Man bilde das Gebiet G so auf die rechte Halbebene $H_{w'}$ der w' -Ebene ab, dass die unendlich fernen Punkte einander entsprechen, s in die positive und M in die negative imaginäre Axe übergeht. Dann bildet sich L auf eine Jordankurve L' ab, die in $H_{w'}$ verläuft und die negative imaginäre Axe im Unendlichen berührt. — Dies folgt nach bekannten Sätzen aus den über G gemachten Annahmen ohne weiteres, wird aber übrigens im § 3 im Satze X von Neuem bewiesen, wobei vom Satz IV" kein Gebrauch gemacht wird²³⁾. — Nunmehr genügt es,

²³⁾ Der Satz IV" wird zuerst in der Nr. 13 beim Beweis des Satzes XII benutzt.

die Behauptung des Satzes IV' auf L' anzuwenden, um den Satz IV" zu beweisen.

Offenbar gilt der Satz, mutatis mutandis, auch für $\gamma_2 < \gamma_1$.

8. Konvergiert eine reelle Funktion $\Phi(w)$ auf einem Halbstrahl $\Im w = v_0$, $u > u_0$, gegen einen Wert ψ , sodass $\Phi(w) - \psi \rightarrow 0$ mit $u \uparrow \infty$ ist, so ist es gelegentlich von Vorteil, für den absoluten Betrag von $\Phi(w) - \psi$ eine monoton für $u \uparrow \infty$ gegen Null abnehmende Majorante $\varepsilon(u)$ zu benützen. Man kann $\varepsilon(u)$ z. B. definieren als

$$(8,1) \quad \varepsilon(u) = \sup_{u_1 \geq u} |\Phi(u_1 + i v_0) - \psi|.$$

V. Es sei $\Phi(w)$ eine innerhalb S^* reguläre und gleichmässig absolut beschränkte Potentialfunktion, die auch noch auf den beiden begrenzenden Halbstrahlen $v = \pm \frac{\pi}{2}$, $u > u_0$, stetig ist und längs dieser Halbstrahlen gegen Null konvergiert.

1). $\Phi(w)$ konvergiert gegen Null, wenn w über S^* ins Unendliche strebt (und damit gilt dies gleichmässig in v für $u \uparrow \infty$).

2). Ist in S^* $|\Phi(w)| \leq a$ und sind $\varepsilon_1(u)$ und $\varepsilon_2(u)$ zwei für $u > u_0$ positive und mit $u \uparrow \infty$ monoton gegen Null fallende Funktion von u , derart, dass für $u > u_0$

$$(8,2) \quad \left| \Phi\left(u + i \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \varepsilon_1(u), \quad \left| \Phi\left(u - i \frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \varepsilon_2(u)$$

gilt, so gibt es eine nur von a , $\varepsilon_1(u)$, $\varepsilon_2(u)$ und u_0 abhängige, für $u > u_0$ positive und für $u \uparrow \infty$ gegen Null abnehmende Funktion $\varepsilon(u)$ derart, dass für $u > u_0$, $|v| \leq \frac{\pi}{2}$ stets gilt:

$$(8,3) \quad |\Phi(u + i v)| \leq \varepsilon(u).$$

3). Die beiden ersten partiellen Ableitungen von Φ : $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ konvergieren für jedes positive δ mit $u \uparrow \infty$ gegen Null gleichmässig im Halbstreifen $u > u_0$, $|v| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$.

Bemerkung: Offenbar bleibt der Satz V mutatis mutandis richtig, wenn der Halbstreifen S^* eine von π verschiedene Breite hat und anders liegt. Nur hängt dann natürlich $\varepsilon(u)$ insbesondere von der Breite des Halbstreifens ab.

Beweis: Die Behauptung 1) des obigen Satzes ergibt sich, wenn S^* konform auf den Einheitskreis abgebildet wird, unmittelbar aus der

bekannten Tatsache, dass ein Poissonsches Integral in einem Stetigkeitspunkt der Randfunktion aus dem Inneren allseitig gegen den Wert der Randfunktion in diesem Punkt konvergiert²³⁾. Dass Φ durch das Poissonsche Integral darstellbar ist, folgt aus der Beschränktheit von Φ ²⁴⁾. Die Behauptung 2) ergibt sich nach demselben Satz nach der Tatsache, dass die Werte von $\Phi(w)$ innerhalb S^* eingeschlossen sind zwischen den Werten von zwei Potentialfunktionen $\Phi_1(w)$ und $-\Phi_1(w)$, wobei $\Phi_1(w)$ auf den drei Teilstücken des Randes die Randwerte $\varepsilon_1(u)$, a , $\varepsilon_2(u)$ hat. (Die Funktion $\Phi_1(w)$ kann man z. B. mit Hilfe des Poissonschen Integrals ohne weiteres bilden). Man braucht dann nur die Funktion $\varepsilon(u)$ für $\Phi_1(w)$ zu berechnen.

Die Behauptung 3) geht beim Uebergang zum Einheitskreis in einen Satz von Lichtenstein über, wonach in einem Stetigkeitspunkt eines Poissonschen Integrals die Ableitung der zugehörigen analytischen Funktion bei der Annäherung an den betreffenden Randpunkt α aus dem Inneren des Einheitskreises im Winkel $=0\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)$ ist²⁵⁾. Es ist aber viel einfacher, die Behauptung 3) direkt in der w -Ebene zu beweisen. Denn beschränkt man w auf den Bereich $|v| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, $u \geq u_0 + \delta$, so ist $\Phi(w)$ auf einer Kreisscheibe mit dem Radius $\frac{\delta}{2}$ um jeden Punkt aus diesem Bereich noch regulär. Daher gilt für $w' = w + e^{i\chi} \rho$, $0 < \rho < \frac{\delta}{2}$:

$$\Phi(w') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \rho^2\right) \Phi\left(w + \frac{\delta}{2} e^{i\chi}\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \delta \rho \cos(\vartheta - \chi) + \rho^2} d\chi;$$

differenziert man nun diese Darstellung nach ρ und setzt sodann $w' = w$, $\rho = 0$, so ergibt sich

$$(8.4) \quad \frac{\partial \Phi(w)}{\partial \rho} = \frac{2}{\pi \delta} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left(w + \frac{\delta}{2} e^{i\chi}\right) \cos(\vartheta - \chi) d\chi.$$

woraus wegen (8.3)

²³⁾ vgl. Ostrowski (1).

²⁴⁾ Der Satz ist längst bekannt, vgl. etwa Ostrowski (4).

²⁵⁾ vgl. Lichtenstein (2).

$$\left| \frac{\partial \Phi(w)}{\partial \rho} \right| \leq \frac{4}{\delta} \varepsilon \left(u - \frac{\delta}{2} \right).$$

Hieraus folgt aber, etwa für $\vartheta = 0$, $\frac{\pi}{2}$:

$$\left| \frac{\partial \Phi(w)}{\partial u} \right| \leq \frac{4}{\delta} \varepsilon \left(u - \frac{\delta}{2} \right), \quad \left| \frac{\partial \Phi(w)}{\partial v} \right| \leq \frac{4}{\delta} \varepsilon \left(u - \frac{\delta}{2} \right),$$

womit die Behauptung 3) bewiesen ist.

Korollar. Es möge die Voraussetzung von V dahin abgeändert werden, dass $\Phi(w)$ auf dem oberen Randstrahl gegen ψ_2 und auf dem unteren Randstrahl gegen ψ_1 konvergiert, und es seien $\varepsilon_1(u)$, $\varepsilon_2(u)$ die entsprechend für $\Phi(w) - \psi_1$, $\Phi(w) - \psi_2$ definierten Majoranten.

1). $\Phi(w) - \left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{\pi} \left(v + \frac{\pi}{2} \right) + \psi_1 \right)$ konvergiert mit $u \uparrow \infty$ gegen Null gleichmässig in S^* .²⁶⁾

2). Für eine nur von a , $\varepsilon_1(u)$, $\varepsilon_2(u)$, u_0 abhängige, monoton gegen Null fallende Funktion $\varepsilon(u)$ gilt:

$$\left| \Phi(w) - \left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{\pi} \left(v + \frac{\pi}{2} \right) + \psi_1 \right) \right| \leq \varepsilon(u).$$

3). Für jedes positive δ gilt gleichmässig für $|v| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ mit $u \uparrow \infty$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} \rightarrow \frac{\psi_2 - \psi_1}{\pi}.$$

Zum Beweis braucht man nur den Satz V auf die Differenz $\Phi(w) - \left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{\pi} \left(v + \frac{\pi}{2} \right) + \psi_1 \right)$ anzuwenden.

9. VI. Es sei $\Phi(w)$ eine im Halbstreifen S^* : $|v| < \frac{\pi}{2}$, $u > u_0$, reguläre harmonische Funktion. Es liege $|\Phi(w)|$ für jedes positive δ im Halbstreifen S_δ^* : $|v| < \frac{\pi}{2} - \delta$, $u > u_0 + \delta$, unterhalb einer von w unabhängigen Schranke K_δ . Es seien M_1 , M_2 zwei in S^* liegende, ins Unendliche verlaufende Jordanbögen, die die Strahlen $v = v_1$, bzw. $v = v_2$, $v_1 < v_2$, zu Asymptoten haben, wobei

²⁶⁾ Diese Tatsache ist natürlich längst bekannt.

$$-\frac{\pi}{2} < v_1 < v_2 < \frac{\pi}{2}$$

ist. Es möge $\Phi(w)$ längs M_1 bzw. längs M_2 resp. gegen die Werte ψ_1, ψ_2 streben.

Dann strebt $\Phi(w)$ längs jeder in S^* liegenden Jordankurve mit einer Asymptote $v = v', -\frac{\pi}{2} < v' < \frac{\pi}{2}$, gegen einen Grenzwert, und zwar gegen

$$(9,1) \quad \frac{\psi_2 - \psi_1}{v_2 - v_1} (v' - v_1) + \psi_1,$$

und allgemeiner strebt die Differenz

$$(9,2) \quad \Phi(w) - \left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{v_2 - v_1} (v - v_1) + \psi_1 \right)$$

mit $u \uparrow \infty$ gegen Null, und zwar gleichmäßig in jedem Halbstreifen $S_s^{*27)}$

Zugleich konvergieren die Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ mit $u \uparrow \infty$ gleich-

mässig in jedem S_s^* gegen Null, bzw. gegen $\frac{\psi_2 - \psi_1}{v_2 - v_1}$.

Bemerkung: Wegen IV darf man die Kurven M_1 bzw. M_2 als die Strahlen $v = v_1, u > u_0$, bzw. $v = v_2, u > u_0$ annehmen. Ferner darf unbeschadet der Allgemeinheit $\psi_1 = \psi_2 = 0$ vorausgesetzt werden, da wir sonst ja nur von $\Phi(w)$ die in S^* absolut beschränkte harmonische Funktion $\frac{\psi_2 - \psi_1}{v_2 - v_1} (v - v_1) + \psi_1$ abziehen brauchen. Dann kann

weiter nach Satz V vorausgesetzt werden, dass $\Phi(w)$ mit $u \uparrow \infty$ gleichmäßig für $v_1 \leq v \leq v_2$ gegen Null konvergiert. Ferner folgt aus den Voraussetzungen nach IVB unmittelbar, dass die beiden Ableitungen von $\Phi: \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ in jedem Halbstreifen S_s^* absolut gleichmäßig be-

schränkt sind und zwar absolut unterhalb $\frac{8}{\delta} K_{\frac{1}{2}}$ bleiben. Endlich folgt

der auf die Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ bezügliche Teil der Behauptung von

VI unmittelbar aus dem Satze V, angewendet auf den Halbstrei-

²⁷⁾ Der Satz rührt, wenn die Voraussetzungen und Bedingungen auf Halbstreifen bezogen werden, in etwas schwächerer Formulierung von Carleman und Hardy her, vgl. Carleman and Hardy (1), pp. 132, 133, sowie Hardy (2).

fen S_s^{*} , sobald der erste Teil der Behauptung von Satz VI bewiesen ist.

Beweis von VI: Aus der Konvergenz von $\Phi(w)$ nach Null für $v_1 \leq v \leq v_2$ folgt, dass die beiden ersten Ableitungen von Φ im Halbstreifen

$$(9,3) \quad v_1 + \frac{v_2 - v_1}{4} \leq v \leq v_2 - \frac{v_2 - v_1}{4}, \quad u > u_0,$$

gegen Null konvergieren, gleichmäßig in v für $u \uparrow \infty$. Ist nun $F(w)$ eine in S^* analytische Funktion von w mit $\Im F(w) = \Phi(w)$, so konvergiert daher $F'(w)$ im Halbstreifen (9,3) gleichmäßig gegen Null mit $u \uparrow \infty$. Andererseits sind, wie oben bemerkt, die ersten Ableitungen von Φ in jedem S_s^* gleichmäßig beschränkt, und dasselbe gilt daher auch für $F'(w)$. Nunmehr folgt aus einem bekannten Montel'schen Satz, angewendet auf $F'(w)$, die gleichmäßige Konvergenz von $F'(w)$ gegen Null in jedem Halbstreifen S_s^{*} , d. h. in jedem Halbstreifen S_s^* . Daher konvergiert insbesondere $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ gegen Null mit $u \uparrow \infty$ gleichmäßig in je-

dem S_s . Ist nun für ein $\delta < \frac{v_2 - v_1}{4}$ w ein beliebiger Punkt aus S_s^* , w' der Punkt aus S_s^* mit der Ordinate v_1 und derselben Abszisse wie w , so folgt aus

$$\Phi(w) - \Phi(w') = \int_{v_1}^v \frac{\partial \Phi(u + iv)}{\partial v} dv$$

wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden nach 0, dass $\Phi(w)$ mit $u \uparrow 0$ gegen denselben Grenzwert 0 konvergiert, wie $\Phi(w')$, und zwar gleichmäßig in S_s^* . Damit ist der Satz VI bewiesen.

VI'. Unter den Voraussetzungen des Satzes VI sei $\Phi(w)$ im ganzen Halbstreifen S^* gleichmäßig beschränkt. Ist dann M eine in S^* verlaufende Jordankurve mit der Asymptote $v = \frac{\pi}{2}$ oder $v = -\frac{\pi}{2}$ im Unendlichen und strebt $\Phi(w)$ gegen einen Grenzwert ψ , wenn man längs M ins Unendliche geht, so ist dieser Grenzwert gleich

$$\frac{\psi_2 - \psi_1}{v_2 - v_1} \left(\frac{\pi}{2} - v_1 \right) + \psi_1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\psi_2 - \psi_1}{v_2 - v_1} \left(-\frac{\pi}{2} - v_1 \right) + \psi_1.$$

Ist aber $\psi_1 = \psi_2$ und ist M' irgend eine in S^* ins Unendliche verlaufende Jordankurve, längs deren $\Phi(w)$ einem Grenzwert ψ zustrebt, so ist dieser Grenzwert gleich $\psi_1 = \psi_2$, ob M' im Unendlichen eine Asymptote hat oder nicht.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, dass $\psi_1 = \psi_2 = 0$ ist. Schneidet dann M' für irgend ein v' mit $-\frac{\pi}{2} < v' < \frac{\pi}{2}$ den Halbstrahl $v = v'$, $u > u_0$ unendlich oft in beliebig grosser Entfernung vom Nullpunkt, so muss ψ dem Grenzwert 0 gleich sein, dem $\Phi(w)$ längs $v = v'$ zustrebt, womit der Satz in diesem Falle bewiesen ist. Sonst hat M' eine Asymptote, und man braucht nur die Fälle zu betrachten, wo diese Asymptote eine der Geraden $v = \pm \frac{\pi}{2}$ ist.

Es möge nun $M' = M$ etwa $v = \frac{\pi}{2}$ zur Asymptote im Unendlichen haben, und es sei $\psi \neq 0$. Dann strebt die in S^* harmonische Funktion $\Phi(w) - \frac{2v\psi}{\pi}$ sowohl längs M als auch längs der positiven reellen Axe gegen 0. Man darf annehmen, dass M im Punkte $u = u_0 + 1$ der reellen Axe beginnt und sonst die reelle Axe nicht mehr trifft. Dann begrenzen M und der Halbstrahl $s: u \geq u_0 + 1$ der reellen Axe ein Gebiet G , das in S^* verläuft. Bildet man G konform auf den Einheitskreis ab, so folgt wie beim Beweis des Satzes V, dass $\Phi(w) - \frac{2v\psi}{\pi}$ gegen 0 strebt, wenn w in G beliebig ins Unendliche geht, also auch insbesondere längs des Halbstrahles $v = \frac{\pi}{4}$. Daher muss $\Phi(w)$ längs dieses Halbstrahles gegen $\frac{\psi}{2}$ konvergieren, während nach Satz VI der Grenzwert von $\Phi(w)$ auch längs dieses Halbstrahles gleich 0 sein muss. Damit ist der Satz VI bewiesen. —

Es sei nun $P(z)$ eine im Einheitskreis E_z der z -Ebene reguläre harmonische Funktion, deren Werte gegen einen Grenzwert ψ streben, wenn z aus dem Innern von E_z gegen einen Peripheriepunkt z_0 im Winkel konvergiert, d. h. zwischen zwei beliebigen, von z_0 ausgehenden Sehnen. Dann werden wir sagen, $P(z)$ besitze ψ im Randpunkt z_0 als Randwert oder ist in z_0 gleich ψ . Strebt aber $P(z)$ gegen ψ , wenn z aus E_z allseitig gegen z_0 geht, so werden wir sagen, $P(z)$ besitze ψ in z_0 als den allseitigen Randwert. Analoge Definitionen gelten für analytische Funktionen.

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z -Ebene und z_0 ein erreichbarer Randpunkt von G . $P(z)$ sei in G regulär harmonisch. Man bilde G konform auf das Innere des Einheitskreises E_ζ der

ζ -Ebene ab, wobei z_0 etwa in ζ_0 übergehen möge. Hat dann die in E_ζ harmonische Funktion $Q(\zeta)$, in die $P(z)$ übergeht, in ζ_0 einen Randwert ψ , so ist dies der Fall, wie die konforme Abbildung von G auf E_ζ auch gewählt werden möge. Wir sagen dann, $P(z)$ besitze ψ in z_0 als Randwert oder ist in z_0 gleich ψ , wobei aber das Gebiet G zunächst wesentlich ist. Wir werden daher, wenn in einer und derselben Betrachtung mehrere Gebiete vorkommen, sagen, $P(z)$ besitze ψ in z_0 von G aus als Randwert.

Unter Benutzung dieser Definitionen gilt:

Korollar zum Satz VI. Es möge die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G der z -Ebene reguläre harmonische Funktion $P(z)$ in einem erreichbaren Randpunkt z_0 von G den Randwert ψ haben. Es sei ferner $P(z)$ in einer allseitigen Umgebung von z_0 in G absolut beschränkt. Strebt dann $P(z)$ längs eines in G verlaufenden und in z_0 mündenden Jordanbogens L gegen ψ' , so muss $\psi' = \psi$ sein. Und dasselbe gilt, wenn $P(z)$ eine komplexe, analytische Funktion ist.

Zum Beweis genügt es, G auf das Innere des Einheitskreises und sodann auf einen Halbstreifen S^* so abzubilden, dass z_0 in den unendlich fernen Punkt von S^* übergeht. Dann ist die aus $P(z)$ entstehende Potentialfunktion in einem Teilhalbstreifen S_1^* von S^* beschränkt, und es genügt, den Satz VI auf den aus L entstehenden Jordanbogen M' anzuwenden. — Die damit bewiesene Tatsache ist deshalb wichtig, weil sie in einem gewissen Masse die Unabhängigkeit der Randwerte von $P(z)$ vom Gebiet G impliziert. Für komplexe, analytische $P(z)$ läuft diese Tatsache auf einen bekannten Satz von Hrn. E. Lindelöf hinaus.

VII. Unter den Voraussetzungen des Satzes VI mögen für ein $\delta > 0$ w und w' innerhalb S^* gegen ∞ konvergieren. Dann gilt, unter $F(w)$ eine in S^* analytische Funktion mit $\Im F(w) = \Phi(w)$ verstanden,

$$(9, 4) \quad F(w) - F(w') - \frac{\psi_2 - \psi_1}{v_2 - v_1} (w - w') = 0 \quad (w - w').$$

Beweis: Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen läuft der letzte Teil der Behauptung von VI darauf hinaus, dass in S_2^*

$$(9, 5) \quad F'(w) \rightarrow \frac{\psi_2 - \psi_1}{v_2 - v_1}$$

gilt. Nun folgt für den geradlinigen Integrationsweg

$$F(w) - F(w') = \int_{w'}^w F'(w) dw = \frac{\phi_2 - \phi_1}{v_2 - v_1} (w - w') + \\ + \int_{w'}^w \left(F'(w) - \frac{\phi_2 - \phi_1}{v_2 - v_1} \right) dw.$$

Dass aber hier das letzte Integral 0 ($w - w'$) ist, folgt aus (9,5) unmittelbar.

Korollar. Bleibt für irgend ein positives $k > 0$

$$(9,6) \quad |w - w'| < k,$$

so gilt

$$(9,7) \quad F(w) - F(w') - \frac{\phi_2 - \phi_1}{v_2 - v_1} (w - w') \rightarrow 0.$$

§ 3. Allgemeines über Winkeltreue und Winkelproportionalität am Rande.

10. Aus den im § 2 bewiesenen Sätzen wollen wir nun Folgerungen über das Verhalten von Richtungen bei konformer Abbildung ziehen.

Definition: Es seien G bzw. Γ zwei einfach zusammenhängende Gebiete, die im Unendlichen je einen erreichbaren Randpunkt p_0 bzw. π_0 haben und so aufeinander konform abgebildet werden, dass dabei p_0 und π_0 einander entsprechen. Es sei L ein in G verlaufender Jordanbogen, der in p_0 mündet und dort eine Richtung besitzt. Entspricht bei der Abbildung L ein in Γ verlaufender und in π_0 mündender Jordanbogen Λ , der gleichfalls im Unendlichen eine Richtung hat, so sagen wir, L werde bei unserer Abbildung *konform im Unendlichen* abgebildet.

VIII. Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der ζ -Ebene, das im Unendlichen einen erreichbaren Randpunkt π_0 besitzt und das so auf den Winkelraum R : $\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$ der z -Ebene konform abgebildet wird, dass π_0 in den unendlich fernen Punkt übergeht.

Ist L ein ins Unendliche verlaufender Jordanbogen in R , der im Unendlichen eine Richtung φ mit $\alpha_1 < \varphi < \alpha_2$ hat, und wird bei unserer Abbildung L konform im Unendlichen abgebildet, so gilt dasselbe für jeden analogen Bogen L' aus R mit derselben Richtung φ im Unendlichen.

Beweis: Durch eine Parallelverschiebung der Ebene können wir erreichen, dass der Nullpunkt in Γ liegt, so dass das Korollar c) zum Satze I anwendbar wird. Bildet man dann R logarithmisch auf den Parallelstreifen $\alpha_1 < \Im w < \alpha_2$ ab, so ist daher das Argument der Abbildungsfunk-

tion $\zeta(w)$ von Γ auf den Parallelstreifen in einem Halbstreifen S^* : $\Re w > u_0$, $\alpha_1 < \Im w < \alpha_2$, beschränkt. Beim Uebergang zum Halbstreifen S^* der w -Ebene entspricht aber dort L' ein Jordanbogen M' , der die Gerade $\Re w = \varphi$ im Unendlichen zur Asymptote hat. Daher ergibt sich VIII unmittelbar aus IV.

IX. Wird unter den Voraussetzungen des Satzes VIII ein Jordanbogen Λ aus Γ mit der Richtung ψ im Unendlichen konform im Unendlichen auf einen Jordanbogen L in R abgebildet und ist für ein $\delta > 0$ der Teil des Winkelraumes $|\arg \zeta - \psi| < \delta$ mit $|\zeta| > \rho_0$ in Γ enthalten, so wird auch jeder Λ im Unendlichen berührende Jordanbogen aus Γ konform abgebildet, und sein Bildbogen hat im Unendlichen die gleiche Richtung, wie der Bildbogen von Λ .

Beweis: Durch eine Parallelverschiebung der ζ -Ebene kann man erreichen, dass der ganze Winkelraum R_1 : $|\arg \zeta - \psi| < \delta$ in Γ liegt. Ist dann Γ_1 das R_1 entsprechende Teilgebiet von R , so braucht man nur den Satz VIII auf die konforme Abbildung von Γ_1 auf R_1 anzuwenden.

11. X. Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der ζ -Ebene mit einem erreichbaren Randpunkt π_0 im Unendlichen. Der Rand von Γ möge zwei freie Jordanbögen C_1, C_2 enthalten, die in π_0 zusammenstossen und dort Tangenten besitzen mit den Richtungen ϕ_1 bzw. ϕ_2 , wo also ϕ_1, ϕ_2 die Grenzwerte des stetig festgesetzten $\arg \zeta$ auf diesen Randzweigen sind, wenn ζ ins Unendliche geht. Es möge Γ so auf die rechte Halbebene H_z der z -Ebene konform abgebildet werden, dass π_0 in $z = \infty$ übergeht. C_1 möge dabei ein auf der negativen imaginären Axe liegender Halbstrahl c_1 , C_2 ein auf der positiven imaginären Axe liegender Halbstrahl c_2 entsprechen. Wir bezeichnen die Punktmenge $\Gamma + C_1 + C_2$ mit $\bar{\Gamma}$ und die Punktmenge $H_z + c_1 + c_2$ mit \bar{H}_z . Dann wird jeder auf \bar{H}_z ins Unendliche laufender Jordanbogen mit einer Tangente im Unendlichen in $\bar{\Gamma}$ konform im Unendlichen abgebildet, und das Analoge gilt für jeden auf $\bar{\Gamma}$ verlaufenden Jordanbogen mit einer Tangente im Unendlichen.

Es seien ϕ_1^*, ϕ_2^* die Grenzrichtungen von C_1, C_2 im Unendlichen, im stetigen Anschluss an irgend eine stetige Festlegung von $\arg \zeta$ in einer Umgebung von π_0 definiert, sodass $\phi_1^* \equiv \phi_1, \phi_2^* \equiv \phi_2 \pmod{2\pi}$ ist.

Entsprechen dann zwei Jordanbögen aus \bar{H}_z mit den Richtungen φ_1, φ_2 im Unendlichen in $\bar{\Gamma}$ Jordanbögen, die im Unendlichen die Richtungen γ_1, γ_2 haben, so gilt

$$(11,1) \quad \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{\phi_2^* - \phi_1^*}{\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (28).$$

²⁸⁾ Dieser Satz rührt von Herrn Carathéodory her, Carathéodory (2). Vgl. auch Lindelöf (3).

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, dass $\zeta = 0$ in Γ liegt. Nach Satz III ist dann die Schwankung von $\arg \zeta$ bei stetiger Festlegung in einer Umgebung Γ_0 von τ_0 in Γ beschränkt, und es kann offenbar angenommen werden, dass die im Anschluss an diese Festlegung bestimmten Grenzrichtungen auf C_1, C_2 mit ψ_1^*, ψ_2^* identisch sind. Dann gilt $\psi_2^* \geq \psi_1^*$. Zugleich kann vorausgesetzt werden, dass Γ_0 aus Γ durch Anbringen eines Querschnitts entsteht, der einen Punkt von C_1 mit einem Punkt von C_2 verbindet.

Geht man nun vermöge $z = e^w$ zum Parallelstreifen $|\Im w| \leq \frac{\pi}{2}$ über, so entspricht einem Teilgebiet von Γ_0 ein Halbstreifen $S^*: |\Im w| < \frac{\pi}{2}, \Re w > u_0$. Nunmehr ist aber der Satz V nebst dem Korollar auf die Funktion $\Phi(w) = \arg \zeta$ anwendbar, und die Behauptung 1) des Korollars ergibt sowohl die erste Behauptung des Satzes X als auch die Formel (11,1).

Nunmehr ist auch der Beweis, dass ein auf $\bar{\Gamma}$ verlaufender Jordanbogen Λ mit der Richtung χ im Unendlichen sich konform abbildet, leicht zu erbringen. Gilt zunächst $\psi_1^* < \chi < \psi_2^*$ und ist ε eine beliebig kleine positive Zahl, $\varepsilon < \psi_2^* - \chi$, $\varepsilon < \chi - \psi_1^*$, so seien L_1, L_2 die Halbstrahlen aus H_z : $\arg z = \varphi_1$, $\arg z = \varphi_2$, deren Richtungen im Unendlichen nach der konformen Abbildung in $\chi - \varepsilon$ bzw. in $\chi + \varepsilon$ übergehen. Dann verläuft offenbar Λ „zuletzt“ zwischen den Bildkurven von L_1, L_2 . Daher liegt das Bild L von Λ in H_z „zuletzt“ zwischen L_1 bzw. L_2 . Für $\varepsilon \downarrow 0$ konvergieren aber φ_1 und φ_2 gegen einen Wert φ , der wegen (11,1) mit χ vermöge der Relation $\chi - \psi_1^* = \frac{\psi_2^* - \psi_1^*}{\pi} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)$ zusammenhängt. Daher hat L im Unendlichen die Richtung φ .

Ist aber etwa $\chi = \psi_1^*$, so verläuft der Strahl Λ_ε : $\arg \zeta = \psi_1^* + \varepsilon$ für hinreichend kleine positive ε „zuletzt“ in Γ und seine Bildkurve L_ε hat im Unendlichen eine Richtung, die für $\varepsilon \downarrow 0$ gegen $-\frac{\pi}{2}$ konvergiert. Da aber das Bild von Λ „zuletzt“ zwischen der negativen imaginären Axe und L_ε verläuft, muss auch L im Unendlichen die Richtung $-\frac{\pi}{2}$ besitzen. Genau analog wird für $\chi = \psi_2^*$ geschlossen. Damit ist X in allen Teilen bewiesen.

Bemerkung: Ist $\psi_2^* - \psi_1^* = \pi$, so wird nach (11,1) auch $\chi_2 - \chi_1 = \varphi_2 - \varphi_1$, und die Abbildung ist *winkeltreu im Unendlichen*, und zwar

allseitig. Im allgemeineren Fall, solange $\psi_2 - \psi_1 \neq 0$ ist, spricht man von der (*allseitigen*) *Winkelproportionalität im Unendlichen*²⁹⁾. Für $\psi_2 - \psi_1 = 0$ endlich handelt es sich um eine *Spitzenabbildung*.

12. XI. Es möge ein einfach zusammenhängendes Gebiet Γ der ζ -Ebene mit einem erreichbaren Randpunkt τ_0 im Unendlichen so konform auf H_z abgebildet werden, dass $\zeta = \tau_0$ in $z = \infty$ übergeht, und es mögen dabei zwei ins Unendliche verlaufende Jordanbögen L_1, L_2 in H_z mit den Richtungen φ_1 bzw. φ_2 im Unendlichen, wobei $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$ ist, im Unendlichen konform abgebildet werden. Dann wird jede in H_z verlaufende Jordankurve, die im Unendlichen eine Richtung φ mit $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ hat, im Unendlichen konform abgebildet. Haben die Bildkurven Λ_1, Λ_2 von L_1, L_2 im Unendlichen die Richtungen ψ_1 bzw. ψ_2 , so entspricht jeder Richtung φ mit $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ bei der Abbildung in Γ die Richtung

$$(12, 1) \quad (\psi_2 - \psi_1) \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} + \psi_1.$$

Darüber hinaus konvergiert die Differenz

$$(12, 2) \quad \arg \zeta - \left[(\psi_2 - \psi_1) \frac{\arg z - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} + \psi_1 \right]$$

für jeden $\delta > 0$ gegen Null, wenn z in H_z so ins Unendliche geht, dass

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$$

bleibt. Zugleich ist $\psi_1 \leq \psi_2$.

Beweis. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit darf angenommen werden, dass $\zeta = 0$ in Γ liegt. Geht man dann vermöge $z = e^w$ zur w -Ebene über, so folgt aus dem Korollar c) zum Satz I, dass $\arg \zeta$ als Funktion $\Phi(w)$ in einem gewissen Halbstreifen $\Re w > u_0, |\Im w| < \frac{\pi}{2}$, bei geeigneter stetiger Festlegung im Intervall $< \psi_1 - 3\pi, \psi_1 + 3\pi >$ liegt, also beschränkt ist. Dann aber ergeben sich die ersten Behauptungen des Satzes XI, die sich auf die Ausdrücke (12,1) und (12,2) beziehen, aus dem Satz VI ohne weiteres.

²⁹⁾ Herr Carathéodory spricht in Carathéodory (2), p. 38, von Quasikonformität.

Dass aber $\psi_1 \leq \psi_2$ ist, folgt aus dem Satz III, angewandt auf das Bildgebiet etwa des Winkelraumes $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$, wenn man diesen Winkelraum durch $z' = z^2$ auf H_z weiter abbildet.

Bemerkung zum Satz XI. Offenbar bleiben sämtliche Behauptungen des Satzes XI erhalten, wenn man in ihm die Halbebene H_z durch einen Winkelraum $\delta_1 < \arg z < \delta_2$ ersetzt, sofern in ihm π sinngemäss durch $\delta_2 - \delta_1$ ersetzt wird. Man braucht ja nur durch eine weitere

Transformation $z' = \alpha z^{\frac{\pi}{\delta_2 - \delta_1}}$ mit geeignetem α diesen Winkelraum auf H_z abzubilden.

13. Natürlich gibt es eine analoge Formulierung auch für den Fall, dass die Konformität der Abbildung im Unendlichen für zwei Jordانبögen aus Γ mit verschiedenen Richtungen im Unendlichen vorausgesetzt wird. Wir geben eine etwas allgemeinere Formulierung:

XII. Es seien Γ, C zwei einfach zusammenhängende Gebiete in der ζ - bzw. z -Ebene, mit je einem erreichbaren Randpunkt π_0, p_0 im Unendlichen. Wir betrachten alle Jordankurven in Γ , bzw. C mit Tangenten im Unendlichen, längs deren π_0 bzw. p_0 erreicht werden. Bei stetiger Fortsetzung der Argumente in Γ, C möge das grösste offene Intervall, das von den Grenzrichtungen solcher Kurven aus Γ im Unendlichen durchlaufen wird, (δ_1, δ_2) sein, wo $\delta_1 < \delta_2$ ist. Ebenso sei das kleinste abgeschlossene Intervall, das sämtliche Grenzrichtungen im Unendlichen solcher Kurven aus C enthält, $\langle d_1, d_2 \rangle$ mit $d_1 \leq d_2$.

Es möge nun Γ auf C so konform abgebildet werden, dass π_0 in p_0 übergeht. Wenn dann zwei Jordانبögen Λ_1, Λ_2 aus Γ mit den Richtungen φ_1, φ_2 im Unendlichen, wo $\delta_1 < \varphi_1 < \varphi_2 < \delta_2$ ist, sich im Unendlichen konform abbilden, so gilt dasselbe für jede Jordankurve Λ aus Γ mit der Richtung φ im Unendlichen, sobald $\delta_1 < \varphi < \delta_2$ ist. Die Λ in C entsprechende Kurve L hat im Unendlichen eine Richtung ψ , wo

$$(13, 1) \quad \frac{\psi - d_1}{\varphi - \delta_1} = \frac{d_2 - d_1}{\delta_2 - \delta_1} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

gilt, wenn ψ_1 bzw. ψ_2 die Richtungen der Bildkurven L_1, L_2 von Λ_1, Λ_2 im Unendlichen sind.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass $\zeta = 0$ in Γ liegt, da dies durch eine Parallelverschiebung sofort zu erreichen ist.

Es sei $\varepsilon > 0$, aber so klein gewählt, dass $\delta_1 + \varepsilon < \varphi_1 < \varphi_2 < \delta_2 - \varepsilon$ ist. Für ein ζ_0 aus Γ ist der Winkelraum $\Delta: \delta_1 + \varepsilon < \arg(\zeta - \zeta_0) < \delta_2 - \varepsilon$

ganz in Γ enthalten. Ist D das Bildgebiet von Δ in C , so kann auf die Abbildung von D auf Δ der Satz XI angewandt werden, nach der Bemerkung am Schlusse der Nr. 12, wenn man durch eine Parallelverschiebung der ζ -Ebene ζ_0 in den Nullpunkt bringt, wodurch ja die Richtungen im Unendlichen nicht verändert werden. Es folgt dabei für die der Richtung φ in C entsprechende Richtung ψ

$$(13, 2) \quad \frac{\psi - \psi_1}{\varphi - \varphi_1} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} = \tau$$

für jedes φ aus dem Intervall $(\delta_1 + \varepsilon, \delta_2 - \varepsilon)$, d. h. für jedes φ aus (δ_1, δ_2) Zugleich gilt $\psi_2 \geq \psi_1$.

Durchläuft nun φ alle Richtungen aus dem Intervall (δ_1, δ_2) , so durchläuft das vermöge (13, 2) bestimmte ψ das Intervall $(\psi_1 + \tau(\delta_1 - \varphi_1), \psi_1 + \tau(\delta_2 - \varphi_1))$ für $\psi_2 > \psi_1$ oder nimmt durchweg den einen Wert ψ_1 an, wenn $\psi_2 = \psi_1$ ist.

Wir behaupten nun, dass das Intervall

$$(13, 3) \quad \langle \psi_1 + \tau(\delta_1 - \varphi_1), \psi_1 + \tau(\delta_2 - \varphi_1) \rangle$$

mit dem Intervall $\langle d_1, d_2 \rangle$ identisch ist.

Es sei zunächst $\psi_1 = \psi_2 = \psi$. Es genügt zu zeigen, dass $d_1 = d_2$ ist. Es sei nun $d_1 < d_2$. Ist dann $d_1 < \psi < d_2$ und ist $\varepsilon > 0$ so klein, dass auch $d_1 + \varepsilon < \psi < d_2 - \varepsilon$ ist, so enthält C für ein z_1 den Winkelraum $d_1 + \varepsilon < \arg(z - z_1) \leq d_2 - \varepsilon$. Bilden wir dann diesen Winkelraum durch die logarithmische Abbildung $w = \log(z - z_1)$ auf den Parallelstreifen $S: d_1 + \varepsilon \leq \Re w \leq d_2 - \varepsilon$ ab, so gehen gewisse unendliche Teilstücke von L_1 und L_2 in zwei Jordankurven L'_1, L'_2 über, die in S liegen, gegen $+\infty$ konvergieren und den Halbstrahl $\Im w = \psi$ zur gemeinsamen Asymptote haben. Da aber nach dem Korollar c) zum Satz I in einem Halbstreifen $S^*: \Re w > u_0, d_1 + \varepsilon \leq \Re w \leq d_2 - \varepsilon, \arg \zeta$ stetig und beschränkt festlegbar ist, müsste $\arg \zeta$ nach Satz IV längs L'_1 und L'_2 die gleichen Grenzwerte haben, während seine Grenzwerte φ_1, φ_2 ja verschieden sind.

Daher kann für $d_1 < d_2$ nur $d_1 = \psi$ oder $d_2 = \psi$ sein. Es sei etwa $d_1 = \psi$. Es sei $\frac{d_1 + d_2}{2} = d$ gesetzt und es sei z_0 ein innerer Punkt von C , derart, dass der Halbstrahl $s: \arg(z - z_0) = d$ ganz in C liegt.

Nun können die Kurven L_1 und L_2 sich nicht in beliebiger Nähe des unendlich fernen Punktes schneiden, da ja $\arg \zeta$ auf beiden verschiedene Grenzwerte hat. Wir können daher durch eine Abänderung von endlichen Teilbögen dieser Kurven erreichen, dass sie beide in z_0 begin-

nen und sich nicht mehr schneiden. Es möge dann etwa L_2 zwischen s und L_1 liegen — d. h. in demjenigen der beiden von s + L_1 begrenzten Gebiete, das ein unendliches Stück des Halbstrahles $\arg(z - z_0) = \frac{d + d_1}{2}$ enthält. Es sei dieses Gebiet mit G bezeichnet. Dann ist nach

Korollar c) zum Satz I die Funktion $\arg \zeta - \varphi_1 = \Phi(z)$ in G beschränkt, Zugleich streben ihre Werte längs L_1 nach der Annahme gegen Null. Nach dem Satz IV⁹⁰⁾ gilt daher dasselbe auch für L_2 , während nach unseren Annahmen dieser Grenzwert gleich $\varphi_2 - \varphi_1 \neq 0$ sein müsste. Daher ist $\psi = d_1$ unmöglich, und genau ebenso sieht man die Unmöglichkeit von $\psi = d_2$ ein. Daher ist $d_1 < d_2$ unmöglich, und es muss $d_1 = d_2 = \psi$ sein, womit dieser Teil der Behauptung bewiesen ist.

Es sei nun $\psi_1 < \psi_2$. Wenn dann das Intervall $< d_1, d_2 >$ über das Intervall (13,3) etwa nach rechts hinausragt, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$d_1 + \varepsilon < \psi_1 + \tau(\delta_2 - \varphi_1) < d_2 - \varepsilon$$

gilt. Für ein z_0 liegt der Winkelraum $\Delta: d_1 + \varepsilon \leq \arg(z - z_0) \leq d_2 - \varepsilon$ ganz in C und wird bei unserer Abbildung auf ein Teilgebiet Γ_0 von Γ abgebildet. Dann kann auf die Abbildung von Δ auf Γ_0 der Satz XI angewandt werden (vgl. die Bemerkung am Schlusse von Nr. 12), und wir sehen, dass jeder Richtung ψ mit $d_1 + \varepsilon < \psi < d_2 - \varepsilon$ in Γ_0 eine Richtung φ entspricht, die mit ψ vermöge (13,2) zusammenhängt. Da aber das Intervall $(d_1 + \varepsilon, d_2 - \varepsilon)$ nach rechts über das Intervall (13,3) hinausragt, müsste das Intervall der vorkommenden φ -Werte nach rechts über das Intervall (δ_1, δ_3) hinausragen, entgegen der Annahme. Damit ist der Satz XII vollständig bewiesen.

Korollar. Insbesondere enthält unter der Annahmen des Satzes XI für $\delta_2 > \delta_1$ das Gebiet Γ für jedes ε mit $\tau > \varepsilon > 0$ einen in π_0 mündenden Winkelraum von der Oeffnung $(\pi - \varepsilon) \frac{\psi_2 - \psi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$ und keinen in π_0 mündenden Winkelraum von der Oeffnung $(\pi + \varepsilon) \frac{\psi_2 - \psi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$ ⁹⁰⁾. Für $\psi_2 = \psi_1$ aber enthält Γ keinen Winkelraum positiver Oeffnung, der in π_0 mündet.

14. Wenn unter den Voraussetzungen des Satzes XII $\delta_2 - \delta_1 \neq 0$ und $d_2 - d_1 \neq 0$ ist, werden wir die Abbildung von Γ auf C als *winkelproportional* im Unendlichen im Winkel bezeichnen. Für $\delta_2 - \delta_1 = d_2 - d_1 \neq 0$ handelt es sich um die *Winkeltreue* im Unendlichen im

⁹⁰⁾ Diese Behauptung findet sich unter der Voraussetzung der Existenz einer Winkelderivierten in Ahlfors (1), p. 35.

Winkel. Es liegt nun die Frage nahe, ob bei der Abbildung von Γ auf C die Winkeltreue bzw. die Winkelproportionalität für alle ∞^2 Abbildungen, bei denen π_0 in p_0 übergeht, zugleich besteht oder ob dies sehr wohl für einige unter diesen ∞^2 Abbildungen gelten kann, ohne für die anderen richtig zu bleiben. Obgleich diese Frage mit den Methoden der vorliegenden Abhandlung auch im allgemeinen Falle behandelt werden könnte, wollen wir uns hier nur auf den Fall beschränken, dass C ein Winkelraum ist. In diesem Falle gilt

XIII. Lässt sich ein einfach zusammenhängendes Gebiet Γ der ζ -Ebene mit einem erreichbaren Randpunkt π_0 im Unendlichen so auf einen Winkelraum Δ der z -Ebene konform abbilden, dass π_0 in $z = \infty$ übergeht, und ist diese Abbildung im Unendlichen im Winkel *winkelproportional*, so gilt dasselbe für jede Abbildung von Γ auf Δ , bei der π_0 in $z = \infty$ übergeht.

Denn man erhält jede der fraglichen Abbildungen von Γ auf Δ aus einer beliebigen unter ihnen, indem man diese mit einer geeigneten konformen Abbildung von Δ auf sich selbst zusammensetzt, bei der $z = \infty$ ein Fixpunkt ist. Diese letzten Abbildungen sind aber sicher winkeltreu im Unendlichen.

In denselben Gedankengang gehört auch der folgende Satz:

XIV. Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der ζ -Ebene mit einem erreichbaren Randpunkt π_0 im Unendlichen. Γ_0 sei ein Teilgebiet von Γ , das von Γ durch einen ganz im Endlichen verlaufenden Querschnitt q abgegrenzt wird und zu dessen Rand π_0 gehört. Es sei ferner Δ ein Winkelraum der z -Ebene. Man denke sich Γ und Γ_0 so konform auf Δ abgebildet, dass beide Male π_0 in $z = \infty$ übergeht. Dann können beide Abbildungen nur gleichzeitig im Unendlichen im Winkel *winkelproportional* sein.

Beweis: Bei der Abbildung von Γ auf Δ möge Γ_0 in das Teilgebiet Δ_0 von Δ übergehen, das von Δ durch einen Querschnitt q' abgegrenzt wird. Man erhält dann die gegebene Abbildung von Γ_0 auf Δ , indem man eine geeignete Abbildung von Δ_0 auf Δ ausführt, bei der $z = \infty$ invariant bleibt und die daher nach Satz X im Unendlichen winkeltreu ist. Daraus folgt die Behauptung des Satzes unmittelbar.

Man betrachte z. B. die Halbebene $\Re \zeta > 0$, aufgeschnitten längs eines Jordanbogens L , der einen Punkt ζ_1 der positiven reellen Axe mit dem unendlich fernen Punkt verbindet und im Unendlichen die positive imaginäre Axe berührt. Das so entstehende Gebiet H_L hat im Unendlichen erstens den längs der positiven reellen Axe erreichbaren Randpunkt π_0 und daneben einen zweiten unendlich entfernten Randpunkt π_1 , der längs jedes „zwischen“ L und der positiven imaginären Axe ins

Unendliche laufenden Jordanbogens erreicht wird. *Bildet man nun H_L so auf H_z ab, dass π_0 in $z = \infty$ übergeht, so ist die Abbildung im Unendlichen im Winkel winkeltreu.* Denn man verbinde ζ_1 mit dem Nullpunkt durch einen Jordanquerschnitt von H_L , der π_1 von π_0 trennt, und bezeichne das dabei abgegrenzte Teilgebiet, das an π_0 grenzt, mit H_L^0 . Dann wird H_L^0 nach dem Satz X auf H_z winkeltreu im Unendlichen abgebildet, und dasselbe gilt daher nach Satz XIV auch für H_L . Offenbar bleibt das Gesagte richtig, wenn L anstatt der positiven die negative imaginäre Axe berührt.

15. XV. *Unter den Voraussetzungen des Satzes XI gilt für jedes $\delta > 0$ für ein Punktepaar z, z' aus H_z mit $z \rightarrow \infty, z' \rightarrow \infty$ und $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, |\arg z'| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, wenn $\zeta = f(z)$ eine konforme Abbildung von Γ auf H_z vermittelt, bei der π_0 in $z = \infty$ übergeht und die Richtungen der positiven reellen Axen im Unendlichen einander entsprechen:*

$$(15,1) \quad \frac{f(z)}{f(z')} = \left(\frac{z}{z'} \right)^{\frac{\psi_2 - \psi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} + \varepsilon(z, z')},$$

wo $\varepsilon(z, z')$ gegen 0 konvergiert, wenn z und z' unter den obigen Bedingungen ins Unendliche streben³¹⁾.

Beweis: Geht man nach Anbringung geeigneter Querschnitte vermittelt der Transformationen $W = \log \zeta, w = \log z$ zum Halbstreifen S^* in der w -Ebene und zur Funktion $W = F(w) = \log f(e^w)$ über, so reduziert sich (15,1) auf

$$\frac{F(w) - F(w')}{w - w'} \rightarrow \frac{\psi_2 - \psi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}, \quad w \rightarrow \infty, w' \rightarrow \infty,$$

und dies ist mit der Formel (9,4) äquivalent.

Korollar. *Unter den Voraussetzungen des Satzes XV gilt*

$$(15,2) \quad f(z) = z^{\frac{\psi_2 - \psi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} + \varepsilon(z)},$$

³¹⁾ Der Satz wurde unter der Voraussetzung, dass $\left| \frac{z}{z'} \right|$ zwischen zwei positiven

Schranken bleibt, in Ostrowski (3) hergeleitet. Für den Fall, dass $\left| \frac{z}{z'} \right| = 1$ ist, rührt der Satz bereits von Visser, Visser (1), her.

wo $\varepsilon(z)$ gegen 0 konvergiert, wenn z im Winkelraum $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \delta > 0$, ins Unendliche strebt.

Beweis: Es genügt offenbar, in (15,1) $z' = 1$ zu setzen.

XVI. *Unter den Voraussetzungen des Satzes XV für $\psi_1 \neq \psi_2$ gilt für jedes positive δ bei geeigneter Festlegung des Arguments für $z \rightarrow \infty$ mit $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$*

$$(15,3) \quad \arg f'(z) - \arg \frac{z}{z} \rightarrow 0.$$

Insbesondere existiert bei winkeltreuer Abbildung $\lim \arg f'(z)$ im Winkel und gibt die Grenzdrehung der Ebene um den betrachteten Randpunkt an.³²⁾

Beweis: Setzt man $z = e^w$, wo w auf den Halbstreifen S^* beschränkt werden kann, und

$$(15,4) \quad \lg \zeta = \Psi(w) + i \Phi(w),$$

so gilt

$$f'(z) = (\Psi'_u + i \Phi'_u) \frac{z}{z} = (\Phi'_v + i \Phi'_u) \frac{z}{z},$$

$$\arg f'(z) - \arg \frac{z}{z} = \arg (\Phi'_v + i \Phi'_u).$$

Nach dem letzten Teil der Behauptung von VI gilt aber

$$(15,5) \quad \Phi'_u \rightarrow 0, \quad \Phi'_v \rightarrow \frac{\psi_2 - \psi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}.$$

Dieser letzte Grenzwert ist nun nach Satz XI positiv, sodass bei entsprechender Festlegung des Arguments in S^* : $\Re w < u_0, |\Im w| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$,

$$(15,6) \quad \arg (\Phi'_v + i \Phi'_u) \rightarrow 0$$

gilt, womit der Satz bewiesen ist.

Korollar. *Insbesondere besitzt $\arg f'(z)$ stets einen Grenzwert, wenn z so ins Unendliche strebt, dass $\arg z = \varphi, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ist. Die Bildkurve Λ_φ*

³²⁾ Der Satz wurde zuerst in etwas allgemeinerer Form in Ostrowski (3), pp. 116 ff., aufgestellt und bewiesen.

des Halbstrahls $\arg z = \varphi$ in der ζ -Ebene besitzt eine Tangente, deren Richtung sich stetig der Richtung der Tangente an Λ_φ im Unendlichen annähert, sodass insbesondere längs Λ_φ der Radiusvektor von einem Punkt an eine monotone Funktion der Bogenlänge wird.

16. Am Satze XI ist insbesondere hervorzuheben, dass in ihm die Winkeltreue oder Winkelproportionalität in jedem Winkel $|\arg z| \leq \varphi$, $\varphi < \frac{\pi}{2}$ aus dem entsprechenden Sachverhalt für wenigstens zwei Halb-

strahlen erschlossen wird. Eine ähnliche Tatsache lässt sich auch in bezug auf die Existenz der *Winkelderivierten* beweisen. Darunter versteht man³³⁾ unter den Voraussetzungen des Satzes XI den Grenzwert $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\zeta}{z}$, sofern dieser Grenzwert für $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ für jedes positive δ existiert. Aus dem Satze XV folgt auf jeden Fall, dass die Winkelderivierte im Falle der winkeltreuen Abbildung existiert, wenn es für irgend welche positive K und δ eine Folge von Punkten z , in H_z mit den Bildpunkten ζ , und mit

$$(16,1) \quad \frac{1}{K} \leq \left| \frac{z_{v+1}}{z_v} \right| \leq K, \quad |\arg z_v| \leq \frac{\pi}{2} - \delta,$$

gibt, derart, dass die Zahlenfolge $\left| \frac{\zeta_v}{z_v} \right|$ einen Grenzwert besitzt. Es lässt sich aber anderseits beweisen, dass die Winkelderivierte bereits existiert, wenn sie längs irgend eines Strahles $\arg z = \varphi$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ vorhanden

ist oder allgemeiner längs eines Jordanbogens, der in H_z ins Unendliche geht — ohne dass die Winkeltreue der Abbildung vorausgesetzt zu werden braucht (Wohl aber muss die Argumentschwankung in einer Umgebung von π_0 beschränkt sein). Doch soll der übrigens sehr einfache Beweis an anderer Stelle veröffentlicht werden, da von den angegebenen Tatsachen im Folgenden kein Gebrauch gemacht werden wird.

Kapitel II.

Der Hauptsatz über Winkeltreue und Winkelproportionalität am Rande

§ 4. Der konforme Winkel.

17. Es sei C ein beliebiges Kontinuum auf der ζ -Kugel und Γ irgend eines der einfach zusammenhängenden Gebiete, in die die ζ -Ku-

³³⁾ vgl. Carathéodory (3).

gel durch C zerlegt wird. Es sei ω ein Punkt aus Γ und γ ein Randstück von Γ , das also ein Teil von C ist. Bildet man Γ so auf den Einheitskreis $E_z: |z| < 1$ ab, dass dabei ω in $z=0$ übergeht, so wird die Länge des Bildes γ von γ als *das konforme Mass*³⁴⁾ von γ oder als *der konforme Winkel*³⁵⁾ bezeichnet, unter dem γ von ω aus innerhalb Γ gesehen wird. Wir schreiben dafür $m_{\Gamma, \omega} \gamma$ oder auch mit Hrn. Warschawski³⁶⁾ $m_{C, \omega} \gamma$.

Ist γ eine Randpunktmenge von Γ , der bei der obigen konformen Abbildung auf E_z eine messbare Menge γ entspricht, so ist unter $m_{\Gamma, \omega} \gamma$ das Mass von γ zu verstehen, und γ heisst *messbar in Γ* . Ist $m_{\Gamma, \omega} \gamma = 0$, so heisst γ eine *Nullmenge in Γ* . Es ist leicht zu sehen, dass die Eigenschaft von γ , messbar oder eine Nullmenge in Γ zu sein, von der Wahl von ω unabhängig ist. In der Tat entspricht ja einer Transformation des Einheitskreises in sich, bei der der Nullpunkt geändert wird, eine Transformation der Peripherie des Einheitskreises, die analytisch ist und daher weder an der Messbarkeit einer Menge noch an ihrer Eigenschaft, eine Nullmenge zu sein, etwas ändert.

Zur Beurteilung der Messbarkeit einer Randpunktmenge von Γ ist der folgende Satz gelegentlich wichtig:

XVII. Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der ζ -Ebene mit wenigstens zwei Randpunkten und K eine offene oder abgeschlossene Punktmenge. Dann ist die Gesamtheit M der Randpunkte von Γ , die in K liegen, stets messbar in bezug auf Γ , und ihr Mass ist insbesondere positiv, wenn K offen ist und überhaupt Randpunkte von Γ enthält.

Beweis: Wir beweisen den Satz zuerst für den Fall, dass K eine offene Kreisscheibe $|\zeta - \zeta_0| < \sigma$, $\sigma > 0$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\zeta_0 = 0$ und $\sigma = 1$ annehmen.

Man bilde Γ durch $\zeta = f(z)$ konform auf den Einheitskreis E_z der z -Ebene ab. Dann entsprechen den Peripheriepunkten von E_z bis auf eine Nullmenge N erreichbare Randpunkte von Γ , und die Funktion $|f(e^{i\theta})|$ ist auf einer massgleichen Teilmenge des Intervalls $(0, 2\pi)$

messbar, als Grenzfunktion der Folge $\left| f \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right) e^{i\theta} \right) \right|$ von stetigen

³⁴⁾ vgl. Warschawski (1), p. 339.

³⁵⁾ Hr. R. Nevanlinna spricht in Nevanlinna (1), p. 103, vom *Winkel-mass*, und in weiteren Abhandlungen (2), (3), (4) vom *harmonischen Mass*. In den zitierten Abhandlungen wird das konforme Mass auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete definiert. Wir beschränken uns in dieser Abhandlung durchweg auf den Fall einfach zusammenhängender Gebiete.

³⁶⁾ vgl. Warschawski (1), p. 339.

Funktionen von \mathfrak{D}^{37}). Daher ist nach der Definition der Messbarkeit die Teilmenge des Intervalls $(0, 2\pi)$, auf der $|f(e^{i\theta})| < 1$ gilt, sicher messbar. Dass aber die Menge der \mathfrak{D} mit $|f(e^{i\theta})| < 1$ positives Mass hat, wenn sie nicht leer ist, ist der Inhalt eines Satzes, den wir vor einigen Jahren bewiesen haben³⁸⁾.

Damit ist der Satz XVII in dem Falle, dass K eine offene Kreisscheibe ist, bewiesen.

Es sei nun K eine beliebige offene Punktmenge. Dann lässt sich K überdecken durch die Vereinigungsmenge von abzählbar vielen offenen Kreisscheiben K_v , $v = 1, 2, \dots$, die alle in K enthalten sind. Ist nun allgemein M_v die Menge der Randpunkte von Γ_v , die in K liegen, so gilt

$M = \bigcup_{v=1}^{\infty} M_v$. Analoges gilt für Bildpunktmenge μ von M auf der Peripherie des Einheitskreises, woraus die Messbarkeit von μ und daher von M sofort folgt. Enthält aber K einen Randpunkt von Γ , so ist ein Randpunkt von Γ in einem K_v enthalten, so dass dann das Mass eines der M_v sicher positiv ist, und dasselbe gilt erst recht für M .

Ist endlich K eine abgeschlossene Punktmenge, so lässt sie sich als Durchschnitt einer Folge von in einander geschachtelten offenen Punktfolgen $K^{(v)}$ darstellen. Daher ist dann die Bildmenge μ von M auf der Peripherie des Einheitskreises ein Durchschnitt einer Folge von messbaren Mengen und daher auch selbst messbar, w. z. b. w.³⁹⁾.

Ist $\bar{\gamma}$ die zu γ komplementäre Randpunktmenge von Γ , so gilt offenbar

$$(17, 1) \quad m_{\Gamma, \omega} \gamma + m_{\Gamma, \omega} \bar{\gamma} = 2\pi.$$

Offenbar ist $m_{\Gamma, \omega} \gamma$ insofern eine Invariante bei konformer Abbildung, als, wenn bei einer konformen Abbildung von Γ auf Γ_1 ω in ω_1 und γ in γ_1 übergeht, dann

³⁷⁾ Es folgt dies unmittelbar aus dem bekannten Satze von Fatou, den in diesem Zusammenhang zuerst Carathéodory zur Geltung gebracht hat.

³⁸⁾ Ostrowski (2), pp. 251, 252. Ein anderer Beweis dieses Satzes soll an anderer Stelle veröffentlicht werden.

³⁹⁾ Es sei hier noch eine einfache Verallgemeinerung des Satzes XVII vermerkt, die aus der obigen Fassung unmittelbar folgt. Wendet man auf abzählbar viele offene und abgeschlossene ebene Punktfolgen endlich oder abzählbar oft die Operationen der Addition, der Differenzbildung und der Durchschnittsbildung an, so ergeben sich die allgemeinsten ebenen sogenannten B-Mengen. Wendet man aber solche Prozesse auf messbare Mengen an, so entstehen wiederum messbare Mengen. Daher kann K im Satz XVII als eine beliebige ebene B-Menge vorausgesetzt werden.

(17, 2)

$$m_{\Gamma, \omega} \gamma = m_{\Gamma_1, \omega_1} \gamma_1$$

gilt.

Ist $P_z(z)$ die in E_z harmonische und beschränkte Funktion, die im Sinne der in der Nr. 9 gegebenen Definition auf z fast überall gleich 1 und auf der komplementären Randmenge fast überall gleich 0 ist, so folgt aus dem Gaussischen Mittelwertsatz, dass $P_z(0) = \frac{1}{2\pi} m_{\Gamma, \omega} \gamma$ ist.

Auf der ζ -Kugel entspricht $P_z(z)$ eine in Γ harmonische und beschränkte Funktion $P_{\Gamma, \gamma}(\zeta)$, deren Wert in ω gleich $\frac{1}{2\pi} m_{\Gamma, \omega} \gamma$ ist. $P_{\Gamma, \gamma}(\zeta)$ ist dadurch charakterisiert, dass sie eine in Γ beschränkte harmonische Funktion ist, deren Randwerte in den erreichbaren Punkten von γ gleich 1 und in denen von $\bar{\gamma}$ gleich 0 sind, natürlich von je einer Nullmenge abgesehen. Dies folgt leicht nach dem Fatouschen Satze über das Poissonsche Integral aus dem Satze von Hrn. Carathéodory, wonach die Bilder erreichbarer Punkte von $\gamma + \bar{\gamma}$ die Peripherie von E_z bis auf eine Nullmenge ausfüllen. Wir nennen $P_{\Gamma, \gamma}(\zeta)$ das charakteristische Potential von γ in Γ .

Es sei nun $f(\zeta)$ eine in Γ reguläre Funktion, für die in Γ $|f(\zeta)| \leq 1$ ist und deren absolute Beträge bei Annäherung an γ bis auf eine Nullmenge in der Grenze $\leq \epsilon$, $\epsilon > 0$, bleiben⁴⁰⁾. Geht man dann zum Einheitskreis E_z in der z -Ebene über, so folgt bekanntlich aus der Jensenschen Ungleichung für den Wert der entsprechenden Funktion im Nullpunkt, d. h. für $f(\omega)$, die Abschätzung

$$|f(\omega)| \leq \frac{1}{\epsilon} m_{\Gamma, \omega} \gamma.$$

Zugleich wird in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen (für $\epsilon = \frac{1}{e}$) für diejenige in Γ reguläre und nicht verschwindende Funktion

$F(\zeta)$ erreicht, für die $\Re \log F(\zeta)$ gleich dem um 1 verminderten charakteristischen Potential von γ in Γ ist. Daher kann $m_{\Gamma, \omega} \gamma$ auch als die grösste positive Zahl m charakterisiert werden, derart, dass für jede in Γ reguläre Funktion $f(\zeta)$ mit $|f(\zeta)| \leq 1$, für die bei Annäherung an

⁴⁰⁾ Dabei sind die Grenzwerte im Sinne der Nr. 9 zu verstehen, so dass die in den betreffenden Randpunkt mündenden Kurven, längs deren die Randwerte angenommen werden, erst mit Hilfe der Abbildung auf den Einheitskreis zu charakterisieren sind. Die hierin bei gleichzeitiger Betrachtung verschiedener Gebiete steckende Schwierigkeit wird im Folgenden mit Hilfe des Korollars zum Satz VI' sowie allgemeiner mit Hilfe des Satzes XXV' überwunden.

die Punkte von γ bis auf eine Nullmenge der $\overline{\text{Lim}}$ des absoluten Betrages $\leq \varepsilon$ bleibt, $|f(\omega)| \leq \varepsilon^{\frac{m}{2\pi}}$ ist⁴¹⁾.

XVIII. Es sei g eine Gerade, ω ein Punkt ausserhalb g und s eine Strecke auf g , die sich auch ins Unendliche erstrecken darf und von ω aus unter dem Winkel α erscheint. Dann gilt

$$(17.3) \quad m_{g,\omega} s = 2\alpha.$$

Beweis: Man darf annehmen, dass einer der Endpunkte von s der Fusspunkt q des von ω auf g gefällten Lotes ist, da man jede Strecke s aus zwei Strecken mit dieser Eigenschaft durch Addition oder Subtraktion zusammensetzen kann. Ist dann p der andere Endpunkt von s , so lege man durch ω und p einen auf g orthogonalen Halbkreis und ziehe die Tangenten an diesen Halbkreis in p und ω bis zu ihrem Schnittpunkt in t . (Vgl. Fig. 1). Dann hat man nur zu zeigen, dass der Winkel $t\omega p$ gleich α ist. Nun gilt aber $\angle t\omega p = \angle tp\omega = \angle p\omega q = \alpha$, da tp und $q\omega$ parallel sind.

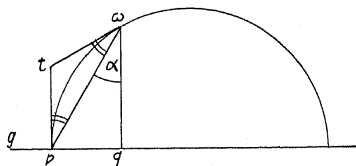


Fig. 1.

Ist insbesondere s ein in einem Punkte ζ_0 auf g beginnender Halbstrahl, so ist $\pi - \alpha$ der Winkel zwischen $\omega\zeta_0$ und s , sodass also der Halbstrahl h_α , der bis auf seinen Anfangspunkt ζ_0 in einer durch g begrenzten Halbebene H verläuft und mit s den Winkel $\pi - \alpha$ bildet, der geometrische Ort der Punkte ist, von denen aus s in bezug auf H unter dem konformen Winkel 2α erscheint.

Bildet man nun H auf einen Kreis k_z der z -Ebene ab, sodass s in einen Kreisbogen γ übergeht, so geht h_α in einen in k_z verlaufenden Kreisbogen η_α über, der die Endpunkte von γ verbindet und in diesen Punkten mit s den Winkel $\pi - \alpha$ bildet. η_α ist dann der geometrische Ort der Punkte, von denen aus γ in bezug auf k_z unter dem konformen Winkel 2α erscheint. Hier kann k_z auch eine Halbebene sein.

⁴¹⁾ Man findet derartige Ungleichungen für verschiedene spezielle Gebiete ausführlich behandelt in Julia (1) und (2).

18. Wir betrachten nun die konformen Winkel noch für drei weitere wichtige Konfigurationen.

XIX. Es sei R_α ein Winkelraum mit der Winkelöffnung $2\sigma\pi$, dem Scheitel 0 und den Schenkeln s_1, s_2 . Dann ist der geometrische Ort der Punkte, von denen aus s_1 in bezug auf R_α unter dem konformen Winkel α erscheint, der in 0 beginnende, in R_α verlaufende Halbstrahl, der mit s_2 den Winkel $\sigma\alpha$ bildet. — Auf diesem Halbstrahl ist also das charakteristische Potential von s_1 in R_α gleich $\frac{\alpha}{2\pi}$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass R_α mit dem Winkelraum $0 < \arg \zeta < 2\sigma\pi$ identisch und s_1 der Halbstrahl $\arg \zeta = 2\sigma\pi$ ist.

Durch die Transformation $z = \zeta^{\frac{1}{2\sigma}}$ wird dann R_α in die Halbebene $\Im z > 0$ und s_1 in die negative reelle Axe übergeführt. Die Punkte ζ mit $\arg \zeta = \sigma\alpha$ gehen dann in die Punkte mit $\arg z = \frac{\alpha}{2}$ über, woraus die Behauptung nach dem oben Gesagten ohne weiteres folgt.

Korollar 1 zu Satz XIX. Es sei S_α ein Kreisbogenzweieck, dessen Winkel gleich $2\sigma\pi$ sind, und s_1, s_2 seien seine Seiten. Dann ist der geometrische Ort der Punkte, von denen aus s_1 in bezug auf S_α unter dem konformen Winkel α erscheint, der die beiden Eckpunkte von S_α verbindende und in S_α verlaufende Kreisbogen, der mit s_2 den Winkel $\sigma\alpha$ bildet.

Zum Beweis braucht man nur S_α auf R_α konform abzubilden, indem der eine Eckpunkt in $z=0$ und der andere in $z=\infty$ übergeführt wird. Bildet man R_α logarithmisch auf einen Parallelstreifen ab, so ergibt sich weiter:

Korollar 2 zu Satz XIX. Es sei S ein Parallelstreifen, dessen beide Grenzgeraden s_1, s_2 den Abstand a haben. Der geometrische Ort der Punkte, von denen aus s_1 unter dem konformen Winkel α in bezug auf S erscheint, ist die in S verlaufende, zu s_1 und s_2 parallele Gerade, die von s_2 den Abstand $\frac{\alpha}{2\pi}a$ hat.

— Es sei $H^{(\rho)}$ das Gebiet $\Im z > 0, |z| > \rho$, das also von zwei Halbstrahlen der reellen Axe und der oberen Hälfte k'_ρ der Kreislinie $|z| = \rho$ begrenzt wird. ω sei ein Punkt von $H^{(\rho)}$ mit $|\omega| = d > \rho$. Wir wollen nun $m_{H^{(\rho)}, \omega} k'_\rho$ abschätzen.

Zu dem Zwecke bilde man $H^{(\rho)}$ durch

$$(18,1) \quad \zeta = \frac{z - \rho}{z + \rho}$$

auf den Winkelraum $R = R_1: 0 < \arg \zeta < \frac{\pi}{2}$, wobei k'_ρ in die positive imaginäre Axe $l: \arg \zeta = \frac{\pi}{2}$ übergeht. Dann ist nach XIX

$$(18,2) \quad m_{R, \zeta} l = 4 \arg \zeta.$$

Nun durchlaufen die Bilder der Punkte ω mit $|\omega| = d$ den Halbkreis k , der auf der positiven reellen Axe senkrecht steht und sie in den Punkten

$$(18,3) \quad \frac{d - \rho}{d + \rho}, \frac{d + \rho}{d - \rho}$$

trifft. Daraus folgt, dass der Mittelpunkt von k der Punkt

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d - \rho}{d + \rho} + \frac{d + \rho}{d - \rho} \right) = \frac{d^2 + \rho^2}{d^2 - \rho^2}$$

ist und der Radius die Länge

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d + \rho}{d - \rho} - \frac{d - \rho}{d + \rho} \right) = \frac{2 d \rho}{d^2 - \rho^2}$$

hat. Der nach einem Punkte von k gezogene Radiusvektor bildet nun den maximalen Winkel mit der positiven reellen Axe, wenn er k berührt.

Dieser maximale Winkel ist dann offenbar

$$(18,4) \quad \arcsin \left(\frac{2 d \rho}{d^2 - \rho^2} / \frac{d^2 + \rho^2}{d^2 - \rho^2} \right) = \arcsin \frac{2 d \rho}{d^2 + \rho^2},$$

und der zugehörige Berührungspunkt liegt auf dem Einheitskreis $|\zeta| = 1$, da das Produkt der Zahlen (18,3) gleich 1 ist, sodass k den Einheitskreis orthogonal schneidet. Dem Einheitskreis $|\zeta| = 1$ entspricht aber in der z -Ebene vermöge unserer Abbildung die imaginäre Axe, sodass das zugehörige ω gleich id sein muss⁴³⁾. Wegen (18,2) folgt daher

XX. Für jeden Punkt ω von $H^{(a)}$ gilt

$$(18,5) \quad m_{H^{(a)}, \omega} k'_\rho \leq 4 \arcsin \frac{2 |\omega| \rho}{|\omega|^2 + \rho^2}.$$

⁴³⁾ vgl. für diese Transformation Bieberbach (1), pp. 135 — 136.

wobei das Gleichheitszeichen nur für die Punkte auf der positiven imaginären Axe richtig ist.

Aus XX ergibt sich aber weiter:

XXI. Es sei E_ρ für $\rho > 0$ das längs des Halbstrahles $(-\infty, -\rho >)$ aufgeschnittene Aeussere der Kreislinie $k_\rho: |z| = \rho$ und ω ein Punkt von E_ρ . Dann gilt

$$(18,6) \quad m_{E_\rho, \omega} k_\rho \leq 4 \arcsin \frac{2 \sqrt{\rho |\omega|}}{\rho + \omega},$$

wo das Gleichheitszeichen nur für reelle $\omega > \rho$ richtig ist.

Denn durch die Transformation $z' = \sqrt{z}$ geht E_ρ in $-iH(\sqrt{\rho})$ über und ω in $\sqrt{\omega}$. Wendet man darauf den Satz XX an, so ergibt sich (18,6).

19. Die Betrachtung des charakteristischen Potentials liefert ein gelegentlich sehr brauchbares Kriterium für die Winkelproportionalität bei konformer Abbildung.

XXII. Es sei Γ ein Gebiet in der ζ -Ebene, mit einem erreichbaren Randpunkt τ_0 im Unendlichen und γ einer der beiden in τ_0 zusammenstossenden Randzweige⁴³⁾. Damit eine Abbildung von Γ auf H_z ⁴⁴⁾, bei der τ_0 in $z = \infty$ übergeht, im Unendlichen winkelpropional im Winkel ist, ist notwendig, dass das charakteristische Potential $P_{\Gamma, \gamma}(\zeta)$ auf jedem in Γ liegenden, in τ_0 mündenden Jordanbogen L mit einer Richtung φ im Unendlichen einen Grenzwert hat, der eine lineare Funktion von φ ist, und hinreichend, dass wenigstens längs zweier solcher Jordanbögen L_1, L_2 mit verschiedenen Richtungen φ_1, φ_2 im Unendlichen Grenzwerte von $P_{\Gamma, \gamma}(\zeta)$ existieren.

Beweis: Man bilde Γ konform auf H_z ab, sodass τ_0 in $z = \infty$ und γ in die positive oder negative imaginäre Axe übergeht. Ist dies etwa die positive imaginäre Axe, so geht $P_{\Gamma, \gamma}(\zeta)$ in $\frac{1}{\pi} \arg z + \frac{1}{2}$ über, wo-

raus die als notwendig angegebene Bedingung ohne weiteres für diejenigen φ folgt, die im offenen Richtungsintervall der Bögen L liegen, und dann natürlich auch für die Endpunkte dieses Intervalls, denen ja die beiden Richtungen der imaginären Axe entsprechen müssen.

Ist andererseits die oben als hinreichend angegebene Bedingung erfüllt, so kann man annehmen, dass L_1, L_2 den gleichen Anfangspunkt haben und sich nicht mehr treffen. Das „zwischen“ L_1, L_2 enthaltene Teilgebiet Γ_0 von Γ bildet sich dann auf ein Teilgebiet G_0 von H_z ab,

⁴³⁾ Es kommt dabei auf die Wahl des Anfangspunktes von γ nicht an.

⁴⁴⁾ Unter H_z wird hier wie überall im Text die rechte z -Halbebene verstanden.

und es folgt aus den Annahmen durch zweimalige Anwendung des Satzes X, dass die Abbildung von Γ_0 auf G_0 im Unendlichen winkelparportional ist. Daher gibt es in Γ_0 und damit in Γ zwei ins Unendliche verlaufende Jordanbögen L'_1, L'_2 , die im Unendlichen verschiedene Richtungen φ'_1, φ'_2 besitzen und für die φ'_1, φ'_2 im offenen Intervall (φ_1, φ_2) liegen. L'_1, L'_2 bilden sich aber im Unendlichen konform ab, woraus die Behauptung des Satzes nach Satz XI sofort folgt.

Daraus lässt sich leicht der folgende Satz herleiten:

XXIII. Es sei g ein einfach zusammenhängendes Gebiet der ζ -Ebene mit einem Randpunkt π_0 im Unendlichen, der längs einer in g verlaufenden Jordankurve Λ erreicht wird. G sei ein einfach zusammenhängendes, g enthaltendes Gebiet, dessen Rand den unendlich fernen Punkt enthält. Der längs Λ erreichbare unendlich ferne Randpunkt von G sei gleichfalls mit π_0 bezeichnet. Die konformen Abbildungen von g und G auf H_z , bei denen π_0 in $z = \infty$ übergeht, mögen im Unendlichen im Winkel winkeltreu sein.

Ist dann Γ ein in G enthaltenes und g enthaltendes einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist jede Abbildung von Γ auf H_z , bei der der längs Λ erreichbare unendlich ferne Randpunkt π_0 in $z = \infty$ übergeht, im Unendlichen im Winkel winkeltreu.

Beweis: Man kann annehmen, dass G die rechte Halbebene H_z^+ ist, da man sonst die ganze Konfiguration der entsprechenden vorbereiteten Transformation unterwerfen kann. Ferner kann angenommen werden, dass ein Randpunkt von Γ auf der positiven reellen Axe liegt. Denn liegt ein Randpunkt von Γ in H_z^- , so ist dies durch eine Parallelverschiebung parallel zur imaginären Axe sofort zu erreichen, sonst aber ist Γ mit H_z^- identisch.

Andererseits muss dann nach der am Schlusse von Nr. 13 aus dem Satz XII gefolgerten Tatsache g für jedes $\varepsilon > 0$ einen Winkelraum von der Öffnung $\pi - \varepsilon$ enthalten. Daraus folgt aber, dass man in H_z^+ zwei in einem Punkt ζ_0 der positiven reellen Axe beginnende und in bezug auf die reelle Axe symmetrische Jordanbögen L, L' finden kann, derart, dass *erstens* L bis auf ζ_0 innerhalb des ersten Quadranten ins Unendliche verläuft und dort die positive imaginäre Axe berührt und *zweitens* kein Randpunkt von g rechts von und auf der Kurve $L + L'$ liegt. Daher liegt auch der Rand von Γ zwischen der imaginären Axe und $L + L'$. Das Gebiet rechts von $L + L'$ sei mit g^* bezeichnet.

Man gehe nun von ζ_0 längs der reellen Axe nach links bis zum ersten Randpunkt $\zeta_1 > 0$ von Γ und bezeichne die Strecke $\zeta_0 \zeta_1$ mit s . ζ_1 trennt zusammen mit π_0 den Rand von Γ in zwei Stücke γ und γ_1 . Bei jeder Abbildung von Γ auf H_z , bei der ζ_1 in $z = 0$ und π_0 in $z = \infty$

übergeht, entspricht ein fester der Zweige γ, γ_1 , etwa γ , der positiven reellen Axe und der andere der negativen. Es sei $P(\zeta)$ das charakteristische Potential von γ in Γ . Um zu beweisen, dass $P(\zeta)$ längs der Halbsstrahlen $\arg \zeta = \varphi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ gegen $\frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{2}$ konvergiert, betrachte

man die beiden Gebiete Γ^+ bzw. Γ^- , die von $\gamma_1 + s + L$ bzw. $\gamma + s + L'$ begrenzt sind und je ein unendliches Stück der positiven reellen Axe enthalten. Ebenso sei H^+ bzw. H^- die längs $L + s$ bzw. $L' + s$ aufgeschnittene Halbebene H_z^+ . Offenbar ist

$$H^+ \supset \Gamma^+ \supset g^*, H^- \supset \Gamma^- \supset g^*.$$

$P^+(\zeta)$ sei das charakteristische Potential der beiden Ufer von $L + s$ in H^+ und $P^-(\zeta)$ das charakteristische Potential der beiden Ufer von $L' + s$ in H^- .

Dann gilt in g^*

$$(19,1) \quad 1 - P^-(\zeta) \leq P(\zeta) \leq P^+(\zeta).$$

Denn $P^+(\zeta) - P(\zeta)$ ist ≥ 0 auf $s + L$, da dort $P^+(\zeta) = 1$ ist, und ≥ 0 auf γ_1 , da dort $P(\zeta) = 0$ gilt. Daher gilt in Γ^+ und erst recht in g^* $P^+(\zeta) - P(\zeta) \geq 0$, und genau ebenso folgt $1 - P^-(\zeta) \leq P(\zeta)$ (in g^*).

Aus (19,1) folgt aber die Behauptung sofort, da sowohl $P^+(\zeta)$ als auch $1 - P^-(\zeta)$ mit $\arg \zeta \rightarrow \varphi$ in g^* gegen $\frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{2}$ konvergieren. Es folgt dies nach dem am Schlusse von Nr. 14 bei der Besprechung des dort angegebenen Beispiels Gesagten unmittelbar aus dem Satz XXII. Damit ist der Satz XXIII bewiesen.

Aus dem Satz XXIII folgt sofort der kürzlich von Hrn. J. Wolff⁴⁵⁾ gefundene und nach einer ganz anderen Methode bewiesene Satz wonach, wenn der Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes Γ mit einem erreichbaren Randpunkt π_0 im Unendlichen dort eine W -Tangente im Sinne der am Schlusse der Nr. 5 besprochenen Definition besitzt, jede konforme Abbildung von Γ auf H_z , die π_0 in $z = \infty$ überführt, im Unendlichen im Winkel winkeltreu ist. Umgekehrt lässt sich der Satz XXIII aus diesem Wolffschen Satz sofort folgern, sobald man G als H_z angenommen hat. Doch ergeben sich beide Sätze aus dem Hauptsatz über Winkelproportionalität am Rande bei konformer Abbildung, den wir in § 6 beweisen werden, ohne weiteres.

⁴⁵⁾ Wolff (2), (3).

§ 5. Ungleichungen für konforme Masse.

20. Im Folgenden werden für uns gewisse Abschätzungen wichtig sein, die für die konformen Masse unter relativ geringen Annahmen über das Gebiet gelten. Das erste und wichtigste Resultat in dieser Richtung ist das *Löwner — Montelsche Lemma*.

XXIV. Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und Γ^* ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet von Γ , das mit Γ eine in Γ und Γ^* messbare Menge γ erreichbarer Randpunkte gemeinsam hat. Ist dann ω ein innerer Punkt von Γ^* , so gilt

$$(20,1) \quad m_{\Gamma^*, \omega} \gamma \geq m_{\Gamma^*, \omega} \gamma.$$

Man kann diesen Satz so interpretieren: Es seien γ_1 bzw. γ_1^* die zu γ komplementären Randpunktmengen von Γ bzw. Γ^* . Dann wird γ_1 durch γ_1^* vom Punkte ω gewissermassen „abgeschirmt“ und γ_1^* liegt (im Sinne der konformen Abbildung) „näher“ an ω als γ_1 , sodass γ_1^* daher von ω aus unter „grösserem“ konformem Winkel gesehen wird als γ_1 , woraus (20.1) wegen (17.1) folgt.⁴⁶⁾

Beweis des Satzes XXIV. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann Γ als das Innere des Einheitskreises der z -Ebene und ω als der Punkt $z=0$ angenommen werden. Es sei (20.1) falsch, sodass

$$(20,2) \quad d = m_{\Gamma^*, 0} \gamma - m_{\Gamma, 0} \gamma > 0$$

ist. Die Menge γ lässt sich bekanntlich durch eine Vereinigungsmenge von punktfremden offenen Intervallen $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ auf dem Einheitskreis überdecken, sodass, wenn allgemein die Länge des Kreisbogens α_i wieder mit α_i bezeichnet wird,

$$(20,3) \quad d > \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i - m_{\Gamma, 0} \gamma > 0$$

ist. Es sei nun die in α_i liegende Teilmenge von γ mit δ_i bezeichnet. δ_i ist nicht nur in bezug auf Γ messbar, sondern auch in bezug auf Γ^* . Denn ist α_i die durch die Endpunkte von α_i hindurchgehende, auf dem

⁴⁶⁾ Der Satz wurde zuerst für den Fall, dass γ ein Randbogen ist, in Löwner (1), p. 112 und Montel (1), pp. 31 — 32 (Fussnote) bewiesen. Für weitere Beweise und Umformungen vgl. Bieberbach (1), pp. 121 — 122, sowie Warschawski (1) pp. 338 ff. Im allgemeinsten Fall ist (20.1) möglicherweise in Nevanlinna (4) enthalten. Doch ist uns diese Abhandlung beim Abschluss des Manuskripts nur aus dem Referat im Zentralblatt für Mathematik, 12 (1935), pp. 78—79 bekannt geworden.

Einheitskreis senkrecht stehende Kreislinie, so ist die Menge der innerhalb α_i liegenden Randpunkte von Γ^* nach dem Satz XVII messbar in bezug auf Γ^* und δ_i ist ihr Durchschnitt mit der als messbar vorausgesetzten Menge γ .

Es gilt nun wegen (20,2) und (20,3)

$$m_{\Gamma^*, 0} \gamma = \sum_{i=1}^{\infty} m_{\Gamma^*, 0} \delta_i, \\ \sum_{i=1}^{\infty} (m_{\Gamma^*, 0} \delta_i - \alpha_i) > 0,$$

sodass es daher einen offenen Kreisbogen α auf dem Einheitskreis und eine in α liegende messbare Randpunktmenge δ von Γ^* gibt, für die

$$(20,4) \quad m_{\Gamma^*, 0} \delta > \alpha$$

gilt. Es sei nun $P(z)$ das charakteristische Potential von α in bezug auf den Einheitskreis. In jedem Punkt von δ , der ja im Innern von α liegt, ist dann $P(z)=1$ für *allseitige* Annäherung aus dem Innern des Einheitskreises und daher erst recht für allseitige Annäherung aus dem Innern von Γ^* . Es sei $P^*(z)$ das charakteristische Potential von δ in Γ^* . In den Punkten von δ gilt sicher, wenn z aus dem Innern von Γ^* gegen diese Punkte strebt,

$$\lim (P(z) - P^*(z)) \geq 0,$$

da $P^*(z) \leq 1$ ist. In den Punkten der zu δ komplementären Randpunktmenge $\bar{\delta}$ von Γ^* ist aber bis auf eine Nullmenge (in bezug auf Γ^*) $\lim P^*(z)=0$, sodass auch auf $\bar{\delta}$ $\lim (P(z) - P^*(z)) \geq 0$ ist, bis auf eine Nullmenge in bezug auf Γ^* . Daher gilt in Γ^* durchweg $P(z) \geq P^*(z)$ ⁴⁷⁾, und damit auch $P(0) \geq P^*(0)$, $m_{\Gamma, 0} \alpha = \alpha \geq m_{\Gamma^*, 0} \delta$, entgegen (20,4). Damit ist der Satz XXIV bewiesen.

In der Relation (20,1) gilt selbstverständlich das Gleichheitszeichen, wenn Γ mit Γ^* identisch ist. Aus dem Satz XVII folgt nun, dass dort sonst, wenn γ keine Nullmenge in Γ ist, das Grösserzeichen gilt. Denn es sei $P^*(z)$ das charakteristische Potential von γ in Γ^* und $P(z)$ dasjenige von γ in Γ . Dann gilt nach (20,1) sicher in Γ^* : $P^*(z) \leq P(z)$, und,

⁴⁷⁾ denn wenn ein in einem einfach zusammenhängenden Gebiete gleichmässig beschränktes Potential am Rande bis auf eine Nullmenge nicht negativen \lim hat, ist es im Innern nicht negativ. Es folgt dies daraus, dass ein solches Potential nach Übergang zum Einheitskreis durch das Poissonsche Integral darstellbar ist.

um zu zeigen, dass $P^*(z)$ in Γ^* überall kleiner als $P(z)$ ist, genügt es, einen Randpunkt von Γ^* innerhalb Γ nachzuweisen, in dem $P(z) - P^*(z)$ nicht verschwindet. Nun ist $P(z)$ innerhalb Γ stetig und positiv, nach der Annahme, dass $m_{\Gamma,0}\gamma > 0$ ist. Ist aber D^* die Menge der Randpunkte von Γ^* , die innerhalb Γ liegen, so ist ja ihr Mass in Γ^* nach XVII positiv, und es gibt daher auf ihr sicher einen Punkt, in dem $P^*(z)$ längs eines geeigneten Weges gegen 0 strebt. Daher kann $P(z) - P^*(z)$ innerhalb Γ^* nicht durchweg verschwinden.

Andererseits kann man auch eine gelegentlich bequem zu benutzende Schranke für die Differenz $m_{\Gamma,\omega}\gamma - m_{\Gamma^*,\omega}\gamma$ angeben. Wir bezeichnen zu dem Zwecke mit D die Randpunktmenge von Γ , die ausserhalb Γ^* , und mit D^* , wie oben, die Randpunktmenge von Γ^* , die innerhalb Γ liegt. Es sei ferner für den Augenblick die Menge der Γ und Γ^* gemeinsamen Randpunkte, die nicht in γ enthalten sind, mit γ_0 bezeichnet. Dann gilt, da auch $m_{\Gamma,\omega}\gamma_0 - m_{\Gamma^*,\omega}\gamma_0 \geq 0$ ist, nach (17,1)

$$\begin{aligned} m_{\Gamma,\omega}\gamma - m_{\Gamma^*,\omega}\gamma &\leq m_{\Gamma,\omega}(\gamma + \gamma_0) - m_{\Gamma^*,\omega}(\gamma + \gamma_0) = \\ &= m_{\Gamma^*,\omega}D^* - m_{\Gamma,\omega}D \leq m_{\Gamma^*,\omega}D^*. \end{aligned}$$

Wir fassen das Resultat im Satz zusammen:

XXV. Unter den Voraussetzungen des Satzes XXIV sei Γ^* von Γ verschieden und γ in Γ keine Nullmenge. Dann gilt, wenn D^* die Randpunktmenge von Γ^* innerhalb Γ und D die Randpunktmenge von Γ ausserhalb Γ^* bezeichnet:

$$(20,5) \quad 0 < m_{\Gamma,\omega}\gamma - m_{\Gamma^*,\omega}\gamma \leq m_{\Gamma^*,\omega}D^* - m_{\Gamma,\omega}D \leq m_{\Gamma^*,\omega}D^*.$$

In der obigen Formulierung der Sätze XXIV und XXV wurde die Messbarkeit von γ explizite in Γ und Γ^* vorausgesetzt. Man kann nun beweisen, dass aus der Messbarkeit von γ in Γ dasselbe auch in Γ^* folgt.

XXV'. Wird unter den Voraussetzungen des Satzes XXIV über die Menge γ nur vorausgesetzt, dass sie in bezug auf Γ messbar ist, so ist γ auch in bezug auf Γ^* messbar.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf Γ als die Halbebene $\Im z > 0$ vorausgesetzt werden. Ist γ nicht beschränkt, so sei γ_1 die Gesamtheit der Punkte von γ , die im Intervall $\langle -1, 1 \rangle$ liegen, γ_2 die komplementäre Menge zu γ_1 in bezug auf γ . γ_1 (und damit auch γ_2) ist nach Satz XVII messbar, da γ_1 der Durchschnitt von γ mit einer abgeschlossenen Menge ist. Es genügt, den Satz für γ_1 zu beweisen, da durch die Transformation $z' = \frac{1}{z}$ γ_2 ins Innere des Intervalls

$\langle -1, 1 \rangle$ gebracht wird. Wir können daher von vornherein annehmen, dass γ in $\langle -1, 1 \rangle$ liegt.

Ist nun R ein Intervall auf der reellen Axe, so ist die Gesamtheit der Randpunkte von Γ^* , die in R liegen, nach Satz XVII in bezug auf Γ^* messbar. Ist $R = \Sigma R_\nu$ eine Vereinigungsmenge von Intervallen auf der reellen Axe, so gilt daher dasselbe für die Gesamtheit aller in R liegenden Randpunkte von Γ^* . Nun kann man für jedes ν , $\nu = 1, 2, 3 \dots$ zu γ eine in $\langle -1, 1 \rangle$ liegende Intervallmenge $R^{(\nu)}$ finden, die γ enthält und

deren Mass in Γ sich höchstens um $\frac{1}{\nu}$ vom Mass von γ in Γ unterscheidet.

Die Durchschnittsmenge aller $R^{(\nu)}$ sei mit \mathfrak{M} bezeichnet, die in \mathfrak{M} liegende Randpunktmenge von Γ^* mit M . Dann ist M in bezug auf Γ^* messbar als Durchschnitt einer Folge von messbaren Mengen. Andererseits ist M zwischen γ und ihrer in bezug auf Γ massgleichen Hülle \mathfrak{M} enthalten und daher auch in bezug auf Γ messbar. Daher gilt nach Satz XXIV wegen $\gamma \subset \mathfrak{M}$

$$(20,6) \quad m_{\Gamma,\omega}\gamma = m_{\Gamma,\omega}\mathfrak{M} = m_{\Gamma,\omega}M \geq m_{\Gamma^*,\omega}M.$$

Ist nun γ eine Nullmenge in bezug auf Γ , so ist nach (20,6) M eine Nullmenge in bezug auf Γ^* , und dasselbe gilt für die Teilmenge γ von M . Ist aber $m_{\Gamma,\omega}\gamma > 0$, so ist $M - \gamma$ eine Nullmenge in Γ und daher auch in Γ^* , und es folgt, dass $\gamma = M - (M - \gamma)$ gleichfalls in bezug auf Γ^* messbar ist, w. z. b. w.

Es sei noch bemerkt, dass der Satz XXV' nicht umkehrbar ist. Man kann ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet Γ^* der oberen Halbebene Γ konstruieren, derart, dass eine gewisse auf der reellen Axe liegende Randpunktmenge von Γ^* , die in bezug auf Γ^* messbar und sogar eine Nullmenge ist, in bezug auf Γ nicht messbar ist. Doch soll ein solches Beispiel an anderer Stelle veröffentlicht werden.

In der Folge wird besonders die Tatsache zu benutzen sein, dass, wenn die Menge γ des Satzes XXIV eine Nullmenge in bezug auf Γ ist, sie es auch in bezug auf Γ^* sein muss. In Verbindung mit dem Korollar zum Satz VI lässt sich daraus leicht die folgende Formulierung herleiten:

XXV". Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z -Ebene und Γ^* ein Teilgebiet von Γ , das mit Γ eine in Γ messbare Menge γ erreichbarer Randpunkte gemeinsam hat. $P(z)$ sei eine in Γ reguläre und absolut beschränkte harmonische Funktion. Es sei γ' eine in bezug auf Γ massgleiche Teilmenge von γ . Dann besitzt $P(z)$ auf einer in bezug auf Γ^* mit γ massgleichen Teilmenge γ'' von γ' Randwerte

sowohl von Γ als auch von Γ'' aus, und die beiden so auf γ'' definierten Randwertfunktionen sind einander gleich.

Beweis: Bildet man Γ konform auf das Innere des Einheitskreises ab, so folgt aus dem bekannten Fatouschen Satz, dass $P(z)$ in allen erreichbaren Randpunkten von Γ , bis auf eine Nullmenge in bezug auf Γ , Randwerte von Γ aus hat. Man darf daher annehmen, dass $P(z)$ in jedem Punkt von γ' einen Randwert von Γ aus hat, indem man sonst γ' durch eine massgleiche Teilmenge ersetzt.

Da ferner $\gamma - \gamma'$ nach den Sätzen XXIV und XXV' auch in bezug auf Γ'' eine Nullmenge ist, darf man $\gamma = \gamma'$ voraussetzen. Durch Abbildung von Γ'' auf den Einheitskreis folgt sodann ganz analog wie oben, dass $P(z)$ in einer in bezug auf Γ'' massgleichen Teilmenge γ'' von γ' Randwerte von Γ'' aus hat. Ist z_0 ein Punkt von γ'' , so kann aber nach dem Korollar zum Satz VI' der Randwert von $P(z)$ in z_0 von Γ aus nicht verschieden vom Randwert von Γ'' aus sein, womit der Satz XXV' bewiesen ist.

21. XXVI. Es sei Γ ein Gebiet in der z -Ebene, in dessen Rand eine Strecke σ mit den Endpunkten A, B enthalten ist. (Vgl. Fig. 2). Ein A und B verbindender Kreisbogen κ möge mit σ ein Segment S einschliessen, das ausserhalb Γ verläuft. Die Winkel von S bei A und B seien gleich $2\pi\alpha$, wo $0 \leq \alpha < 1$ ist (sodass S für $\alpha=0$ mit σ zusammenfallen kann).

Der zu σ komplementäre Randteil von Γ sei mit λ bezeichnet. Es möge nun Γ auf ein Gebiet G in der z -Ebene konform abgebildet wer-

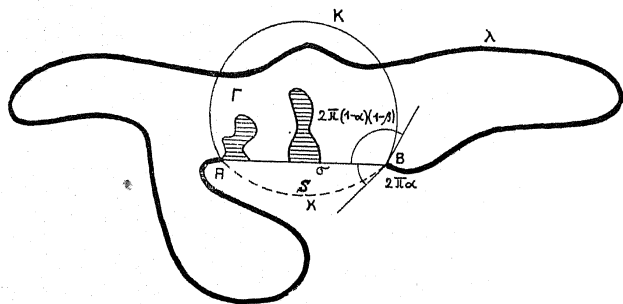


Fig. 2.

den, das in der unteren Halbebene liegt und in seinem Rand eine Strecke l der reellen z -Axe enthält, die dem Randstück λ von Γ entspricht

(Vgl. Fig. 3). Es sei h ein die Endpunkte von l verbindender Kreisbogen, der mit dem unteren Ufer von l ein Segment (h) bildet und mit l den Winkel $\pi\beta$ einschliesst. Dann entsprechen allen Punkten von G ausserhalb (h) in der z -Ebene Punkte, die zwischen σ und einem durch A

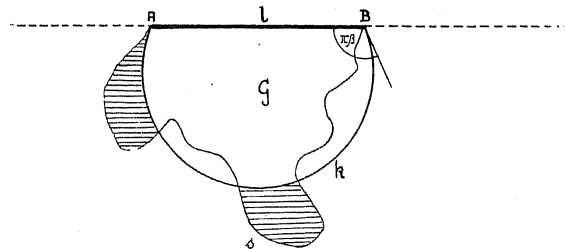


Fig. 3.

und B hindurchgehenden Kreisbogen K liegen, der mit σ den Winkel $2\pi(1-\alpha)(1-\beta)$ einschliesst und auf der κ abgewandten Seite von σ liegt⁴⁸⁾. (In den Fig. 2, 3 sind die von den in Frage kommenden Punkten erfüllten Gebiete schraffiert dargestellt).

Beweis: Denn von den Punkten von G ausserhalb (h) aus erscheint l nach dem Korollar 1 zum Satz XIX in bezug auf die untere Halbebene unter konformen Winkeln $< 2\pi(1-\beta)$, daher nach Satz XXIV erst recht in bezug auf G . Von den entsprechenden Punkten in der z -Ebene aus erscheint dann σ unter den konformen Winkeln $> 2\pi\beta$ in bezug auf Γ , daher erst recht in bezug auf das Aeusserere von S . Daher liegen diese Punkte zwischen σ und einem durch A, B hindurchgehenden Kreisbogen, der mit σ die Winkel $\frac{2\pi(1-\alpha)}{2\pi} (2\pi(1-\beta)) = 2\pi(1-\alpha)(1-\beta)$ bildet,

w. z. b. w.

Identifiziert man G mit der unteren Halbebene der z -Ebene, so folgt

Korollar 1 zum Satz XXVI. Unter den Voraussetzungen des Satzes XXVI liegen die Punkte von Γ , von denen aus σ in bezug auf Γ unter einem konformen Winkel $> 2\pi\beta$ erscheint, zwischen σ und einem Kreisbogen, der A und B verbindet und mit σ den Winkel $2\pi(1-\alpha)(1-\beta)$ bildet.

⁴⁸⁾ Vgl. hierzu den Satz des Abschnitts 18. in Carathéodory (2), pp. 39—40, sowie Carathéodory (4), p. 91.

Es sei unter den Voraussetzungen des Korollars 1: $\frac{1}{4} \leq (1-\alpha)(1-\beta)$
 $< \frac{1}{2}$. Dann verläuft der Kreisbogen K ganz auf der α abgewand-
 ten Seite von σ . Für die grösste Distanz seiner Punkte vom Mittelpunkt
 von σ erhält man dann, $\gamma = 2\pi(1-\alpha)(1-\beta)$ gesetzt, durch eine be-
 kannte trigonometrische Betrachtung den Wert

$$d = \frac{\sigma}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Beschreibt man also um den Mittelpunkt von σ einen Kreis mit dem
 Radius d , so erscheint σ in bezug auf Γ von jedem Punkt von Γ ausser-
 halb dieses Kreises unter einem Winkel $< 2\pi\beta$. Nun gilt aber

$$(21,1) \quad \gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{2d}{\sigma}, \quad 2\pi(1-\beta) = \frac{2}{1-\alpha} \operatorname{arctg} \frac{2d}{\sigma}$$

und

$$(21,2) \quad 2\pi\beta = 2\pi - \frac{2}{1-\alpha} \operatorname{arctg} \frac{2d}{\sigma}.$$

Da aber für das vermöge (21,1) aus gegebenen Werten α , σ und $d \geq \frac{\sigma}{2}$

hergeleitete β sicher $\frac{1}{4} \leq (1-\alpha)(1-\beta) < \frac{1}{2}$ gilt, folgt:

Korollar 2 zum Satz XXVI. Unter den Voraussetzungen des Satzes
 XXVI erscheint σ von jedem Punkt ω von Γ aus, dessen Distanz
 vom Mittelpunkt von σ nicht kleiner als $d \geq \frac{\sigma}{2}$ ist, in bezug auf Γ
 höchstens unter dem konformen Winkel (21,2).

Wie man sieht, ist hier die Schranke (21,2) für $\alpha=0$ grösser als
 π , für $\alpha=\frac{1}{2}$ allerdings kann die Schranke (21,1) beliebig klein gemacht
 werden, wenn d ins Unendliche geht. In diesem Fall liegt Γ in einer
 Halbebene, in deren Rand σ enthalten ist. Die Schranke (21,2) wird
 aber für $\alpha=0$ erreicht, wenn Γ die längs σ aufgeschnittene Ebene und
 ω der „höchste“ Punkt von K über σ ist.

In der Formulierung des Satzes XXVI wird verlangt, dass das
 Bildgebiet G von Γ in einer Halbebene liegt, deren Rand die Strecke λ
 enthält. Es ist leicht zu sehen, dass man statt der Halbebene ein Kreis-
 bogenzweieck benutzen kann, dessen eine Seite das Bild von λ ist.
 Wenn die Winkel des Zweiecks gleich π sind, d.h. das Zweieck sich
 auf einen Kreis reduziert, genügt es, dieses Zweieck auf eine Halbebene

abzubilden. Sonst aber hat man das Zweieck durch eine geeignete Po-
 tenztransformation auf eine Halbebene abzubilden, wobei alle Winkel in
 den Ecken des Zweiecks mit einem und demselben Faktor multipliziert
 werden.

Wird über das Gebiet Γ über die Annahmen des Satzes XXVI
 hinaus vorausgesetzt, dass der unendlich ferne Punkt nicht in seinem
 Innern liegt, so kann man anstatt der im Korollar 2 gegebenen Abschät-
 zung andere aufstellen, bei denen die Schranke beliebig kleiner Wer-
 te fähig ist. Zugleich braucht man dabei σ nicht mehr als eine Strecke
 vorauszusetzen. Wir geben zwei derartige Abschätzungen.

22. XXVII. Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das
 vollständig auf einer bestimmten Seite H einer Geraden g liegt und eine
 in Γ messbare Randpunktmenge C besitzt, deren sämtliche Punkte
 von einem Punkte q von g eine Distanz $\leq \rho$ haben. ω sei ein Punkt
 von Γ mit der Distanz $d > \rho$ von q . Dann gilt für den konformen
 Winkel, unter dem C von ω aus in bezug auf Γ erscheint:

$$(22,1) \quad m_{\Gamma, \omega} C \leq 4 \operatorname{arc} \sin \frac{2\rho d}{d^2 + \rho^2} =$$

$$= 4 \operatorname{arc} \cos \frac{d^2 - \rho^2}{d^2 + \rho^2} < \frac{4\pi\rho d}{d^2 + \rho^2} < 4\pi \frac{\rho}{d}.$$

Hier wird das Gleichheitszeichen nur erreicht, wenn Γ mit dem aus H durch
 das Herausschneiden des Kreises um q mit dem Radius ρ entstehenden
 Gebiet, C bis auf eine Nullmenge mit dem in H liegenden Halbkreis um
 q mit dem Radius ρ identisch ist und ω auf dem Lot auf g durch q liegt.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf vorausgesetzt
 werden, dass g die reelle Axe der z -Ebene, $q=0$ und H mit der obo-
 ren Halbebene identisch ist, ferner, dass C mit der Menge aller Rand-
 punkte von Γ mit $|z| \leq \rho$ zusammenfällt. Man bilde das Gebiet $H^{(\rho)}$,
 das aus allen Punkten mit $\Im z > 0$, $|z| > \rho$ besteht. Der Halbkreis
 $\lambda: |z| = \rho$, $\Im z \geq 0$, zerschneidet Γ in endlich oder unendlich viele
 einfach zusammenhängende Gebiete. Dasjenige unter ihnen, das ω ent-
 hält, sei mit Γ^* bezeichnet. Γ^* ist ein Teilgebiet von $H^{(\rho)}$. Die Menge
 der Randpunkte von Γ^* , die nicht auf λ liegen, sei mit γ bezeichnet,
 die Menge der übrigen, auf λ liegenden Randpunkte mit $\bar{\gamma}$. Die zu C
 komplementäre Randpunktmenge von Γ sei mit \bar{C} bezeichnet. Dann
 folgt aus dem Satz XXV, wenn Γ^* von Γ verschieden ist und es in γ
 überhaupt Punkte gibt:

$$m_{\Gamma^*, \omega} \gamma < m_{\Gamma, \omega} \gamma \leq m_{\Gamma, \omega} \bar{C}.$$

da dann γ nach Satz XVII keine Nullmenge in Γ^* und wegen XXIV keine Nullmenge in Γ ist.

Daher folgt wegen (17,1), wenn man zu komplementären Randpunkt mengen übergeht:

$$(22,2) \quad m_{\Gamma^*, \omega} \bar{\gamma} > m_{\Gamma, \omega} C.$$

Andererseits ist $\bar{\gamma}$ abgeschlossen und daher messbar in bezug auf $H^{(b)}$. Daher gilt, da $\bar{\gamma}$ auf \mathbb{Z} liegt, nach Satz XXV, wenn Γ^* nicht mit $H^{(b)}$ identisch ist,

$$m_{\Gamma^*, \omega} \bar{\gamma} \leq m_{H^{(b)}, \omega} \bar{\gamma} \leq m_{H^{(b)}, \omega} \mathbb{Z},$$

wo in einer der beiden Relationen das *Kleinerzeichen* gilt, und daher

$$(22,3) \quad m_{\Gamma, \omega} C \leq m_{H^{(b)}, \omega} \mathbb{Z},$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn Γ mit $H^{(b)}$ zusammenfällt. Aus dem Satz XX folgt dann die Behauptung sofort.

23. Lässt man die Voraussetzung fallen, dass Γ in einer Halbebene enthalten ist, so lässt sich anstatt XXVII die folgende, allerdings wesentlich tiefer liegende Abschätzung beweisen:

XXVIII. Es sei Γ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z -Ebene, das den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthält und eine in Γ messbare Randpunktmenge C besitzt, die im Kreise $|z| \leq \rho$ liegt. Ist ω ein innerer Punkt von Γ mit $|\omega| > \rho$, so gilt für den konformen Winkel in bezug auf Γ , unter dem C von ω aus erscheint:

$$(23,1) \quad m_{\Gamma, \omega} C \leq 4 \arcsin \frac{2\sqrt{|\omega| \cdot \rho}}{\rho + |\omega|} = \\ = 4 \arcsin \cos \frac{|\omega| - \rho}{|\omega| + \rho} < 4\pi \sqrt{\frac{\rho}{|\omega|}}.$$

Hier gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn Γ durch eine Drehung um den Nullpunkt in das Gebiet E_ρ des Satzes XXI übergeht, C mit der Kreislinie $|z| = \rho$ bis auf eine Nullmenge identisch ist und ω auf der Verlängerung des geradlinigen Einschnittes von Γ nach rückwärts liegt.

Beweis: Da die Voraussetzungen und Behauptungen gegenüber einer Transformation von der Form $z' = az$ invariant sind, darf $\rho = 1$ und ω positiv > 1 vorausgesetzt werden.

Die Gesamtheit der Punkte von Γ , die ausserhalb des Einheitskreises E_1 liegen, zerfällt in endlich oder unendlich viele einfach zusammenhängende Gebiete, von denen eines ω enthält und mit Γ^* bezeichnet

net werden möge. Die Gesamtheit der Punkte der Kreislinie E_z , die im Rand von Γ^* vorkommen, sei mit \mathbb{Z} bezeichnet. \mathbb{Z} ist nach Satz XVII messbar.

Es genügt, (23,1) unter der Annahme zu beweisen, dass C die Gesamtmenge der Randpunkte von Γ mit $|z| \leq 1$ ist. Wir zeigen zuerst, dass, wenn Γ^* nicht mit Γ identisch ist,

$$(23,2) \quad m_{\Gamma, \omega} C < m_{\Gamma^*, \omega} \mathbb{Z}$$

gilt. Denn es sei \bar{C} die zu C komplementäre Randpunktmenge von Γ und \mathbb{Z} die zu \mathbb{Z} komplementäre Randpunktmenge von Γ^* . \bar{C} ist nicht leer, da Γ den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthält. Nach Satz XVII ist \bar{C} keine Nullmenge in Γ . Daher folgt aus dem Satz XXV

$$m_{\Gamma, \omega} \bar{C} \leq m_{\Gamma^*, \omega} \mathbb{Z} \leq m_{\Gamma, \omega} \bar{C},$$

wo in einer der beiden Ungleichungen das *Kleinerzeichen* gilt. Durch den Uebergang zu den komplementären Randpunkt mengen folgt (23,2).

Durch die Transformation $z' = \frac{1}{z}$ wird Γ^* in ein Gebiet Γ' übergeführt, das innerhalb $E_{z'}$ liegt und den Nullpunkt nicht im Innern enthält. \mathbb{Z} geht dabei in eine gleichfalls messbare Punktmenge \mathbb{Z}' auf der Kreislinie $E_{z'}$ über und ω in $\omega' = \frac{1}{\omega}$, wo $0 < \omega' < 1$ ist. Offenbar gilt

$$m_{\Gamma^*, \omega} \mathbb{Z} = m_{\Gamma', \omega'} \mathbb{Z}'.$$

Man verbinde ω' mit dem Nullpunkt längs eines Radius von $E_{z'}$ und bezeichne mit $z'_0 \geq 0$ den ersten Randpunkt von Γ' , der angetroffen wird, wenn man längs dieses Radius von ω' nach dem Nullpunkt geht. Nun wende man auf die Kreisscheibe $E_{z'}$ die Transformation

$$w = \frac{z' - z'_0}{1 - \bar{z}'_0 z'}$$

an, durch die, da z'_0 reell ist, $E_{z'}$ in E_w übergeht. Dabei geht Γ' in ein Gebiet Γ_0 über, z'_0 und ω' gehen über in $w=0$ und $w=\eta$, wobei $0 < \eta \leq \omega'$ ist. $w=0$ ist nunmehr ein Randpunkt von Γ_0 , während die halboffene Strecke $(0, \eta]$ in Γ_0 enthalten ist. Der Menge \mathbb{Z}' möge \mathbb{Z}_0 entsprechen, es ist dies die Gesamtheit der auf der Kreisscheibe E_w liegenden Randpunkte von Γ_0 . Offenbar gilt wieder

$$m_{\Gamma', \omega'} \mathbb{Z}' = m_{\Gamma_0, \eta} \mathbb{Z}_0.$$

Es genügt daher,

$$(23,3) \quad m_{\Gamma_0, \gamma} z_0 \leq 4 \arcsin \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta} = 4 \arcsin \frac{2}{\sqrt{\eta} + \frac{1}{\sqrt{\eta}}}$$

zu beweisen, da wegen $1 > \omega' \geq \eta$ sicher

$$\frac{2}{\sqrt{\eta} + \frac{1}{\sqrt{\eta}}} \leq \frac{2}{\sqrt{\omega'} + \frac{1}{\sqrt{\omega'}}}$$

ist. Es sei nun die zu z_0 komplementäre Randpunktmenge von Γ_0 mit γ bezeichnet. Es genügt zu beweisen, dass

$$(23,4) \quad m_{\Gamma_0, \gamma} \gamma \geq 2\pi - 4 \arcsin \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta} = 4 \arcsin \frac{1-\eta}{1+\eta}$$

ist.

Nun liegt aber γ innerhalb E_w und „verbindet“ $w=0$ mit der Peripherie von E_w , sodass es auf jedem Kreis $|w|=\rho$, $0 \leq \rho < 1$, Punkte von γ gibt. Daher gilt nach dem Satz von Milloux-Erhardt Schmidt-R. Nevanlinna⁴⁹⁾ für das charakteristische Potential der Randpunktmenge γ von Γ_0

$$(23,5) \quad P_{\Gamma_0, \gamma}(w) \geq \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad |w| = \eta,$$

und das Gleichheitszeichen gilt hier nur, wenn Γ_0 aus dem längs des Radius $< 0,1$ aufgeschnittenen Einheitskreis E_w durch Drehung um den Nullpunkt hervorgeht und w auf der Verlängerung nach rückwärts des Einschnitts von Γ_0 liegt. Daraus ergibt sich aber nunmehr die Behauptung von XXVIII unmittelbar,

24. Der Herleitung einer weiteren allgemeinen Abschätzung für konforme Masse schicken wir einen auch an sich interessanten Satz über Maxima von harmonischen Funktionen auf Halbstrahlen voraus.

⁴⁹⁾ Es handelt sich um eine bekannte Abschätzung von Milloux, Milloux (1), p. 348, sowie (2), p. 182, in der allerdings die genauen Konstanten, die wir hier benutzen müssen, erst in Erhardt Schmidt (1) und Nevanlinna (1) ermittelt wurden. Die Betrachtung der Jordaneinschnitte, auf die sich Hr. Erhardt Schmidt beschränkt, ist für unseren Zweck allerdings nicht ausreichend. Es sei ferner noch auf Lavrentieff (3) hingewiesen, wo gleichfalls die genauen Konstanten in der entsprechenden Abschätzung hergeleitet werden, indessen unter der Annahme, dass das Extremalgebiet eine stückweise analytische Berandung hat, deren Begründung a. a. O. in Aussicht gestellt wird, bisher aber noch nicht veröffentlicht wurde.

XXIX. Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z -Ebene und Δ ein Winkelraum $\alpha < \arg z < \beta$, $|z| > 0$.

$P(z)$ sei eine Funktion, die in den in Δ liegenden inneren Punkten von G harmonisch, gleichmäßig nach oben beschränkt und nicht konstant, ausserhalb G in Δ gleich Null und in allen aus dem Inneren von G erreichbaren Randpunkten von G , die in Δ und auf dem Rand von Δ liegen, nicht positiv ist, d. h. bei allseitiger Annäherung aus G an diese Randpunkte nicht positiven Häufungsvorrat hat.

Wird dann für jedes γ mit $\alpha < \gamma < \beta$ die obere Grenze von $P(z)$ auf dem Halbstrahl S_γ : $\arg z = \gamma$, $|z| > 0$ mit $M(\gamma)$ bezeichnet und ist $M(\gamma)$ im Intervall (α, β) nicht negativ, so ist $M(\gamma)$ eine konvexe Funktion von γ im Intervall (α, β) , d. h. es gilt für $\alpha < \alpha_1 < \gamma < \beta_1 < \beta$

$$(24,1) \quad M(\gamma) \leq \frac{\gamma - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} M(\beta_1) + \frac{\beta_1 - \gamma}{\beta_1 - \alpha_1} M(\alpha_1).$$

Ferner gilt, wenn $P(z)$ nicht in den in Δ liegenden Punkten von G mit einer linearen Funktion von $\arg z$ zusammenfällt, für $\alpha < \alpha_1 < \gamma < \beta_1 < \beta$ für jedes z_0 aus G auf $\frac{S_{\alpha_1 + \beta_1}}{2}$

$$(24,2) \quad P(z_0) < \frac{M(\alpha_1) + M(\beta_1)}{2}$$

und allgemeiner für jedes z_0 auf S_γ

$$(24,3) \quad P(z) < \frac{\gamma - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} M(\beta_1) + \frac{\beta_1 - \gamma}{\beta_1 - \alpha_1} M(\alpha_1).$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $P(z)$ in den in Δ liegenden Punkten von G mit keiner linearen Funktion von $\arg z$ identisch ist, da sonst (24,1) trivial ist. Zum Beweis von (24,1) genügt es, (24,2) zu beweisen, da daraus (24,1) für $\gamma = \frac{\beta_1 + \alpha_1}{2}$ folgt, was bekanntlich für die Konvexität ausreichend ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf vorausgesetzt werden, dass $\alpha_1 = -\beta_1$ ist, sodass z_0 auf der positiven reellen Axe liegt.

Die Gesamtheit aller Punkte, die sowohl in G als auch im Winkelraum Δ : $\alpha_1 < \arg z < \beta_1$ liegen, sei mit G^* bezeichnet. G^* ist offen und kann eventuell in mehrere einfach zusammenhängende Gebiete zerfallen. Eines unter ihnen enthält z_0 und möge mit G_1 bezeichnet werden. Der Rand von G_1 kann erstens Punkte der Halbstrahlen S_{α_1} , S_{β_1} enthalten, zweitens Randpunkte von G aus Δ . In den Randpunkten

von G_1 ist daher $P(z)$ entweder ≤ 0 oder $\leq M(\alpha_1)$ oder $\leq M(\beta_1)$. Daher gilt sicher in G_1 , da $P(z)$ in G_1 nicht konstant ist,

$$(24,4) \quad P(z) < M(\alpha_1) + M(\beta_1).$$

Man darf annehmen, dass $M(\alpha_1) + M(\beta_1) > 0$ ist, da sonst $M(\alpha_1) = M(\beta_1) = 0$ und (24,2) direkte Folge von (24,4) wäre.

Spiegelt man G_1 an der positiven reellen Axe, so sei das entstehende Gebiet mit \bar{G}_1 bezeichnet, und G_1^* sei die Menge der G_1 und \bar{G}_1 gemeinsamen Punkte. Das grösste in G_1^* enthaltene Gebiet, das z_0 enthält, sei mit G_0 bezeichnet. G_0 ist einfach zusammenhängend und symmetrisch in bezug auf die reelle Axe. Daher ist mit $P(z)$ auch $P_1(z) = P(\bar{z})$ eine in G_0 reguläre harmonische Funktion. Wir setzen $P(z) + P_1(z) = Q(z)$. Auch $Q(z)$ ist in G_0 regulär harmonisch und nach oben beschränkt. In den erreichbaren Randpunkten von G_0 , die auf S_{α_1} liegen, ist $P(z) \leq M(\alpha_1)$, $P(\bar{z}) \leq M(\beta_1)$, daher

$$(24,5) \quad Q(z) \leq M(\alpha_1) + M(\beta_1).$$

Dasselbe ergibt sich in analoger Weise für die erreichbaren Randpunkte von G_0 auf S_{β_1} .

Jeder der übrigen erreichbaren Randpunkte z_1 von G_0 ist entweder ein Randpunkt von G oder der Spiegelpunkt in bezug auf die reelle Axe von einem Randpunkt von G . Im ersten Falle ist in ihm $P(z_1) \leq 0$ und $P_1(z_1) < M(\alpha_1) + M(\beta_1)$, nämlich, wenn \bar{z}_1 innerhalb G_1 liegt, wegen (24,4) und, wenn \bar{z}_1 zum Rande von G_1 gehört, wegen $P(\bar{z}_1) \leq 0$. Daher gilt in ihm (24,5) mit *Kleiner-Zeichen*. Im zweiten Falle ist in ihm $P_1(z_1) \leq 0$ und analog wie oben $P(z_1) < M(\alpha_1) + M(\beta_1)$, sodass auch dann (24,5) mit *Kleiner-Zeichen* richtig ist. Daher gilt (24,5) auch im Innern von G_0 und zwar mit dem *Kleiner-Zeichen*, wenn $Q(z)$ nicht konstant in G_0 und nicht identisch gleich $M(\alpha_1) + M(\beta_1)$ ist.

Wäre aber $Q(z)$ in G_0 identisch gleich $M(\alpha_1) + M(\beta_1)$, so könnte G_0 nach der obigen Herleitung keine Randpunkte im Innern von Δ_1 haben. Es müsste daher $Q(z) = M(\alpha_1) + M(\beta_1)$ sowohl auf S_{α_1} als auch auf S_{β_1} sein. Dann müsste aber nach der Herleitung von (24,5) $P(z)$ in allen Punkten von S_{α_1} gleich $M(\alpha_1)$ und in allen Punkten von S_{β_1} gleich $M(\beta_1)$ sein. Zugleich müsste dann $P(z_0) = \frac{1}{2} Q(z_0) = \frac{1}{2} (M(\alpha_1) + M(\beta_1))$ sein.

Bilden wir aber dann mit der entsprechenden Bestimmung von $\arg z$

$$R(z) = P(z) - \left(\frac{\arg z - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} M(\beta_1) + \frac{\beta_1 - \arg z}{\beta_1 - \alpha_1} M(\alpha_1) \right),$$

so ist $R(z)$ harmonisch und beschränkt im Innern und verschwindet auf den beiden Schenkeln von Δ_1 . Da $R(z)$ aber auch in einem inneren Punkt z_0 von Δ_1 verschwindet, so folgt, dass $R(z)$ in Δ_1 durchweg verschwindet, sodass $P(z)$ in Δ_1 und daher auch in allen in Δ liegenden Punkten von G mit einer linearen Funktion von $\arg z$ zusammenfällt.

Ist dies also nicht der Fall, so folgt

$$P(z_0) = \frac{1}{2} Q(z_0) < \frac{M(\alpha_1) + M(\beta_1)}{2}.$$

Damit ist zugleich auch (24,1) bewiesen.

Um nun (24,3) zu beweisen, seien α_2 und β_2 so gewählt, dass $\alpha_1 < \alpha_2 < \gamma = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} < \beta_2 < \beta_1$ ist.

Dann folgt aus (24,1)

$$(24,6) \quad M(\alpha_2) \leq \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} M(\beta_1) + \frac{\beta_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} M(\alpha_1),$$

$$(24,7) \quad M(\beta_2) \leq \frac{\beta_2 - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} M(\beta_1) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \alpha_1} M(\alpha_1),$$

und aus (24,2), angewandt auf α_2 und β_2 , wegen (24,6) und (24,7):

$$P(z_0) < \frac{M(\alpha_2) + M(\beta_2)}{2} = \frac{\gamma - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} M(\beta_1) + \frac{\beta_1 - \gamma}{\beta_1 - \alpha_1} M(\alpha_1),$$

womit (24,3) bewiesen ist.

Zusatz zum Satz XXIX. *Ist der Häufungsvorrat von $P(z)$ in allen Randpunkten von G in und auf dem Rand von Δ nicht negativ — und nicht nur in den erreichbaren Randpunkten — so braucht G im obigen Beweis nicht als einfach zusammenhängend vorausgesetzt zu werden.*

In der Formulierung von XXIX mit dem obigen Zusatz ist offenbar der bekannte Satz enthalten, wonach für eine in Δ reguläre harmonische und beschränkte Funktion $Q(z)$ das Maximum ihres absoluten Betrages auf Halbstrahlen $\arg z = \gamma$ eine konvexe Funktion von γ ist. Denn, um die entsprechende Ungleichung vom Typus (24,1) herzuleiten, braucht man nur durch Hinzufügung einer geeigneten Konstanten zu erreichen, dass $M(\alpha_1)$, $M(\beta_1)$ und $M(\gamma)$ positiv werden, und sodann aus Δ alle Punkte mit negativem $Q(z)$ wegzulassen.

Geht man durch die logarithmische Abbildung zur $\log z$ -Ebene über, so ergibt sich ein zu XXIX analoger Satz, in dem Δ durch einen Parallelsstreifen und die Halbstrahlen $\arg z = \gamma$ durch die in diesem Paral-

lelstreifen verlaufenden Geraden ersetzt werden. Der so umgeformte Satz liefert offenbar eine auch direkt leicht beweisbare Verallgemeinerung des Dreieraden- und des Dreikreisesatzes.

25. XXX. Es sei G ein rechts von der imaginären Axe der z -Ebene liegendes einfach zusammenhängendes Gebiet, in dessen Berandung eine abgeschlossene endliche Strecke σ auf der imaginären Axe als freies Randstück enthalten ist. C sei das zu σ komplementäre Stück des Randes von G und s sei eine in G verlaufende Strecke, deren Endpunkte auf C liegen. Bildet s mit σ den Winkel α , $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$, so erscheint σ von allen Punkten von s aus in bezug auf G unter einem konformen Winkel $< 2(\pi - \alpha)$.

Der Beweis zerfällt in drei Teile.

A. Es sei $P(z)$ das charakteristische Potential von σ in bezug auf G . Wir zeigen zuerst, dass in allen erreichbaren Punkten von C $P(z)$ den Grenzwert 0 hat. Zu dem Zwecke bilde man G konform auf das Innere des Einheitskreises E_ζ der ζ -Ebene ab, sodass σ etwa auf die untere Hälfte von E_ζ abgebildet wird. Die Endpunkte von σ gehen dabei in $\zeta = \pm 1$ über. C aber entspricht in der ζ -Ebene die obere Hälfte von E_ζ , ohne ihre reellen Punkte. $P(z)$ geht dabei in diejenige in E_ζ harmonische Funktion $P^*(z)$ über, die auf der unteren Hälfte von E_ζ gleich 1 und auf der oberen Hälfte gleich 0 ist, zunächst bis auf Mengen vom Masse 0. $P^*(z)$ ist aber regulär auf den beiden Hälften von E_ζ , bis auf die Punkte ± 1 . Daher verschwindet $P^*(z)$ in jedem inneren Punkt der oberen Hälfte von E_ζ , woraus die obige Behauptung für jeden erreichbaren Punkt von C ohne weiteres folgt.

B. Wir beweisen nunmehr die Behauptung des Satzes für $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

d. h. wenn s senkrecht auf σ steht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf dabei vorausgesetzt werden, dass s auf der positiven reellen Axe liegt. z_0 sei ein innerer Punkt von s . Spiegelt man das Gebiet G an der positiven reellen Axe, so ergibt sich ein neues Gebiet \bar{G} , das gleichfalls z_0 im Innern enthält.

G_0 sei dann das „grösste“ sowohl in G als auch in \bar{G} enthaltene zusammenhängende Gebiet, das z_0 enthält. Wir behaupten nun, dass jeder Randpunkt von G_0 entweder ein Punkt von C oder der Spiegelpunkt eines Punktes von C an der reellen Axe ist. Um dies einzusehen, beachte man, dass der Rand von G durch s in zwei Teile getrennt wird, von denen einer keine Punkte von σ enthält. Dieses Randstück von G , vermehrt um die beiden Endpunkte von s , bezeichnen wir mit γ , und das Spie-

gelbild von γ an der reellen Axe mit $\bar{\gamma}$. Das durch $\gamma + s$ begrenzte Teilgebiet von G sei mit G_1 bezeichnet, das zu G_1 spiegelbildlich gelegene, durch $\bar{\gamma} + s$ begrenzte Teilgebiet von \bar{G} mit \bar{G}_1 . \bar{G} und \bar{G}_1 liegen in der rechten Halbebene. Andererseits ist $\gamma + \bar{\gamma}$ ein Kontinuum, das die z -Ebene eventuell in mehrere Teilgebiete zerlegt, von denen eines, G^* , z_0 enthält. Jeder Punkt von G^* , der nicht auf s liegt, liegt dann entweder in G_1 oder in \bar{G}_1 . Daher liegt G^* ganz in der rechten Halbebene. Das Gebiet G_0 ist nun offenbar ein Teilgebiet von G^* , da bei der Bildung von G_0 eine „grössere“ Menge von Punkten aus der z -Ebene entfernt wurde. Jeder Randpunkt z_1 von G_0 ist daher entweder ein Randpunkt von G^* oder liegt im Innern von G^* . Ist z_1 ein innerer Punkt von G^* , so liegt z_1 innerhalb der rechten Halbebene und gehört daher entweder C oder dem Spiegelbild von C an, da er weder auf σ noch auf dem Spiegelbild von σ liegen kann. Ist aber z_1 ein Randpunkt von G^* , so gehört er zu γ oder zu $\bar{\gamma}$. Im ersten Falle ist z_1 in C enthalten, im zweiten der Spiegelpunkt eines Punktes von C .

Daher muss für jeden aus G_0 erreichbaren Randpunkt z' von G_0 entweder $P(z')$ oder $P(\bar{z}')$ verschwinden. Denn ist z' ein Punkt von C , so folgt dies direkt aus dem unter A. Bewiesenen. Sonst ist aber der Spiegelpunkt \bar{z}' von z' ein Punkt von C .

Die in G_0 harmonische nicht negative Funktion $P(z) + P(\bar{z}) = Q(z)$ ist dort ≤ 2 und hat in jedem erreichbaren Randpunkt von G_0 den Lim nicht grösser als 1, da dort weder $P(z)$ noch $P(\bar{z})$ grösser als 1 sein kann, und eine der beiden Funktionen sicher verschwindet. Daher ist $Q(z)$ in G_0 nicht grösser als 1 und sogar sicher < 1 , da sonst $Q(z)$ in $G_0 \equiv 1$ sein müsste, während $Q(z)$ in den beiden Endpunkten von s verschwindet.

Daher ist auf s , wo $Q(z) = 2P(z)$ gilt, $P(z) < \frac{1}{2}$, und σ erscheint von diesen Punkten aus in bezug auf G unter einem Winkel $< 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$, wie behauptet.

C. Es sei nunmehr $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Der der imaginären Axe am nächsten liegende Endpunkt von s sei mit z_1 , der andere mit z_2 bezeichnet. Es möge der Halbstrahl von z_1 nach z_2 etwa mit der positiven imaginären Axe den Winkel α und mit der negativen den Winkel $\pi - \alpha$ bilden. Wir betrachten nun den Winkelraum $\Delta: \frac{\pi}{2} - \epsilon > \arg(z - z_1) > 0$ mit

$\frac{\pi}{2} - \alpha > \varepsilon > 0$ und wenden auf ihn und das Gebiet G sowie die Funktion $P(z)$ nach einer Verschiebung des Nullpunktes den Satz XXIX an. Dabei soll $P(z)$ ausserhalb G gleich 0 gesetzt werden, und σ hat weder mit dem Innern noch mit dem Rand von Δ einen Punkt gemeinsam. Dann ist das Maximum von $P(z)$ in den in Δ liegenden Punkten von G mit $\arg(z - z_1) = 0$ kleiner als $\frac{1}{2}$, nach dem unter B. Bewiesenen. Auf einem Halbstrahl $\arg(z - z_1) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ist das entsprechende Maximum sicher ≤ 1 . Daraus folgt nach dem Satz XXIX für alle z auf s

$$P(z) \leq \frac{2}{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\frac{\pi}{2} - \varepsilon - \alpha}{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \cdot 1 + \frac{\alpha}{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \cdot \frac{1}{2},$$

woraus für $\varepsilon \downarrow 0$ weiter folgt

$$(25,1) \quad P(z) \leq \frac{2}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\alpha}{2 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi - \alpha}{\pi}.$$

Es seien nun α_1 und β_1 so gewählt, dass

$$\frac{\pi}{2} > \beta_1 > \alpha = \frac{\beta_1 + \alpha_1}{2} > \alpha_1 > 0$$

ist. Dann folgt aus (24,2) für $\gamma = \alpha$, da $P(z)$ sicher keine lineare Funktion von $\arg(z - z_1)$ ist — sie ist ja auf σ konstant und verschwindet auf den ausserhalb σ liegenden Stücken des Halbstrahls $\arg(z - z_1) = \frac{\pi}{2}$, wenn z_1 auf der imaginären Axe liegt —:

$$P(z) < \frac{1}{2} \left(\frac{\pi - \alpha_1}{\pi} + \frac{\pi - \beta_1}{\pi} \right) = \frac{\pi - \alpha}{\pi}.$$

Daher erscheint σ von z aus unter einem konformen Winkel $< 2(\pi - \alpha)$, wie behauptet.

Korollar 1. zum Satz XXX. *Unter den Voraussetzungen des Satzes XXX sei λ ein Jordanbogen, der bis auf seine Endpunkte z_1, z_2 , die auf C liegen, in G verläuft und zugleich in einem Winkelraum*

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \leq \arg(z - z_1) \leq \frac{\pi}{2} - \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

liegt. Dann erscheint σ von jedem Punkt von λ aus in bezug auf G unter einem konformen Winkel $< 2(\pi - \alpha)$.

Denn für jeden Punkt z_0 von λ liegt auf dem durch z_0 hindurchgehenden Halbstrahl durch z_1 eine Strecke s , die z_0 im Innern enthält, zwei Randpunkte von G verbindet, die nicht auf σ liegen, und mit der imaginären Axe einen Winkel β , $\frac{\pi}{2} \geq \beta \geq \alpha$ bildet. Dann erscheint σ von z_0 aus unter einem konformen Winkel $< 2(\pi - \beta) \leq 2(\pi - \alpha)$.

Für die Anwendungen ist allerdings oft eine Formulierung günstiger, die sich aus dem Satz XXX durch eine lineare Transformation ergibt.

Korollar 2. zum Satz XXX. *Unter den Voraussetzungen des Satzes XXX sei s' ein Kreisbogen, der zwei Punkte von C verbindet und im übrigen in G verläuft. Verlängert man s' bis zu seinen Schnittpunkten z', z'' mit der imaginären Axe, so möge einer dieser Schnittpunkte, etwa z' ausserhalb σ liegen, und die Verlängerung von s' in ihm mit einer der beiden Richtungen der imaginären Axe einen Winkel α bilden, mit $\frac{\pi}{2} \geq \alpha > 0$. Dann erscheint σ in bezug auf G von jedem Punkt von s' aus unter einem konformen Winkel $< 2(\pi - \alpha)$.*

Zum Beweis genügt es, die z -Ebene einer linearen Transformation zu unterwerfen, bei der die imaginäre Axe in sich und z' in den unendlich fernen Punkt übergeht, und sodann den Satz XXX anzuwenden. — Offenbar kann man die Formulierung des Korollars 1. mit Hilfe der im Korollar 2. enthaltenen Verallgemeinerung des Satzes XXX noch weiter verschärfen, indem man die Kurve λ zwischen geeignete Kreisbögen einschliesst. Zugleich übersieht man, dass man die obigen Aussagen unter Zuhilfenahme weiterer Voraussetzungen noch wesentlich verschärfen kann. Ohne weitere Spezialisierung der Voraussetzungen ist dies allerdings nicht mehr möglich. Man betrachte, um sich hiervon zu überzeugen, die ganze rechte Halbebene als Gebiet G und wähle $z = 0$ und $z = \infty$ als die Punkte z_1, z_2 , während der Strahl $\arg z = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\frac{\pi}{2} \geq \beta > 0$

als s gewählt wird. Dann erscheint von jedem inneren Punkt z_0 von s aus in bezug auf G die negative imaginäre Axe unter dem konformen Winkel β . Ist also σ eine Teilstrecke der negativen imaginären Axe, deren Endpunkte hinreichend nahe bei 0 und ∞ liegen, so erscheint σ

von z_0 aus unter einem konformen Winkel in bezug auf G , der sich beliebig wenig von β unterscheidet.

Die Anwendung des Satzes XXX und der Korollare dazu ist natürlich nur vorteilhaft, wenn z_1 und z_2 sehr nah bei σ relativ zur Grösse von σ liegen. Sonst liefern die Sätze XXVI und XXVII bessere Resultate.

§ 6. Der Hauptsatz über die Winkelproportionalität am Rande bei konformer Abbildung.

26. XXXI. Es seien ε und $d < \frac{\pi}{2}$ zwei positive Zahlen, und es sei β beliebig reell. Dann gibt es eine nur von ε und d abhängige positive Funktion $u(\varepsilon, d)$ mit der folgenden Eigenschaft: Es seien r_1, r_2 zwei positive Zahlen mit $\frac{r_2}{r_1} = e^\varepsilon$. Es sei R das Gebiet in der ζ -Ebene:

$$r_1 < |\zeta| < r_2, \quad |\arg \zeta - \beta| < d,$$

und es sei $H(\zeta)$ eine innerhalb und auf dem Rand von R reguläre, positive, harmonische Funktion, deren Werte auf dem geradlinigen Begrenzungsstück von R :

$$\arg z = \beta - d, \quad r_1 \leq \zeta \leq r_2,$$

grösser als $\frac{d}{2}$ sind. Dann sind die Werte von $H(\zeta)$ in jedem Punkte des Bogens σ :

$$(26,1) \quad |\zeta| = \sqrt{r_1 r_2}, \quad \beta - d \leq \arg \zeta \leq \beta$$

grösser als $u(\varepsilon, d)$.

Beweis: Beim Beweis darf offenbar R mit einer positiven, geeignet gewählten Konstanten multipliziert werden, da dabei der Wertevorrat von $H(\zeta)$ auf entsprechenden Teilstücken von R unverändert bleibt. Daher darf ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $r_1 r_2 = 1$ vorausgesetzt werden, sodass R das Gebiet ist:

$$e^{-\frac{\varepsilon}{2}} < |\zeta| < e^{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad |\arg \zeta - \beta| < d.$$

Es sei nun $K(\zeta)$ eine innerhalb R reguläre und beschränkte harmonische Funktion, deren Werte im Innern der rechten Randstrecke

$(\arg \zeta = \beta - d, e^{-\frac{\varepsilon}{2}} < |\zeta| < e^{\frac{\varepsilon}{2}})$ gleich $\frac{d}{2}$ und im Innern der drei übrigen

Randstücke von R gleich Null sind. Offenbar gilt innerhalb R

$$H(\zeta) > K(\zeta),$$

da $H(\zeta) - K(\zeta)$ innerhalb R beschränkt und auf dem Rande bis eventuell auf vier Eckpunkte positiv ist.

Die Funktion $K(\zeta)$ ist auf dem Bogen σ stetig, ein schliesslich des rechten Endpunktes $e^{i(\beta-d)}$, da ja in diesem Punkt die Randfunktion stetig ist. Andererseits ist $K(\zeta)$ im Innern von R positiv. Daher gilt dasselbe auf dem ganzen abgeschlossenen Bogen σ . Es sei dann $u(\varepsilon, d)$ das Minimum von $K(\zeta)$ auf σ . $u(\varepsilon, d)$ ist dann offenbar positiv, woraus die Behauptung folgt.

27. XXXII. Ein einfach zusammenhängendes Gebiet Γ der ζ -Ebene möge einen unendlichen Randpunkt π_0 besitzen. π_0 sei längs aller in Γ ins Unendliche verlaufender Jordanbögen erreichbar, deren Richtungen im Unendlichen einem offenen Intervall (α, β) angehören. Es sei (α, β) das grösste offene Intervall mit dieser Eigenschaft, und es möge der Rand von Γ eine Folge von Randpunkten ζ_v enthalten mit

$$(27,1) \quad \zeta_v \rightarrow \infty, \quad \frac{\zeta_{v+1}}{\zeta_v} \rightarrow 1, \quad \arg \zeta_v \rightarrow \beta.$$

Bildet man Γ so konform auf $H_z, R_z > 0$, ab, dass π_0 in $z = \infty$ übergeht, so bildet sich jeder in Γ verlaufende Jordanbogen Λ , der im Unendlichen die Richtung β hat, auf einen Jordanbogen L in H_z ab, der die positive imaginäre Axe im Unendlichen berührt.

Beweis: Es sei $r_0 > 0$ so gewählt, dass erstens der Halbstrahl $|\zeta| \geq r_0, \arg \zeta = \frac{\alpha + \beta}{2}$ in Γ liegt und zweitens der Kreis $|\zeta| = r_0$ den Rand von Γ trifft.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass $|\zeta_0| = r_0$ ist und, allgemein $|\zeta_v| = r$, gesetzt,

$$r_0 < r_1 < r_2 < \dots$$

ist. Für jedes r , sei β_r der Kreisbogen um den Nullpunkt mit dem Radius r , der in einem Punkt von σ beginnt und sich dann in positiver Richtung (um den Nullpunkt) bis zu dem zuerst angetroffenen Schnittpunkt mit dem Rand von Γ erstreckt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass dieser zuerst angetroffene Schnittpunkt stets ζ_v ist. Dann liegen ζ_1, ζ_2, \dots sämtlich auf einem Randstück C von Γ , das ζ_0 und π_0 verbindet. Es sei $P(\zeta)$ das charakteristische Potential von C in Γ . Das durch $s + \beta_0 + C$ begrenzte Gebiet, das von den Bögen $\beta_v, v = 1, 2, \dots$, durchsetzt wird, sei mit Γ^* bezeichnet.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ferner angenommen werden, dass bei der betrachteten konformen Abbildung von Γ auf H_2 : $z=f(\zeta)$ dem Punkte ζ_0 der Nullpunkt $z=0$ entspricht, da sonst die zu untersuchende Abbildung mit einer konformen Abbildung von H_2 auf sich selbst kombiniert werden kann, die $z=\infty$ invariant lässt und linear ist, also auch die Tangente im Unendlichen invariant lässt.

Wir beweisen zuerst: A. Für jedes $\varepsilon > 0$ strebt $P(\zeta)$ gegen 1, wenn man in Γ^* über solche Punkte ins Unendliche geht, für die $\arg \zeta \geq \beta + \varepsilon$ ist.

Denn sonst gäbe es eine Folge von Punkten $\zeta_n \rightarrow \infty$ mit $\arg \zeta_n \geq \beta + \varepsilon$, für die $P(\zeta_n) \leq a < 1$ gilt. Es sei nun κ eine positive Zahl $< \frac{1-a}{4}$

und δ so bestimmt, dass $0 < \delta < \frac{\beta - \alpha}{2}$ und $\sin \delta \leq \frac{1}{2} \kappa^2 \sin \varepsilon$ ist.

Es sei dann r_0' so gewählt, dass der Halbstrahl $s': |\zeta| \geq r_0'$, $\arg \zeta = \beta - \delta$ ganz in Γ verläuft. Man kann offenbar beim Beweis von A. annehmen, dass $r_0 = r_0'$ ist, da bei „Verkürzung“ von C das charakteristische Potential von C nicht wächst. Es sei β' allgemein der Teilbogen von β , der links von s' verläuft. Bezeichnet man die Teilstrecke von s' zwischen $r_v e^{i(\beta-\varepsilon)}$ und $r_{v+1} e^{i(\beta-\delta)}$ mit σ_v , so grenzt der Querschnitt $c_v = \beta' + \sigma_v + \beta_{v+1}$ von Γ ein Teilgebiet Γ_v ab, das s nicht trifft. Der Mittelpunkt von σ_v sei mit q_v bezeichnet. (Vgl. Fig. 4, wo c_v stark ausgezogen ist.)

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

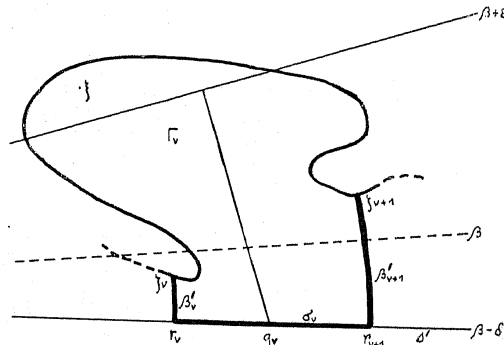


Fig. 4.

1) Es gibt Punkte ζ_n , die in den Gebieten Γ_v mit beliebig großem v liegen. Damit gibt es ein $\xi = \xi_n$, das in einem Gebiet Γ_v liegt mit

$$(27,2) \quad \frac{r_{v+1} - r_v}{r_v} - 1 < \kappa^2 \sin \varepsilon, \quad \frac{r_{v+1}}{r_v} < \frac{3}{2},$$

$$(27,3) \quad |\arg \zeta_v - \beta| < \delta, \quad |\arg \zeta_{v+1} - \beta| < \delta.$$

Da aber $P(\zeta)$ auf c_v nicht negativ und auf dem komplementären Randstück von Γ_v gleich 1 ist, folgt, wenn c_v von ξ aus in bezug auf Γ_v unter dem konformen Winkel γ erscheint,

$$(27,4) \quad 1 - P(\xi) \leq \frac{\gamma}{2\pi},$$

$$1 - a \leq \frac{\gamma}{2\pi}.$$

Wir schätzen nun γ mit Hilfe des Satzes XXVIII ab. Um zunächst den Radius eines Kreises um q_v zu finden, in dem c_v enthalten ist, beachte man (vgl. Fig. 4), dass die halbe Länge der Strecke σ_v nach (27,2)

$$\frac{r_{v+1} - r_v}{2} = \frac{r_v}{2} \left(\frac{r_{v+1}}{r_v} - 1 \right) < \frac{1}{2} r_v \kappa^2 \sin \varepsilon$$

ist. Die Sehne des Bogens β_v aber ist $< 2 r_v \sin \delta$, sodass die Distanz aller Punkte des Querschnitts c_v von q_v kleiner ist als

$$(27,5) \quad \rho = \frac{1}{2} \kappa^2 r_v \sin \varepsilon + 2 r_{v+1} \sin \delta.$$

Andererseits ist aber die Distanz d von ξ bis q_v wenigstens gleich der Länge des Lotes, das von q_v aus auf den Halbstrahl $\arg \zeta = \beta + \varepsilon$ gefällt ist, und daher gilt $d \geq \frac{r_v + r_{v+1}}{2} \sin(\varepsilon + \delta) > r_v \sin \varepsilon$. Daher folgt aus XXVIII wegen (23,1):

$$\gamma < 4\pi \sqrt{\frac{\rho}{d}},$$

$$\gamma < 4\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \kappa^2 r_v \sin \varepsilon + 2 r_{v+1} \sin \delta}{r_v \sin \varepsilon}} \leq 4\pi \sqrt{\kappa^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{r_{v+1}}{r_v} \right)} < 8\pi \kappa,$$

$$\gamma < 8\pi \kappa,$$

sodass wegen (27,4)

$$1 - a < 4\epsilon$$

folgt, entgegen der Definition von ϵ , womit der Fall 1) erledigt ist.

2) Liegt der Fall 1) nicht vor, so liegen unendlich viele ξ_k in einem festen Gebiet Γ , und es gibt unter ihnen solche mit beliebig grosser Distanz von q . Ist dann ρ der Radius eines Kreises um q , in dem der ganze Querschnitt c liegt, so kann man ein ξ_k finden, dessen Distanz d von q so gross ist, dass

$$4\pi \sqrt{\frac{\rho}{d}} < 2\pi(1-a)$$

ist. Da aber nach dem Satz XXVIII

$$\gamma < 4\pi \sqrt{\frac{\rho}{d}}$$

ist, steht dies im Widerspruch zu (27.4). Damit ist die Behauptung A. bewiesen.

28. Die obige Behauptung A. kann man offenbar insbesondere so formulieren:

Es gibt eine Folge positiver $R_1 < R_2 < R_3 \dots, R_1 > r_0$, die ins Unendliche wächst, mit der Eigenschaft, dass, wenn für ein ζ aus $\Gamma^ \mid \zeta \mid \geq R_n$, $\arg \zeta \geq \beta + \frac{1}{n}$ gilt, dann sicher $1 \geq P(\zeta) \geq 1 - \frac{1}{n}$ ist.*

Wir setzen nun für $n = 1, 2, \dots$

$$p_n = R_n e^{i(\beta + \frac{1}{n})}, \quad p'_n = R_{n+1} e^{i(\beta + \frac{1}{n})}$$

und verbinden jedes Punktepaar p_n, p'_n durch die Strecke $te^{i(\beta + \frac{1}{n})}$, $R_n \leq t \leq R_{n+1}$, jedes Punktepaar p'_n, p_{n+1} durch den Kreisbogen $|\zeta| = R_{n+1}$, $\beta + \frac{1}{n} \leq \arg \zeta \leq \beta + \frac{1}{n+1}$, und endlich p_1 mit ζ_0 durch eine Strecke. Dann erhält man einen ins Unendliche verlaufenden Jordanbogen Λ_1 , der in ζ_0 beginnt, durch alle Punkte p_n, p'_n hindurchgeht und die Eigenschaft hat, dass, wenn man längs der Stücke von Λ_1 , die in Γ^* liegen (sofern es solche gibt), ins Unendliche geht, $P(\zeta)$ gegen 1 strebt. Wir bezeichnen die höchstens abzählbar vielen Teilbögen von Λ_1 , in denen Λ_1 das Gebiet Γ^* durchsetzt, in irgend einer Reihenfolge mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots$.

Es sei nun Λ ein bis auf seine Endpunkte in Γ verlaufender Jordanbogen, der in ζ_0 mit der Richtung β mündet. Wir dürfen annehmen,

dass Λ im Punkte ζ_0 beginnt. Wir betrachten andererseits das Gebiet $\bar{\Gamma}$, das durch $\Lambda_1 + \beta_0 + s$ begrenzt ist und ein unendliches Stück des Halbstrahles $\arg \zeta = \beta$ enthält (Vgl. Fig. 5). Wir nehmen zuerst an, dass Λ bis auf ζ_0 und π_0 in $\bar{\Gamma}$ verläuft.

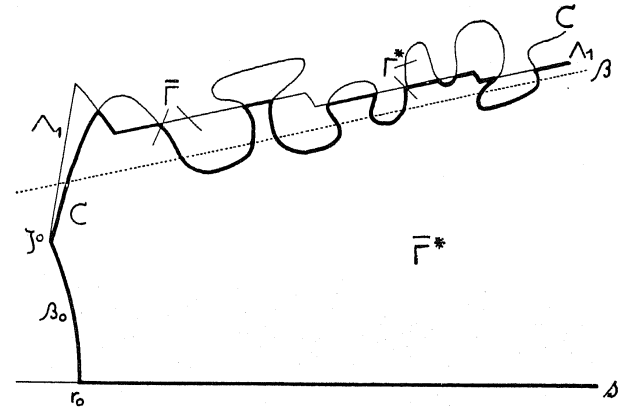


Fig. 5.

Unser Satz ist dann für ein solches Λ bewiesen, wenn wir zeigen, dass $P(\zeta)$ gegen 1 strebt, wenn man längs Λ ins Unendliche geht. Denn da ζ_0 in $z = 0$ übergeht, gilt

$$(28.1) \quad P(\zeta) = \frac{1}{\pi} \left(\arg f(\zeta) + \frac{\pi}{2} \right).$$

und aus $P(\zeta) \rightarrow 1$ folgt $\arg f(\zeta) \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Es sei nun $P_0(\zeta)$ das in $\bar{\Gamma}$ beschränkte Potential, das durch die folgenden Randwerte festgelegt ist: $P_0(\zeta)$ soll, von einer Nullmenge abgesehen, 1) auf $s + \beta_0$ gleich 0; 2) auf den in Γ^* verlaufenden Stücken λ_n von Λ_1 gleich $P(\zeta)$; 3) auf den ausserhalb und auf dem Rand von Γ^* verlaufenden Teilstücken von Λ_1 gleich 1 sein.

Offenbar kann $P_0(\zeta)$ ohne weiteres gebildet werden, indem man $\bar{\Gamma}$ auf den Einheitskreis konform abbildet und das Poissonsche Integral benützt. $P_0(\zeta)$ ist eindeutig bestimmt, und die Werte von $P_0(\zeta)$ in $\bar{\Gamma}$ liegen zwischen 0 und 1. Da ferner die Randbedingungen sich nur auf höchstens abzählbar viele Randstücke von $\bar{\Gamma}$ beziehen, denen beim

Übergang zum Einheitskreis jedes Mal ganze Teilbögen des Einheitskreises entsprechen, werden die angegebenen Randwerte von $P_0(\zeta)$ in allen erreichbaren Randpunkten bis auf abzählbar viele *allseitig* angenommen.

Es sei Γ^* das einfach zusammenhängende Gebiet, das Γ und Γ^* gemeinsam ist (Vgl. Fig. 5, in der der Rand von Γ^* stark ausgezogen ist). Λ liegt offenbar in Γ^* ,

Dann gilt in Γ^* :

$$(28,2) \quad P_0(\zeta) = P(\zeta).$$

Denn auf $s + \beta_0$ ist $P_0(\zeta) = 0$, auf den in Γ^* liegenden Teilstücken λ_v von Λ_1 ist $P_0(\zeta) = P(\zeta)$ und nach XXV'' auf den in und auf dem Rande von Γ^* liegenden Teilstücken von C ist in den aus Γ^* erreichbaren Punkten $P(\zeta) = 1$, bis auf eine Nullmenge in bezug auf Γ^* . Dies ist aber der gesamte Rand von Γ^* , sodass (28,2) bis auf eine Nullmenge auf dem Rand von Γ^* gilt und daher wegen der Beschränktheit von $P(\zeta) - P_0(\zeta)$ auch im Innern. Insbesondere gilt also auf Λ

$$1 \geq P(\zeta) \geq P_0(\zeta),$$

und es genügt zu zeigen, dass $P_0(\zeta)$ auf Λ gegen 1 strebt. Wir vergleichen nun $P_0(\zeta)$ in Γ mit dem charakteristischen Potential $P_1(\zeta)$ von Λ_1 in bezug auf Γ , das sich ja von $P_0(\zeta)$ in bezug auf die Randwerte nur dadurch unterscheidet, dass es auf den Stücken von Λ_1 , die in Γ^* liegen, nicht gleich $P(\zeta)$ ist, sondern den Wert 1 hat. Es gilt daher

$$(28,3) \quad P_1(\zeta) - P_0(\zeta) = P_2(\zeta),$$

wo $P_2(\zeta)$ ein in Γ beschränktes reguläres Potential ist, das auf dem Rande von Γ nur in den Teilbögen λ_v von 0 verschieden ist. Und zwar ist $P_2(\zeta)$ auf λ_v gleich $P_1(\zeta) - P_0(\zeta) = 1 - P(\zeta)$. Nach dem oben Bewiesenen strebt aber $1 - P(\zeta)$ gegen 0, wenn man längs der Bögen λ_v ins Unendliche geht. Daher streben die Randwerte von $P_2(\zeta)$ gegen 0, wenn man längs des Randes von Γ ins Unendliche geht. Wegen der Beschränktheit von $P_2(\zeta)$ folgt daraus, dass die Werte von $P_2(\zeta)$ gegen 0 streben, wenn man allseitig aus Γ gegen den unendlich fernen Randpunkt geht. Daher strebt $P_2(\zeta)$ insbesondere gegen 0, wenn man längs Λ ins Unendliche geht, und wir haben wegen (28,3) nur zu beweisen, dass $P_1(\zeta)$ längs Λ gegen 1 strebt. Dies ergibt sich aber sofort, wenn man Γ so konform auf H_z abbildet, dass die unendlich fernen Punkte

einander entsprechen und ζ_0 in $z = 0$ übergeht. Denn diese Abbildung ist ja nach Satz X im Unendlichen winkelparportional, sodass Λ in eine Kurve übergeht, die die positive imaginäre Axe im Unendlichen berührt. Dies bedeutet aber dann, dass das zugehörige charakteristische Potential gegen 1 strebt, wie aus der zu (28,1) analogen Relation oder auch direkt aus dem Satz XXII folgt.

Verläuft aber Λ nicht ganz in Γ (wohl aber in Γ^*), so kann man offenbar eine ζ_0 mit π_0 verbindende und sonst in Γ verlaufende Jordankurve Λ' finden, sodass Λ zwischen C und Λ' verläuft. Bei der betrachteten Abbildung von Γ auf H_z geht Λ auf jeden Fall in einen Jordanbogen über, der dann *zwischen* der positiven reellen Axe und der Bildkurve L' von Λ' ins Unendliche verläuft und daher dort die imaginäre Axe berühren muss, da dies für L' nach dem bereits Bewiesenen der Fall ist. *Damit ist der Satz XXXII vollständig bewiesen.*

Es sei noch bemerkt, dass wir beim Beweis des Satzes XXXII anstatt des recht tief liegenden Satzes XXVIII auch mit den Abschätzungen eines der Sätze XXVI oder XXVII auskommen könnten, wobei allerdings gewisse Vorbereitungen erst nötig wären, die sich bei der Anwendung des Satzes XXVIII erübrigen.

29. Hauptsatz über die Winkelparportionalität am Rande bei konformer Abbildung. XXXIII. *Ein einfach zusammenhängendes Gebiet Γ der ζ -Ebene möge im Unendlichen einen Randpunkt π_0 besitzen, der längs aller in Γ ins Unendliche verlaufender Jordanbögen erreichbar ist, deren Richtungen einem offenen Intervall (α, β) angehören. Es sei zugleich (α, β) das grösste offene Intervall dieser Art. Es sei $z = f(\zeta)$ eine konforme Abbildung von Γ auf die rechte Halbebene H_z der z -Ebene, bei der π_0 in $z = \infty$ übergeht.*

Notwendig und hinreichend, damit diese Abbildung im Unendlichen im Winkel winkelparportional ist, ist die Existenz von zwei unendlichen Folgen erreichbarer Randpunkte ζ_v, ζ'_v ($v = 1, 2, \dots$) mit

$$(29,1) \quad |\zeta_v| \uparrow \infty, \quad \left| \frac{\zeta_v + 1}{\zeta_v} \right| \rightarrow 1, \arg \zeta_v \rightarrow \beta;$$

$$(29,2) \quad |\zeta'_v| \uparrow \infty, \quad \left| \frac{\zeta'_v + 1}{\zeta'_v} \right| \rightarrow 1, \arg \zeta'_v \rightarrow \alpha.$$

Beweis: Es sei die betrachtete konforme Abbildung winkelparportional im Unendlichen. Der Proportionalitätsfaktor ist dann nach Satz XII gleich $\frac{\beta - \alpha}{\pi}$.

Gäbe es nun keine Folge ζ_n mit der verlangten Eigenschaft, so müsste es zwei positive Zahlen ε, d und zwei ins Unendliche wachsende Folgen positiver Zahlen r_n, r'_n mit

$$\frac{r'_n}{r_n} = e^\varepsilon, \quad r_{n+1} > r'_n$$

geben, derart, dass die Kreisbogenvierecke

$$(R_n) \quad r_n < |\zeta| < r'_n, \quad |\arg \zeta - \beta| < d$$

nebst ihren Randpunkten im Innern von Γ liegen würden. Die Funktion $H(\zeta) = \frac{\beta - \alpha}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arg f(\zeta) \right)$, wo der Hauptwert zu nehmen ist, erfüllt dann von einem ν an die Voraussetzungen des Satzes XXXI auf jedem R_n . Denn $H(\zeta)$ ist innerhalb Γ durchweg positiv, und ihre Werte auf dem Halbstrahl $\arg \zeta = \beta - d$ konvergieren wegen der Winkelproportionalität mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{\beta - \alpha}{\pi}$ gegen d , bleiben also ausserhalb

eines gewissen Kreises um den Nullpunkt grösser als $\frac{d}{2}$. Ist daher $u(\varepsilon, d)$ die Funktion des Satzes XXXI, so gilt für $u_0 = \min(d, u(\varepsilon, d))$ von einem ν an:

$$(29,3) \quad H\left(\sqrt{r_n r'_n} e^{i\left(\beta - \frac{u_0}{2}\right)}\right) \geq u(\varepsilon, d) \geq u_0.$$

Andererseits aber folgt aus der Winkelproportionalität mit dem Faktor $\frac{\beta - \alpha}{\pi}$ für $\nu \rightarrow \infty$

$$H\left(\sqrt{r_n r'_n} e^{i\left(\beta - \frac{u_0}{2}\right)}\right) \rightarrow \frac{u_0}{2},$$

was (29,3) widerspricht.

Aus Symmetriegründen muss es auch eine Folge ζ'_n geben mit den Eigenschaften (29,2), womit die Notwendigkeit unserer Bedingung erwiesen ist.

Ist aber andererseits die im Satz angegebene Bedingung erfüllt, so folgt aus dem Satz XXXII, dass es in Γ einen Jordanbogen Λ gibt, der ins Unendliche verläuft, dort die Richtung β hat und dessen Bildbogen L in H_z die positive imaginäre Axe im Unendlichen berührt. Aus Symmetriegründen gibt es ebenso einen Jordanbogen Λ_1 , der in Γ ins Unendliche verläuft, dort die Richtung α hat und dessen Bildbogen L_1

in H_z die negative imaginäre Axe im Unendlichen berührt. Wir können Λ und Λ_1 in ein und demselben Punkte ζ_0 von Γ beginnen lassen und zugleich annehmen, dass sie sich nicht mehr im Endlichen schneiden. Dann wird durch unsere Abbildung das von $\Lambda + \Lambda_1$ begrenzte Teilgebiet Γ' von Γ auf ein Teilgebiet G' von H_z abgebildet, das von $L + L_1$ begrenzt wird. Diese Abbildung ist, wie sich durch zweimalige Anwendung des Satzes X ergibt, im Unendlichen winkelproportional mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{\beta - \alpha}{\pi}$. Daher sind etwa für die in G' verlaufen-

den unendlichen Teilstücke der Strahlen $\arg z = \pm \frac{\pi}{4}$ die Voraussetzungen des Satzes XI erfüllt, und aus diesem Satz, angewandt auf Γ' und H_z , ergibt sich die Winkelproportionalität der Abbildung unmittelbar. Damit ist der Satz XXXIII bewiesen.

Offenbar bleibt der Satz XXXIII auch dann richtig, wenn die Halbebene H_z in ihm durch irgend einen Winkelraum mit der Oeffnung $\gamma > 0$ ersetzt wird. Nur ist dann der Winkelproportionalitätsfaktor $\frac{\beta - \alpha}{\pi}$

natürlich durch $\frac{\beta - \alpha}{\gamma}$ zu ersetzen. Zum Beweis braucht man nur den Winkelraum durch eine Potenztransformation auf eine Halbebene abzubilden.

Der Satz XXIII der Nr. 19, ebenso wie der in Nr. 19 erwähnte Satz von Herrn J. Wolff sind unmittelbare Folgerungen aus dem Satz XXXIII.

Kapitel III.

Die Faltensätze.

§ 7. Eine vorbereitende Abschätzung.

30. Es sei nun Γ ein Gebiet, das den Voraussetzungen des Satzes XXXIII genügt und sich auf H_z vermöge $\zeta = \varphi(z)$, $z = f(\zeta)$ so abbildet, dass π_0 in $z = \infty$ übergeht und die Abbildung im Unendlichen im Winkel *winkeltreu* ist. Dann muss $\beta - \alpha = \pi$ sein, und es möge Γ so um den Nullpunkt gedreht sein, dass $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ist. Ferner müssen dann die notwendigen Bedingungen des Satzes XXXIII erfüllt sein,

sodass es zwei Zahlenfolgen ζ_n, ζ'_n mit den Eigenschaften (29,1), (29,2) gibt.

Ist dann Λ der Bildbogen der positiven reellen Axe der z -Ebene, so wird Λ nach dem Korollar zum Satze XVI für $r \geq r_0'$ von jedem Kreis $|\zeta| = r$ genau in einem Punkte getroffen.

Es sei nun $R_0 > 1$ so gross gewählt, dass folgendes zutrifft:

1) Entfernt man aus H_z die Halbkreisscheibe um den Nullpunkt mit dem Radius R_0 , so sei das übrig bleibende Gebiet mit \bar{H} bezeichnet, sein Bildgebiet in der ζ -Ebene mit $\bar{\Gamma}$. Dann enthält $\bar{\Gamma}$ den Nullpunkt $\zeta = 0$ nicht im Innern.

2) Jeder Punkt des Bildbogens des Halbstrahles $z \geq R_0$ auf Λ hat eine Distanz vom Nullpunkt $> r_0'$.

Zugleich sei R_0 so gewählt, dass den Punkten $R_0 e^{i\frac{\pi}{2}}$ einfache erreichbare Randpunkte von $\bar{\Gamma}$ entsprechen und $\bar{\Gamma}$ daher von $\bar{\Gamma}$ durch einen *Jordanquerschnitt* $\bar{\Lambda}$ abgegrenzt wird. Es sei \bar{r} das Maximum von $|\zeta|$ auf $\bar{\Lambda}$.

Es sei $r_0 > r_0'$ so gewählt, dass *erstens* der Halbstrahl $\zeta > r_0$ in $\bar{\Gamma}$ liegt, dass *zweitens* für jedes $r \geq r_0$ der Kreisbogen des Kreises $|\zeta| = r$ zwischen der positiven reellen Axe und Λ ganz in $\bar{\Gamma}$ enthalten ist und dass *drittens* $r_0 > \bar{r}$ ist, sodass alle Punkte des Bildes $\bar{\Lambda}$ der Halbkreislinie $|z| = R_0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ innerhalb des Kreises $|\zeta| < r_0$ liegen.

Durch jeden Punkt der positiven reellen Axe mit $\zeta = r > r_0$ lege man einen Kreisbogen um den Nullpunkt und verlängere ihn nach oben und unten jeweils bis zum ersten Treffpunkt mit dem Rande von $\bar{\Gamma}$. Die Gesamtheit aller inneren Punkte aller dieser Kreisbögen bildet ein Teilgebiet Γ^* von $\bar{\Gamma}$ und $\bar{\Gamma}$, das wir als den *fallentreien Kern* von $\bar{\Gamma}$ bezeichnen wollen. Offenbar hängt Γ^* sowohl von der Lage des Nullpunktes als auch von der Wahl von r_0 ab. Doch ist dies für das Folgende nicht wesentlich.

Für jedes $r > r_0$ soll der in Γ^* enthaltene Kreisbogen des Kreises $|\zeta| = r$ nebst seinen Endpunkten mit Θ_r bezeichnet werden. Andererseits sollen die Halbkreise $|z| = r, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ mit L_r bezeichnet werden. Der Bildbogen Λ_r von L_r in $\bar{\Gamma}$ ist zum Teil in Γ^* enthalten, zum Teil vielleicht nicht. Die Gesamtheit der Punkte dieses Bildbogens, die in Γ^* enthalten sind, nebst ihren Häufungsstellen, möge

mit Λ_r^* bezeichnet werden. Wir wollen dann zuerst die folgende Tatsache beweisen:

XXXIV. *Gelten die in dieser Nummer eingeführten Voraussetzungen und Bezeichnungen, so lässt sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r(\varepsilon) > R_0$ so wählen, dass für $r \geq r(\varepsilon)$ Λ_r^* im Kreisring*

$$(30,1) \quad |\varphi(r)| e^{-\varepsilon} \leq |\zeta| \leq |\varphi(r)| e^{\varepsilon} \text{ liegt.}$$

Beweis: Es genügt, die Behauptung für die Teilmenge Λ_r' von Λ_r^* zu beweisen, der die Punkte von L_r mit $\arg z \geq 0$ entsprechen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass für $v = 1, 2, 3, \dots$ $|\zeta_v| > r_0$ ist und dass alle ζ_v zum Rand von Γ^* gehören, da man ja diese Randpunkte sonst durch die Endpunkte der entsprechenden Θ_r ersetzen kann.

Man kann offenbar $\varepsilon < 1$ annehmen. Sei dann

$$(30,2) \quad \delta = \frac{\varepsilon}{6400}.$$

Wegen der Winkeltreue im Unendlichen und nach dem Korollar zum Satz XVI wird auf der Bildkurve C_δ des Halbstrahls $\arg z = \frac{\pi}{2} - \delta$ von einem r an

$$(30,3) \quad \left| \arg \zeta - \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \right| < \frac{\delta}{2}$$

sein, und zugleich wird C_δ von jedem Kreis mit diesem und grösserem r als Radius genau in einem Punkt getroffen werden. Es sei dies für alle $r \geq \frac{r_1}{e}$ stets der Fall.

Dem Punkt auf C_δ mit der Distanz r_1 vom Nullpunkt möge der Punkt $R_1 e^{i(\frac{\pi}{2} - \delta)}$ entsprechen. R_1 geht mit r_1 ins Unendliche und daher kann r_1 so gross angenommen werden, dass $R_1 > R_0$ ist und ferner für alle $R \geq R_1$ und für alle ϑ mit $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} - \delta$

$$(30,4) \quad \left| \log \left| \frac{\varphi(R e^{i\vartheta})}{\varphi(R)} \right| \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt, was nach Satz XV sicher möglich ist. Endlich sei $r_1 > 64 e r_0$ und so gross, dass für alle ζ_v mit $|\zeta_v| \geq \frac{r_1}{e}$

$$(30,5) \quad \left| \frac{\zeta_v}{\zeta_{v-1}} \right| < e^{\varepsilon}$$

und

$$(30,6) \quad \left| \arg \zeta_0 - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\delta}{2}$$

ist. Um XXXIV zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass für alle $r \geq R_1$ jeder Punkt von Λ_r' im Kreisring

$$(30,7) \quad \left| \varphi \left(re^{i\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)} \right) \right| e^{-\frac{\delta}{2}} \leq |\zeta| \leq \left| \varphi \left(re^{i\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)} \right) \right| e^{\frac{\delta}{2}}$$

liegt.

31. Für die Punkte von Λ_r' , denen z mit $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ entsprechen, folgt (30,7) ohne weiteres aus (30,4). Es sei nun $r \geq R_1$, und man setze

$$(31,1) \quad re^{i\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)} = z_0, \quad \varphi(z_0) = \zeta_0.$$

Da $\delta < \frac{1}{50}$ ist, gibt es unter den ζ_v zwei, ζ' und ζ'' , für die bzw.

$$(31,2) \quad |\zeta_0| e^{-50\delta} < |\zeta'| < |\zeta_0| e^{-49\delta}, \quad |\zeta_0| e^{49\delta} < |\zeta''| < |\zeta_0| e^{50\delta}$$

ist. Es sei ferner ζ^* ein ζ_v mit

$$(31,3) \quad e^{-\frac{\delta}{2}} |\zeta_0| < |\zeta_v| < e^{\frac{\delta}{2}} |\zeta_0|.$$

Es seien nun k', k'' (vgl. Fig. 6⁵⁰⁾) die Kreisbögen um den Null-

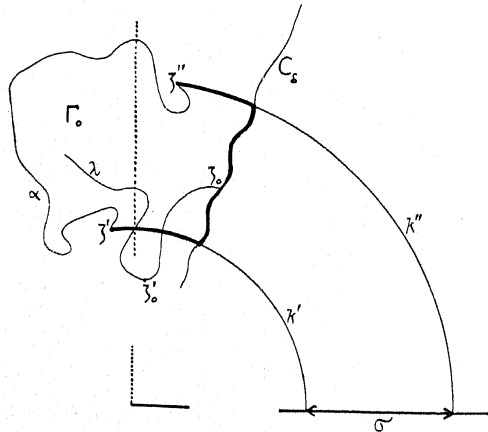


Fig. 6.

⁵⁰⁾ Diese Figur gibt die Verhältnisse nur schematisch wieder.

punkt durch ζ' bzw. ζ'' und zwar zwischen ζ' und $|\zeta'|$ bzw. zwischen ζ'' und $|\zeta''|$. Die Strecke $<|\zeta'|, |\zeta''|>$ auf der reellen Axe sei mit σ bezeichnet. Dann stellt $k' + \sigma + k''$ einen Querschnitt q' von Γ dar, der zusammen mit einem Randstück α von Γ ein Teilgebiet Γ_0 von Γ abgrenzt, in dem ζ_0 enthalten ist. α verbindet offenbar ζ' mit ζ'' .

Wir zeigen nun zuerst, dass α von ζ_0 aus in bezug auf Γ unter einem konformen Winkel $> \pi$ erscheint. Es genügt nach Satz XXIV zu zeigen, dass dies in bezug auf Γ_0 der Fall ist. Bildet man aber Γ_0 durch eine logarithmische Abbildung $w = \log \zeta$ so auf die w -Ebene ab, dass ζ^* in $w=0$ übergeht, so seien die Bilder von $\Gamma_0, \alpha, q', \zeta_0$ resp. mit G, β, Q, w_0 bezeichnet. Dann gilt $|w_0| < 3\delta$. Denn wegen (31,3), (30,3) und (30,6) gilt

$$\left| \log |\zeta_0| - \log |\zeta^*| \right| \leq \frac{\delta}{2},$$

$$\left| \arg \zeta^* - \arg \zeta_0 \right| < \frac{\delta}{2} + \delta + \frac{\delta}{2} = 2\delta,$$

so dass

$$|w_0| = \left| \log \zeta_0 - \log \zeta^* \right| \leq \sqrt{(2\delta)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2} < 3\delta$$

ist.

Andererseits liegt Q ausserhalb des Kreises $|w| = 48\delta$. Denn das Bild von σ hat vom Nullpunkt eine Distanz

$$> \pi - 2\delta > 3 > 48\delta.$$

Was aber die Distanzen der Bilder von k' und k'' vom Nullpunkt anbetrifft, so sind ihre Projektionen auf die reelle Axe $> 48\delta$.

Übt man aber auf die Konfiguration G, w_0 die Transformation $u = \frac{1}{w}$ aus, so geht der Nullpunkt in den unendlich fernen Punkt über und G in ein Gebiet G_1 , das den unendlich fernen Punkt nicht im Innern enthält. Das Bild Q_1 von Q liegt dann innerhalb des Kreises $|u| < \frac{1}{48\delta}$, und die Distanz des Bildes u_0 von w_0 vom Nullpunkt ist $> \frac{1}{3\delta}$. Daher gilt nach dem Satz XXVIII

$$m_{G_1, u_0} Q_1 = m_{\Gamma_0, \zeta_0} q' < 4\pi \sqrt{\frac{1}{48\delta} \cdot \frac{1}{3\delta}} = \pi.$$

Daher muss

$$(31,3) \quad m_{\Gamma_0, \zeta_0} \alpha > \pi$$

sein, wie behauptet.

Sind nun die ζ', ζ'' in H_z entsprechenden Punkte etwa z', z'' , wo $0 < |z_1| < |z_0|$ ist, so erscheint die Strecke $\langle z', z'' \rangle$ von z_0 aus in bezug auf H_z unter einem konformen Winkel $> \pi$, so dass z_0 innerhalb des auf $\langle z_1, z_2 \rangle$ als Durchmesser errichteten, in H_z verlaufenden Halbkreises k_0 liegt. Dann aber muss auch jeder Punkt des Kreisbogens $\lambda: |z| = |z_0|, \frac{\pi}{2} > \arg z \geq \frac{\pi}{2} - \delta$ in k_0 liegen, so dass $\langle z_1, z_2 \rangle$

von jedem Punkt von λ aus unter einem konformen Winkel $> \pi$ in bezug auf H_z erscheint. Ist daher λ (vgl. Fig. 6) das Bild von λ in Γ , so erscheint α von allen Punkten von λ aus in bezug auf Γ unter einem konformen Winkel, der $> \pi$ ist.

32. Es sei nun ζ_0' ein Punkt von λ , der *ausserhalb* Γ_0 liegt. Dann werden ζ_0' und α voneinander durch den in Figur 6 stark ausgezogenen Querschnitt q von Γ getrennt. Dieser Querschnitt q besteht aus dem Stück von C_i zwischen k' und k'' , sowie aus den Stücken von k' und k'' zwischen ζ' , bzw. ζ'' und C_i . Um eine Abschätzung nach oben für den konformen Winkel $m_{\Gamma, \zeta_0'} \alpha$ zu finden, unter dem α von ζ_0' aus in bezug auf Γ erscheint, darf man nach Satz XXIV α durch q ersetzen, und Γ durch das entsprechende Teilgebiet Γ' . Wird ferner das aus Γ durch Weglassen des zwischen α und q enthaltenen Stücks von Γ entstehende Teilgebiet von Γ' mit $\bar{\Gamma}'$ bezeichnet, so wird $\bar{\Gamma}'$ von Γ' durch den Querschnitt $\bar{\Lambda}$ abgegrenzt und lässt sich als dasjenige der beiden in Γ' an $\bar{\Lambda}$ angrenzenden Teilgebiete charakterisieren, in dem ζ_0' liegt. Aus der Formel (20,5) des Satzes XXV folgt

$$(32,1) \quad m_{\Gamma', \zeta_0'} q \leq m_{\bar{\Gamma}', \zeta_0'} q + m_{\bar{\Gamma}', \zeta_0'} \bar{\Lambda}.$$

Um hier $m_{\bar{\Gamma}', \zeta_0'} q$ abzuschätzen, bilde man $\bar{\Gamma}'$ logarithmisch vermöge $w = \log \zeta$ auf die w -Ebene ab. Dann geht ζ_0 in einen Punkt w_0 über, von dem die Bildpunkte von q nach (31,3), (30,3) und (30,6) höchstens den Abstand $\rho = \sqrt{(50\delta)^2 + (2\delta)^2} < 51\delta$ haben. Es sei d der Abstand von $\log \zeta_0'$ bis w_0 . Dann folgt aus dem Satz XXVIII, wenn $d > \rho$ ist,

$$(32,2) \quad m_{\bar{\Gamma}', \zeta_0'} q < 4\pi \sqrt{\frac{\rho}{d}} < 4\pi \sqrt{\frac{50\delta}{d}}.$$

Andererseits folgt nach Satz XXVIII

$$m_{\bar{\Gamma}', \zeta_0'} \bar{\Lambda} < 4\pi \sqrt{\frac{r_0}{|\zeta_0'|}}$$

und daher, wenn

$$(32,3) \quad |\zeta_0'| \geq 64 r_0$$

ist,

$$m_{\bar{\Gamma}', \zeta_0'} \bar{\Lambda} < \frac{\pi}{2},$$

so dass schliesslich unter der Annahme (32,3) folgt

$$\pi < m_{\bar{\Gamma}', \zeta_0'} q < \frac{\pi}{2} + 4\pi \sqrt{\frac{50\delta}{d}},$$

$$\sqrt{\frac{50\delta}{d}} > \frac{1}{8}, \quad \frac{50\delta}{d} > \frac{1}{64}, \quad d < 3200\delta.$$

Und die gleiche Abschätzung gilt natürlich erst recht, wenn $d \leq \rho < 50\delta$ ist, so dass, wegen (30,2),

$$d < 3200 \cdot \frac{\varepsilon}{6400} = \frac{\varepsilon}{2}$$

folgt. Aus $d \geq \left| \Re \log \frac{\zeta_0'}{\zeta_0} \right|$ folgt dann

$$(32,4) \quad |\zeta_0| e^{-\frac{\varepsilon}{2}} < |\zeta_0'| < |\zeta_0| e^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

(32,4) ist damit für alle Punkte auf λ ausserhalb Γ_0 unter der Annahme (32,3) bewiesen. Aus (32,4) folgt aber dann weiter

$$|\zeta_0'| > \frac{|\zeta_0|}{e} \geq \frac{r_1}{e} > 64 r_0,$$

sodass in (32,3) nie das Gleichheitszeichen gelten kann. Gäbe es aber auf λ einen Punkt ζ_0' ausserhalb Γ_0 mit $|\zeta_0'| < 64 r_0$, so müsste auf einem Bogen von λ , der von diesem Punkt bis zum Rand von Γ_0 führt, ein Punkt existieren, in dem (32,3) mit dem Gleichheitszeichen gilt. Denn ein solcher Teilbogen von λ muss zuerst k' oder k'' treffen; der Radius von k' aber ist grösser als $\frac{|\zeta_0|}{e} > \frac{r_1}{e} > 64 r_0$. Daher gilt in allen

Punkten von λ ausserhalb Γ_0 die Relation (32,4). Liegt aber ein Punkt ζ_0' von λ in oder auf dem Rande von Γ_0 und zugleich in Γ^* , so gilt für ihn nach Konstruktion von Γ^* erst recht (32,4). Damit ist aber (32,4) für alle Punkte von λ aus Γ^* bewiesen, und damit ist auch der Beweis von XXXIV erbracht.

§ 8. Der erste Faltensatz.

33. Aus XXXIV kann nun leicht eine analoge Behauptung über das Bild λ_r von Θ_r in H_z gefolgert werden. Es sei das Minimum von $|z|$ auf λ_r mit r_1 und das Maximum von $|z|$ auf λ_r mit r_2 bezeichnet, und es möge

$$r_1 = |z_1|, \quad r_2 = |z_2|$$

sein, wo z_1 und z_2 auf λ_r liegen.

Offenbar geht dann mit r auch r_1 (und dann auch r_2) ins Unendliche, da ja Θ_r ein Querschnitt von Γ ist, der gegen π_0 konvergiert, so dass das Analoge für den Bildquerschnitt λ_r von Θ_r in H_z der Fall sein muss.

Den Punkten z_1, z_2, r_1, r_2 von H_z mögen in Γ resp. die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, c_1, c_2$ entsprechen. Da z_1 und z_2 auf λ_r liegen, liegen ζ_1 und ζ_2 auf Θ_r , so dass $|\zeta_1| = |\zeta_2| = r$ ist. Andererseits liegen ζ_1 und c_1 auf Λ_r^* , so dass mit $r \rightarrow \infty$ nach XXXIV

$$\frac{|\zeta_1|}{|c_1|} = \frac{r}{|c_1|} \rightarrow 1$$

gilt und analog

$$\frac{r}{|c_2|} \rightarrow 1, \quad \frac{|c_1|}{|c_2|} \rightarrow 1.$$

Daraus folgt aber nach Satz XV, dass auch

$$(33,1) \quad \frac{|f(c_1)|}{|f(c_2)|} = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow 1$$

gilt.

Um die Bedeutung der Relation (33,1) zu erkennen, führen wir den Begriff der *Hauptfalten* von Γ ein. Die Randpunkte von Γ^* , die nicht zum Rand von Γ gehören, liegen auf gewissen Kreisbögen um dem Nullpunkt. Wird ein solcher Kreisbogen nach beiden Seiten bis zu seinen Treffpunkten mit dem Rand von Γ verlängert, so ergibt sich offenbar ein Querschnitt von Γ , dessen eines Ufer an Γ^* grenzt, das andere aber an ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet \mathfrak{F} von Γ , das wir als ein „durch diesen Querschnitt abgeschlossenes“ *Faltengebiet* oder eine *Hauptfalte* von Γ bezeichnen. Liegen die Randpunkte von \mathfrak{F} , die zum Rand von Γ gehören, in einem Randstück L von Γ , so sagen wir auch, \mathfrak{F} sei eine Hauptfalte von L . Die Vereinigungsmenge eines Faltengebiets mit dessen Rand soll ein *Faltenbereich* heissen.

Ist ζ ein Punkt aus einem Faltenbereich von Γ , so verstehen wir unter ρ_ζ den Radius des Querschnitts, durch den das zugehörige Falten-

gebiet abgeschlossen wird. Liegt aber ein Punkt ζ innerhalb oder auf dem Rande von Γ^* , so soll unter ρ_ζ einfach $|\zeta|$ verstanden werden.

Es ist leicht einzusehen, dass, wenn ζ über das Innere oder den Rand von Γ gegen π_0 strebt, ρ_ζ ins Unendliche konvergieren muss. Denn sonst gäbe es eine Punktfolge ζ_n aus Γ mit $\zeta_n \rightarrow \pi_0$, für die alle ρ_{ζ_n} beschränkt $< r$ wären. Dann aber müsste der Querschnitt Θ_r von Γ alle Punkte der Querschnitte mit den Radien ρ_{ζ_n} von π_0 trennen, damit aber auch die durch diese Querschnitte abgeschlossenen Faltengebiete und damit auch die Punkte ζ_n , die also nicht gegen π_0 konvergieren könnten.

Bei der obigen Definition der Hauptfalten und der Grösse ρ_ζ ist offenbar der Nullpunkt wesentlich ausgezeichnet. Will man analoge Grössen unter Zugrundelegung eines vom Nullpunkt verschiedenen Punktes ζ_0 definieren, so ist es am einfachsten, die Ebene einer Parallelverschiebung zu unterwerfen, bei der ζ_0 in den Nullpunkt übergeht, und sodann, nachdem im entsprechend verschobenen Gebiet die Hauptfalten und die zugehörigen abschliessenden Querschnitte gebildet sind, die Transformation rückgängig zu machen. Man erhält dann ein System von Teilgebieten \mathfrak{F}' von Γ , deren abschliessende Querschnitte Kreisbögen mit dem Mittelpunkt ζ_0 sind. Ist dann ζ ein innerer oder Randpunkt eines \mathfrak{F}' , so bezeichnen wir den Radius des \mathfrak{F}' abschliessenden Querschnitts mit ρ'_ζ . Wenn ζ in keinem \mathfrak{F}' liegt, ist ρ'_ζ ganz analog zu definieren, wie oben ρ_ζ .

Für das Folgende ist nun die Tatsache von Interesse, dass, wenn ζ über das Innere und den Rand von Γ gegen π_0 konvergiert,

$$(33,2) \quad \lim |\rho'_\zeta - \rho_\zeta| \leq |\zeta_0|$$

ist. Um diese Relation zu beweisen, seien \mathfrak{F} bzw. \mathfrak{F}' die Hauptfalten in bezug auf den Nullpunkt bzw. ζ_0 , die zu ζ gehören, k, k' die Kreise um den Nullpunkt bzw. ζ_0 , auf denen die \mathfrak{F} bzw. \mathfrak{F}' abschliessenden Querschnitte q bzw. q' liegen, ρ_ζ bzw. ρ'_ζ ihre Radien. Haben k und k' wenigstens einen Punkt gemeinsam, so muss bekanntlich $|\rho'_\zeta - \rho_\zeta| \leq |\zeta_0|$ sein. Treffen sich aber k und k' nicht, so muss eines der Gebiete $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$ das andere als Teilgebiet enthalten. da dann q und q' zwei einander nicht treffende Querschnitte des einfach zusammenhängenden Gebietes Γ sind. Es sei etwa \mathfrak{F} und damit q in \mathfrak{F}' enthalten. Da jeder innere Punkt von q ein Randpunkt von Γ^* ist und innerhalb \mathfrak{F}' liegt, gibt es zu jedem ε mit $1 > \varepsilon > 0$ einen Punkt ζ_1 , der sowohl innerhalb \mathfrak{F}' als auch innerhalb Γ^* liegt und für den $||\zeta_1| - \rho'_\zeta| < \varepsilon$ ist. Dann strebt

sicher $|\zeta_1|$ mit $\zeta \rightarrow \pi_0$ gegen ∞ . Der Querschnitt $\Theta|\zeta_1|$ von Γ^* und von Γ verbindet dann ζ_1 mit einem Punkt der positiven reellen Axe. Würde nun $\Theta|\zeta_1|$ q' nicht treffen, so müsste in δ' der Punkt $|\zeta_1|$ der positiven reellen Axe liegen. Dies ist aber für hinreichend grosse $|\zeta_1|$ unmöglich, da in Γ nach dem Korollar zum Satz XII ein Winkelraum positiver Oeffnung liegt, der sowohl einen unendlichen Halbstrahl der positiven reellen Axe als auch einen unendlichen Halbstrahl der Parallelen zur positiven reellen Axe durch ζ_0 enthält. Daher treffen alle $\Theta|\zeta_1|$ sicher q , sobald ρ_ζ gross genug geworden sind. Dann aber gilt

$$||\zeta_1| - \rho_\zeta'| \leq |\zeta_0|, \quad |\rho_\zeta - \rho_\zeta'| \leq |\zeta_0| + \varepsilon,$$

und daher für $\varepsilon > 0$

$$\lim |\rho_\zeta - \rho_\zeta'| \leq |\zeta_0|, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Offenbar ist für die Definition der Hauptfalten und der Grösse ρ_ζ durchaus unwesentlich, dass die Abbildung von Γ auf H_z im Unendlichen im Winkel *winkeltreu* ist, es genügt vielmehr, dass sie dort *winkelproportional* ist. Ebenso wenig wesentlich ist die Orientierung in bezug auf die positive reelle Axe. Daher werden wir diese Begriffe ohne weiteres auch für den allgemeinsten Fall des Gebietes betrachten, für das die Voraussetzungen und Bedingungen des Satzes XXXIII zutreffen.

34. Wir behaupten nun:

XXXV. (Der erste Faltensatz). *Es sei Γ ein Gebiet der ζ -Ebene, für das die Voraussetzungen des Satzes XXXIII zutreffen und dessen Abbildung durch $z = f(\zeta)$ auf H_z im Unendlichen im Winkel *winkelproportional* ist. Es möge Γ so orientiert werden, dass die Richtungen der positiven reellen Axen der ζ - und der z -Ebene sich im Unendlichen entsprechen. Dann gilt, wenn ζ durch das Innere und den Rand von Γ gegen π_0 konvergiert,*

$$(34,1) \quad \frac{|f(\zeta)|}{|f(\rho_\zeta)|} \rightarrow 1.$$

Beweis: Wir nehmen zuerst an, dass der Satz bereits für alle Gebiete bewiesen ist, bei denen der Nullpunkt nicht im Inneren liegt. Ist diese Voraussetzung bei Γ nicht erfüllt, so sei $-\zeta_0$ ein Randpunkt von Γ . Unterwirft man Γ der Parallelverschiebung $\xi = \zeta + \zeta_0$, so ergibt sich aus Γ ein Gebiet Γ' , das den Nullpunkt nicht im Inneren enthält. Für die entsprechende Abbildung von Γ' auf H_z ist (34,1) nach Voraussetzung richtig. Einem Punkt ζ innerhalb oder auf dem Rand von Γ möge

dann in der ξ -Ebene der Punkt ξ entsprechen. Das zugehörige, für Γ' gebildete ρ_ξ sei mit ρ_ζ' bezeichnet. Dem Punkt ρ_ξ' auf der positiven reellen ξ -Axe entspricht in Γ der Punkt $\rho_\zeta' - \zeta_0$. Daher gilt

$$\frac{|f(\zeta)|}{|f(\rho_\zeta' - \zeta_0)|} \rightarrow 1,$$

wenn ζ gegen π_0 strebt. Nach dem Satz XV gilt aber wegen (33,2)

$$\frac{|f(\rho_\zeta' - \zeta_0)|}{|f(\rho_\zeta)|} \rightarrow 1,$$

woraus (34,1) folgt.

Wir können daher nunmehr annehmen, dass der Nullpunkt nicht im Innern von Γ liegt. Dann kann man offenbar Γ durch eine Potenztransformation auf ein Gebiet abbilden, dessen entsprechende Abbildung auf H_z nunmehr im Unendlichen im Winkel *winkeltreu* ist, so dass man dies von vornherein voraussetzen kann. Dann folgt (34,1) für solche Punkte ζ , die Γ^* angehören, unmittelbar aus (33,1).

Es möge nun ζ ein Randpunkt von Γ^* sein. Dann kann man in Γ^* einen Punkt ζ' finden, der beliebig nah bei ζ liegt, so dass sowohl $|f(\zeta') - f(\zeta)|$ als auch $||\zeta'| - |\zeta|| = |\zeta'| - \rho_\zeta|$ beliebig klein ist. Da aber für ζ' (34,1) bereits bewiesen ist, gilt (34,1) auch für alle Punkte ζ auf dem Rande vom Γ^* .

Liegt nun aber ζ in einem Faltenbereich δ von Γ^* , ohne auf dem δ abschliessenden Querschnitt q zu liegen, und entspricht δ in H_z ein Teilgebiet F von H_z , das von einem Stück σ der imaginären Axe und einem die Endpunkte von σ verbindenden Kontinuum c abgegrenzt wird, so gilt offenbar für jeden Punkt z von c

$$(34,2) \quad \frac{|z|}{|f(\rho_\zeta)|} \rightarrow 1,$$

da ja c das Bild von q ist. Nun wird aber offenbar das Maximum und das Minimum des absoluten Betrages in F gerade auf c angenommen, so dass (34,2) auch für jeden Punkt von F gelten muss. Damit ist aber der Satz vollständig bewiesen.

35. Berücksichtigt man den Satz XV, so ergibt sich:

Korollar 1 zum Satz XXXV: *Unter den Voraussetzungen des Satzes XXXV gilt für ein durch das Innere und den Rand von Γ gegen π_0 konvergierendes ζ*

$$(35,1) \quad |f(\zeta)| = \rho_\zeta^{\frac{\beta - \alpha}{\pi} (1 + \varepsilon(\zeta))}$$

und für ein Paar von Punkten ζ_1, ζ_2 , die durch das Innere und den Rand von Γ gegen π_0 streben,

$$(35,2) \quad \frac{|f(\zeta_1)|}{|f(\zeta_2)|} = \left(\frac{\rho_{\zeta_1}}{\rho_{\zeta_2}} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\pi} (1+\varepsilon(\zeta_1, \zeta_2))},$$

wo $\varepsilon(\zeta), \varepsilon(\zeta_1, \zeta_2)$ gegen 0 konvergieren.

Besitzt aber $f(\zeta)$ eine Winkelderivierte in π_0 , so können in (35,1)

und (35,2) die rechten Seiten durch $\rho_{\zeta}^{\frac{\beta-\alpha}{\pi} (1+\varepsilon(\zeta))}$ bzw.

$\left(\frac{\rho_{\zeta_1}}{\rho_{\zeta_2}} \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\pi} (1+\varepsilon(\zeta_1, \zeta_2))}$ ersetzt werden.

— Um die Ausdehnung einer Falte \mathfrak{F} zu messen, liegt es am nächsten die beiden Quotienten $K_+(\mathfrak{F}) = \frac{\text{Max } |\zeta|}{\rho}$ und $K_-(\mathfrak{F}) = \frac{\rho}{\text{Min } |\zeta|}$ zu betrachten, wo Maxima und Minima für den entsprechenden Faltenbereich zu bilden sind und ρ der Radius des die Falte abschliessenden Querschnitts ist. Wir bezeichnen $K_+(\mathfrak{F})$ und $K_-(\mathfrak{F})$ resp. als Höhen- bzw. Tiefenschwankung von \mathfrak{F} und $\text{Max } (K_+(\mathfrak{F}), K_-(\mathfrak{F})) = K(\mathfrak{F})$ als die relative Grösse von \mathfrak{F} .

Es sei nun L einer der beiden in π_0 zusammenstossenden Randzweige von Γ , etwa vom Treffpunkt mit Λ aus beginnend. Wir wollen dann, um uns einfacher ausdrücken zu können, die Gesamtheit aller Punkte ζ auf L und in den Hauptfalten von L , für die $\rho_{\zeta} = \rho$ ist, als den entsprechenden Faltenbereich \mathfrak{F}_{ρ} von L bezeichnen. \mathfrak{F}_{ρ} kann aus einem oder mehreren Faltenbereichen in dem oben definierten Sinne bestehen, daneben aber auch aus einzelnen Punkten und Kreisbögen. Da für jedes ρ die Menge \mathfrak{F} abgeschlossen ist, lässt sich auch für diese Mengen, genau wie oben, Höhengschwankung, Tiefenschwankung und relative Grösse definieren. Lassen wir nun ρ ins Unendliche gehen, und ist dabei $\kappa = \text{Limsup}$ der relativen Grösse von \mathfrak{F}_{ρ} beschränkt, so nennen wir L linear unbewallt in π_0 und κ die Unbewalltheitskonstante von L in π_0 . Ist $\kappa = 1$, so nennen wir L regulär unbewallt in π_0 . Dann sind auch $\kappa_+ = \text{Limsup}$ der Höhengschwankungen von \mathfrak{F}_{ρ} und $\kappa_- = \text{Limsup}$ der Tiefenschwankungen von \mathfrak{F}_{ρ} beschränkt und umgekehrt. Zugleich gilt offenbar $\kappa = \text{Max } (\kappa_+, \kappa_-)$ ⁵¹⁾. Aus dem ersten Faltensatz folgt nun

⁵¹⁾ vgl. für die Begriffe der linearen und regulären Unbewalltheit für den Fall von Jordankurven Warschawski (1), pp. 355, 356. Allerdings ist die dort benutzte Unbewalltheitskonstante im allgemeinen grösser als κ , liegt aber stets zwischen κ und $\kappa_+ \kappa_-$.

offenbar insbesondere, dass, wenn L linear unbewallt ist und ζ „zwischen“ L und der positiven reellen Axe gegen π_0 geht, dann

$$(35,3) \quad \frac{1}{\kappa_-(1+\varepsilon)} < \frac{|f(\zeta)|}{|f(\zeta_1)|} < \kappa_+(1+\varepsilon)$$

gilt, wo ε mit $|\zeta| \uparrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Für den Fall einer Jordanberandung rührt dieses Resultat, in etwas schwächerer Formulierung, von Herrn Warschawski her⁵²⁾.

Mit Hilfe des Begriffs der linearen Unbewalltheit lässt sich nun der Satz XXXV auf einen etwas allgemeineren Fall ausdehnen:

Korollar 2 zum Satz XXXV. Es seien Γ bzw. Γ_1 zwei Gebiete der ζ - bzw. η -Ebene, für die die Voraussetzungen des Satzes XXXV erfüllt sind. Ihre unendlich fernen Punkte seien mit π_0 bzw. π_1 bezeichnet, L_1 sei einer der in π_1 zusammenstossenden Randzweige von Γ_1 , der in π_1 linear unbewallt mit der Unbewalltheitskonstanten $\kappa \geq 1$ ist. Es möge Γ auf Γ_1 durch $\eta = F(\zeta)$ so konform abgebildet werden, dass π_0 und π_1 einander entsprechen. L_1 möge dabei L in Γ entsprechen. Dann gilt, wenn ζ über L oder zwischen L und der positiven reellen Axe gegen π_0 konvergiert,

$$(35,4) \quad \frac{1}{\kappa} \leq \lim \left| \frac{F(\zeta)}{F(\rho_{\zeta})} \right| \leq \kappa.$$

Beweis: Es möge die betrachtete Abbildung von Γ auf Γ_1 durch Vermittlung je einer konformen Abbildung auf H_z gebildet werden, bei denen π_0 und π_1 in $z = \infty$ übergehen. ζ, ρ_{ζ} mögen dabei in H_z die Punkte z, z_0 und in Γ_1 die Punkte $\eta = F(\zeta), \eta_0 = F(\rho_{\zeta})$ entsprechen. Es gilt dann nach (34,1)

$$\left| \frac{z}{z_0} \right| \rightarrow 1.$$

Andererseits folgt aus (35,2), wenn γ die $\beta - \alpha$ entsprechende Grösse bei Γ_1 ist,

$$\left| \frac{z}{z_0} \right| = \left(\frac{\rho_{\eta}}{\rho_{\eta_0}} \right)^{\frac{\gamma}{\pi} (1+\varepsilon(\eta, \eta_0))},$$

$$\frac{\rho_{\eta}}{\rho_{\eta_0}} = \left| \frac{z}{z_0} \right|^{\frac{\pi}{\gamma(1+\varepsilon(\eta, \eta_0))}} \rightarrow 1.$$

⁵²⁾ vgl. Warschawski (1), pp. 361 — 375, sowie (2), pp. 320 — 325, 342, 343.

Ferner ist $\rho_{\eta_0} = |\eta_0|$ und nach Annahme

$$\frac{1}{z_+} \leq \lim_{\eta_1} \frac{\rho_{\eta_1}}{|\eta_1|} \leq z_-.$$

Daraus folgt aber

$$(35,41) \quad \frac{1}{z_-} \leq \lim_{\eta_1} \frac{|\eta_1|}{\rho_{\eta_1}} \leq z_+,$$

und daraus folgt (35,4).

Im Zusammenhang mit diesem Korollar ist der folgende Satz von Interesse:

XXXVI. Unter den Voraussetzungen des Korollars 2 zum Satz XXXV ist der Randzweig L_1^* des Bildgebietes Γ_1^* von Γ^* innerhalb Γ_1 der zwischen L_1 und der positiven reellen Axe liegt, in π_1 linear unbewallt mit der Unbewalltheitskonstanten $\leq z_-$.

Beweis: Die Relation (35,41) liefert für die Punkte ζ in Γ^* , da dort $|\zeta| = \rho_\zeta$ gilt,

$$(35,5) \quad \frac{1}{z_-} \leq \lim_{\zeta} \left| \frac{F(\zeta)}{F(|\zeta|)} \right| \leq z_+.$$

Man bilde nun Γ^* auf H_z ab, so dass π_0 in $z = \infty$ übergeht. Dann gilt für die Punkte z, z' , die ζ bzw. $|\zeta|$ entsprechen, da Γ^* faltenfrei ist, nach XXXV

$$(35,6) \quad \left| \frac{z}{z'} \right| \rightarrow 1.$$

Die durch die beiden Abbildungen vermittelte Abbildung von Γ_1^* auf H_z sei durch $\eta = \psi(z)$ gegeben. Dann folgt wegen (35,6) nach dem Satz XV aus (35,5)

$$(35,7) \quad \frac{1}{z_-} \leq \lim_{\eta_1} \left| \frac{\psi(z)}{\psi(|z|)} \right| \leq z_+.$$

Es sei nun η_1 ein Punkt einer Hauptfalte \mathfrak{F} von L_1^* mit dem abschliessenden Querschnitt q und z_1 der entsprechende Punkt von H_z . Dann muss das Bild des Kreisbogens $|z| = |z_1|$, $\arg z \geq 0$ q in einem Punkte η_2 mit $|\eta_2| = \rho_{\eta_1}$ durchsetzen. Andererseits gilt, wenn der ρ_{η_1} in H_z entsprechende Punkt mit z_0 bezeichnet wird, nach dem ersten Faltensatz

$$(35,8) \quad \left| \frac{z_1}{z_0} \right| \rightarrow 1.$$

Man wende nun (35,7) auf z_1 an. Dann folgt wegen $\psi(z_1) = \eta_1$:

$$(35,9) \quad \frac{1}{z_-} \leq \lim_{\eta_1} \left| \frac{\eta_1}{\psi(|z_1|)} \right| \leq z_+.$$

Nun folgt aber aus (35,8) nach Satz XV

$$|\psi(|z_1|)| \sim |\psi(|z_0|)| \sim |\psi(z_0)| = \rho_{\eta_1}.$$

Daher liefert (35,9)

$$(35,91) \quad \frac{1}{z_-} \leq \lim_{\eta_1} \frac{|\eta_1|}{\rho_{\eta_1}} \leq z_+,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung: Für $z = 1$, d. h. wenn L_1 in π_1 regulär unbewallt ist, gilt dasselbe für L_1^* . Insbesondere folgt, dass bei der Abbildung des Satzes XXXV von Γ auf H_z das Bild von Γ^* ein Teilgebiet von H_z ist, dessen Rand im Unendlichen regulär unbewallt ist. Ferner gilt offensichtlich die Behauptung des Satzes XXXVI auch für jedes Teilgebiet von Γ^* , das sein eigener faltenfreier Kern ist und ein unendliches Teilstück der positiven reellen Axe enthält.

§ 9. Der zweite Faltensatz.

36. Wir kehren nun zur Fragestellung zurück, auf die sich die Behauptung des Satzes XXXIV bezog. Für ein hinreichend grosses $r > 0$ betrachten wir unter den Voraussetzungen von XXXIV das Bild Λ_r in der ζ -Ebene des Halbkreises $L_r: |z| = r$, $\Re z \geq 0$. Es genügt natürlich, sich auf die obere Hälfte L_r^+ von L_r mit $\Im z \geq 0$ und ihr Bild Λ_r^+ zu beschränken. XXXIV besagt, dass alle Punkte von Λ_r^+ , die in Γ^* liegen für $r \uparrow \infty$ äquivalent sind. Diejenigen Punkte von Λ_r^+ aber, die in den Falten von Γ verlaufen, können sich natürlich, je nach der relativen Grösse der betreffenden Falte, wesentlich von den Punkten von Λ_r^+ entfernen. Immerhin lässt sich in jedem Falle folgendes sagen: Es sei ζ_0 der $z = r$ entsprechende Punkt in der ζ -Ebene. Für ein $\delta > 0$ betrachte man alle Falten \mathfrak{F}_ρ mit $\frac{|\zeta_0|}{1+\delta} \leq \rho \leq |\zeta_0|(1+\delta)$. Die oberen Grenzen

der $z_+(\mathfrak{F}_\rho)$ bzw. $z_-(\mathfrak{F}_\rho)$ für diese Falten seien resp. mit M_r^+ , M_r^- bezeichnet. Dann liegen offenbar alle Punkte von Λ_r^+ in einem Kreisring

$$(36,1) \quad \frac{1}{1+\varepsilon} M_r^- \leq |\zeta| \leq |\zeta_0| M_r^+ (1+\varepsilon),$$

wo man ε mit $r \uparrow \infty$ gegen 0 streben lassen kann. Dieses Resultat gestattet ohne weiteres den folgenden Satz zu formulieren:

XXXVII. Unter den Voraussetzungen des Satzes XXXV möge der Randzweig C von Γ , der der positiven imaginären Axe entspricht, linear unbewallt in π_0 mit der Unbewalltheitskonstanten \varkappa sein. Dann liegen die Bilder des Viertelkreises $|z| = r$, $\frac{\pi}{2} \geq \arg z \geq 0$ in einem Kreisring

$$(36,2) \quad \frac{|\zeta_0|}{\varkappa + \varepsilon} \leq |\zeta| \leq |\zeta_0| (\varkappa + \varepsilon),$$

wo ζ_0 dem Punkte $z = r$ entspricht und ε mit $r \uparrow \infty$ gegen 0 strebt.

Im Falle, dass der Rand von Γ von einer Jordankurve mit einer Tangente im Unendlichen gebildet wird, rührt dieser Satz in etwas schwächerer Formulierung von Herrn J. Wolff her⁵³⁾.

37. Um nun im allgemeinsten Falle mit der Fragestellung von Nr. 36 weiter zu kommen, führen wir zuerst zwei neue Begriffe ein.

Ist wieder unter den Voraussetzungen des Satzes XXXIII C das Bild der positiven imaginären z -Axe, so sei $r > 0$, ζ_0 der r in Γ entsprechende Punkt, $\rho = |\zeta_0|$. Für jede Hauptfalte von C , die durch Querschnitte mit dem Radius ρ abgeschlossen wird, bilde man die obere Grenze der Argumentvariation in dieser Falte und nehme dann wiederum die obere Grenze aller dieser Zahlen, die dem gewählten $\rho = |\zeta_0|$ entsprechen. Die so gebildete Zahl sei mit σ_r bezeichnet. Wir werden nun zu einem besonders scharfen Resultat unter der Annahme kommen, dass $\sigma_r \rightarrow 0$ mit $r \uparrow \infty$ gilt. Diese Annahme ist offenbar ein gewisser Ersatz für die Annahme, dass C im Unendlichen eine Tangente hat.

Ferner definieren wir *Nebenfalten* von Γ bzw. von C . Darunter verstehen wir Teilgebiete von Γ , die von Γ durch Kreisbogenquerschnitte mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt abgetrennt werden und deren Rand, von dem betreffenden Querschnitt abgesehen, ein Teilstück von C ist. Jede Hauptfalte von C ist zugleich eine Nebenfalte.

Nach dem Satz XXXIV sind nun alle Punkte von Λ_r^+ , die in Λ_r^+ enthalten sind, für $r \rightarrow \infty$ unter einander äquivalent. Um die Lage der Teilstücke von Λ_r^+ zu diskutieren, die in den Hauptfalten von C liegen, sei ζ_0 das Randelement von C , das ir entspricht. ζ_0 gehöre zur Falte δ_0 , die sich auch auf ein Randelement von Γ reduzieren kann. Dann kann man den Inhalt des zweiten Faltensatzes etwas unpräzise so formulieren, dass Λ_r^+ im Falle der Winkeltreue für $\sigma_r \rightarrow 0$ auf dem asymptotisch kürzesten Wege innerhalb Γ nach ζ_0 führt. Es sind hierin vier Aussagen enthalten:

⁵³⁾ Vgl. Wolff (1), pp. 217—222, sowie Warschawski (2), pp. 326—328.

1) Dringt Λ_r^+ in eine Hauptfalte δ von C ein, die von δ_0 verschieden ist, so ist der in δ liegende Bogen von Λ_r^+ mit seinem Eintrittspunkt in δ äquivalent für $r \uparrow \infty$.

2) Die in δ_0 verlaufenden Teilbögen von Λ_r^+ , deren beide Endpunkte auf dem δ_0 abschliessenden Querschnitt q_0 liegen, sind mit ihrem Eintrittspunkt äquivalent.

3) Der Verlauf von Λ_r^+ vom letzten Schnittpunkt mit q_0 bis ζ_0 wird erstens dadurch charakterisiert, dass dieses Stück in eine Nebenfalte \mathfrak{f} von δ_0 nur mit einem mit dem Eintrittspunkt äquivalenten Bogen eintritt, wenn es einen gegen ζ_0 in Γ gehenden Weg gibt, der in \mathfrak{f} nicht eintritt.

4) Zweitens kann das vollständig in δ_0 liegende Endstück λ_r von Λ_r^+ (im asymptotischen Sinne) keinen Weg „unnötig hin und her zurücklegen“. Dies bedeutet: Sind q_1, q_2 zwei Kreisbogenquerschnitte von δ_0 mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt und den Radien ρ_1, ρ_2 , und sind q_1, q_2 durch wenigstens drei Teilbögen von λ_r mit einander in δ_0 verbunden, so gilt

$$(37,1) \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} \rightarrow 1.$$

38. Alle diese Aussagen ergeben sich unmittelbar aus der folgenden Formulierung, die wir nunmehr beweisen wollen:

XXXVIII. (Zweiter Faltensatz). Unter den Voraussetzungen des Satzes XXXIII sei die Abbildung von Γ auf H_z im Unendlichen im Winkel winkeltreu. Das der positiven imaginären z -Axe entsprechende Randstück von Γ sei mit C bezeichnet. Es sei \mathfrak{f} eine Nebenfalte, die in einer Hauptfalte δ von C enthalten ist, und λ ein Teilbogen der Bildkurve Λ_r^+ des Viertelkreises Λ_r^+ : $|z| = r$, $\frac{\pi}{2} > \arg z > 0$, der in \mathfrak{f} verläuft, während seine beiden Endpunkte ζ_1, ζ_2 auf dem \mathfrak{f} abschliessenden, abgeschlossenen Querschnitt q liegen. Der Punkt $\zeta = 0$ möge weder innerhalb noch auf dem Rande von \mathfrak{f} liegen. Dann liegen alle Punkte von λ im Kreisring

$$(38,1) \quad |\zeta_1| e^{-k\Theta} < |\zeta| < |\zeta_1| e^{k\Theta},$$

wo Θ der zu q gehörende Zentriwinkel ist und die absolute Konstante k gleich $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ gesetzt werden kann.

Beweis: Dem zu q komplementären Randstück c von \mathfrak{f} möge in der z -Ebene die offene Strecke σ der positiven imaginären Axe ent-

sprechen. Mit g sei das Bildgebiet von f bezeichnet. Dann entspricht λ ein innerhalb g verlaufender und die Bildpunkte z_1, z_2 von ζ_1, ζ_2 verbindender Teilbogen s' des Halbkreises $|z| = r, \Re z \geq 0$, der auf der imaginären Axe senkrecht steht und dessen auf der negativen imaginären Axe liegender Endpunkt $-ir$ die Strecke σ nicht trifft. Daher kann nur einer der Punkte z_1, z_2 Endpunkt von σ sein. Ist dies weder für z_1 noch für z_2 der Fall, so erscheint nach dem Korollar 2 zum Satz XXX σ von jedem Punkt von s aus in bezug auf g unter einem konformen Winkel $< \pi$. Ist aber etwa z_1 ein Endpunkt von σ , so liegt λ im Uebrigen ausserhalb des auf σ als Durchmesser errichteten Halbkreises, und aus dem Korollar 1 zum Satz XIX folgt dasselbe. c erscheint daher von jedem Punkt von λ aus in bezug auf f unter einem konformen Winkel $\leq \pi$, sodass q von jedem Punkt von λ aus in bezug auf f unter einem konformen Winkel $\geq \pi$ erscheint.

Es sei nun ζ_0 der Punkt von q , der den Bogen q halbiert. Durch eine logarithmische Abbildung $w = \log \frac{\zeta}{\zeta_0}$ geht f in ein Gebiet Γ_0 der w -Ebene über, wobei ζ_0 in $w = 0$ übergeht. q geht dann in eine durch den Nullpunkt hindurchgehende, auf der imaginären Axe liegende Strecke γ über, die im Innern des Kreises $|w| \leq \frac{\theta}{2}$ liegt. ζ' sei irgend ein Punkt von λ , ω sein Bildpunkt in der w -Ebene. Dann folgt aus der Abschätzung (23,1) des Satzes XXVIII, da $m_{\Gamma_0, \omega} \gamma \geq \pi$ ist und in (23,1) das Gleichheitszeichen nicht gelten kann, wenn $|\omega| > \frac{\theta}{2}$ ist,

$$\pi < 4 \arcsin \frac{2 \sqrt{|\omega| \frac{\theta}{2}}}{\frac{\theta}{2} + |\omega|}, \quad \frac{2 \sqrt{2|\omega| \frac{\theta}{2}}}{\theta + 2|\omega|} > \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$(\theta + 2|\omega|)^2 < 16|\omega| \frac{\theta}{2}, \quad (2|\omega|)^2 - 6.2|\omega| \frac{\theta}{2} + \frac{\theta^2}{4} < 0,$$

$$(38,2) \quad |\omega| < \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right) \frac{\theta}{4} < 3 \frac{\theta}{4}.$$

Gehen wir zurück zur ζ -Ebene, so folgt wegen $|\zeta_0| = |\zeta_1|$

$$(38,3) \quad e^{-\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \frac{\theta}{4}} < \left| \frac{\zeta'}{\zeta_1} \right| < e^{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) \frac{\theta}{4}}.$$

Daher liegt die ganze Kurve λ im Kreisring (38,1), w. z. b. w.

Aus dem damit bewiesenen Satz folgen offenbar die unter 1) — 4) gemachten Angaben unmittelbar, da für $r > r_0$ die Voraussetzungen des Satzes XXXVIII sicher zutreffen und für $\sigma_r \rightarrow 0$ auch θ gegen Null konvergiert.

Zugleich sehen wir, dass die obigen Aussagen auf jeden Fall dann zutreffen, wenn man r über solche Werte ins Unendliche gehen lässt, für die σ_r gegen Null konvergiert.

Beim Beweis des Satzes wurde natürlich nur von dem Teil des Satzes XXX Gebrauch gemacht, der sich auf $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bezieht. Für den

Beweis dieses Teiles ist aber der Satz XXIX nicht nötig und ebenso wenig der a. a. O. unter C. angegebene Teil des Beweises. Wird aber der Satz XXX im ganzen Umfang angewandt, so ergibt sich eine Erweiterung des Satzes XXXVIII auf einen wesentlich allgemeineren Fall. Anstatt nämlich über den Bogen λ anzunehmen, dass er auf der Bildkurve eines auf der imaginären Axe der z -Ebene senkrecht stehenden Halbkreises liegt, genügt es, vorauszusetzen, dass die entsprechende Kurve in der z -Ebene in den innerhalb g verlaufenden Teilstücken nur Sehnen hat, deren Richtungen mit der reellen Axe Winkel $\leq \frac{\pi}{2} - \alpha$,

$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, bilden. Dann erscheint im obigen Beweise c in bezug auf f von jedem Punkt von λ aus unter einem konformen Winkel $\leq 2(\pi - \alpha)$, und q unter einem konformen Winkel $\geq 2\alpha$. Die Anwendung des Satzes XXVIII liefert dann

$$2\alpha < 4 \arcsin \frac{2 \sqrt{|\omega| \frac{\theta}{2}}}{\frac{\theta}{2} + |\omega|},$$

$$\frac{2 \sqrt{2|\omega| \frac{\theta}{2}}}{\theta + 2|\omega|} > \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$8|\omega| \frac{\theta}{2} > 4|\omega|^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4|\omega| \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \theta^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\left(\frac{2|\omega| \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\theta} \right)^2 - 2 \left(\frac{2|\omega| \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\theta} \right) \left(2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + \sin^4 \frac{\alpha}{2} < 0,$$

$$\frac{2|\omega| \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\theta} < 2 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{4 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$(38,4) \quad |\omega| < \frac{\left(1 + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \stackrel{*)}{=} \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{4}.$$

Wir sehen:

XXXIX. Werden die Voraussetzungen des Satzes XXXVIII über λ dahin abgeändert, dass die Bildkurve von λ in der z -Ebene nur Sehnen hat, deren Richtungen mit der reellen Axe Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, bilden, so bleibt die Behauptung des Satzes XXXVIII richtig, wenn in ihr der Kreisring (38,1) durch den Kreisring

$$(38,5) \quad |\zeta_1| e^{-\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{4}} < |\zeta| < |\zeta_1| e^{\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{4}}$$

ersetzt wird.

Damit bleiben auch im Falle des Satzes XXXIX die obigen Aussagen 1) — 4) der Nr. 37 bestehen.

Endlich ist leicht zu übersehen, dass man im Satz XXXIX im Sinne der Bemerkungen am Schlusse von Nr. 25 die Sehnen durch Kreisbögen ersetzen kann.

Die Abbildung von Γ auf H_z möge durch $\zeta = \varphi(z)$ vermittelt werden. Was lässt sich nun aus den gewonnenen Ergebnissen über den

Verlauf der Bildmenge Λ_r^+ des Viertelkreises $|z| = r$, $\frac{\pi}{2} \geq \arg z \geq 0$, sagen, wenn $\sigma_r \rightarrow 0$ gilt?

Λ_r^+ zerfällt in zwei Stücke, von denen das erste, Λ_r^+ , sich vom Anfangspunkt $\varphi(r)$ bis zum letzten Eintrittspunkt ζ_1 von Λ_r^+ in die letzte Falte \mathfrak{F}_0 erstreckt, das andere, Λ_r^+ aber von ζ_1 an vollständig innerhalb der Falte \mathfrak{F}_0 verläuft (vgl. Fig. 7). Λ_r^+ kann auch eine leere Menge sein,

Die Distanzen der Punkte von $\bar{\Lambda}_r^+$ vom Nullpunkt sind nun nach XXXIV und nach den Aussagen 1) und 2) der Nr. 37 äquivalent mit $|\varphi(r)|$. Was aber $\bar{\Lambda}_r^+$ anbetrifft, so kann man dafür verschieden scharfe Abschätzungen angeben, je nachdem, ob man nur die Falte \mathfrak{F}_0 kennt, in der $\bar{\Lambda}_r^+$ verläuft, oder ob auch die Lage des Endpunktes (bzw. des Endelementes) ζ_0 von Λ_r^+ bekannt ist. Im ersten Falle liegt offenbar jeder Punkt von $\bar{\Lambda}_r^+$ im Kreisring

$$\frac{\rho_{\zeta_0}}{K_-(\mathfrak{F}_0)} \leq |\zeta| \leq \rho_{\zeta_0} K_+(\mathfrak{F}_0).$$

Daher liegt die ganze Menge Λ_r^+ in einem Kreisring

$$(38,6) \quad (1 - \varepsilon) \frac{|\varphi(r)|}{K_-(\mathfrak{F}_0)} \leq |\zeta| \leq (1 + \varepsilon) |\varphi(r)| K_+(\mathfrak{F}_0),$$

wo ε mit $r \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

Ist aber auch die Lage von ζ_0 bekannt, so kann man folgendermassen verfahren. Man betrachte alle Kurven, die den ζ_0 abschliessenden Querschnitt mit ζ_0 verbinden — es genügt, Bilder von Jordankurven der z -Ebene zu betrachten, die aus der rechten z -Halbebene in ir münden. Für jede solche Kurve bestimme man $\operatorname{Max} \frac{|\zeta|}{\rho_{\zeta_0}}$ und $\operatorname{Max} \frac{\rho_{\zeta_0}}{|\zeta|}$.

Die untere Grenze der Zahlen $\operatorname{Max} \frac{|\zeta|}{\rho_{\zeta_0}}$ für alle in Betracht kommenden Kurven sei mit $\mu_+(\zeta_0)$ bezeichnet, und analog die untere Grenze der Zahlen $\operatorname{Max} \frac{\rho_{\zeta_0}}{|\zeta|}$ mit $\mu_-(\zeta_0)$. Dann liegen alle Punkte von $\bar{\Lambda}_r^+$ und damit auch von Λ_r^+ in einem Kreisring

$$(38,7) \quad (1 - \varepsilon) \frac{|\varphi(r)|}{\mu_-(\zeta_0)} \leq |\zeta| \leq (1 + \varepsilon) |\varphi(r)| \mu_+(\zeta_0),$$

wo ε mit $r \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt.

Man vergleiche hierzu die Figur 7, wo Λ_r^+ sehr stark und $\bar{\Lambda}_r^+$ sehr schwach ausgezogen sind. —

Bisher wurde an der Voraussetzung festgehalten, dass die Abbildung von Γ auf H_z im Unendlichen im Winkel *winkeltreu* und nicht nur *winkelproportional* ist. Man kann aber offenbar den Fall der Winkelproportionalität durch eine Potenztransformation auf den der Winkeltreue zurückführen, wobei, wenn der Nullpunkt innerhalb Γ liegt, eine vorbereitende Transformation nötig wird. Die obigen Resultate bleiben dabei unverändert gültig, bis auf den Satz XXXIX, in dem der von α abhängige Faktor im Exponenten abzuändern ist.

39. Um die Sätze XXXVIII und XXXIX anzuwenden, ist es übrigens gar nicht nötig, die Annahme $\sigma_r \rightarrow 0$ zu machen, wenn dann die Resultate auch abgeschwächt werden. Denn unter den Voraussetzungen des Satzes XXXIII ist ja θ in der Grenze für $r \rightarrow \infty$ höchstens gleich π , sodass die Kreisringe (38,3) und (38,5) in die Kreisringe übergehen

$$(39,1) \quad |\zeta_1| e^{-\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)(\pi + \varepsilon)} \leq |\zeta| \leq |\zeta_1| e^{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)(\pi + \varepsilon)},$$

$$(39,2) \quad \left| \zeta_1 \right| e^{-\frac{\pi+\varepsilon}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{4}} \leq \left| \zeta \right| \leq \left| \zeta_1 \right| e^{\frac{\pi+\varepsilon}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{4}},$$

wo ε mit $r \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Kombiniert man nun dies mit dem Satz XXXV, der über die Eintrittspunkte von Λ_r^+ in δ_0 Aufschluss gibt, so folgt

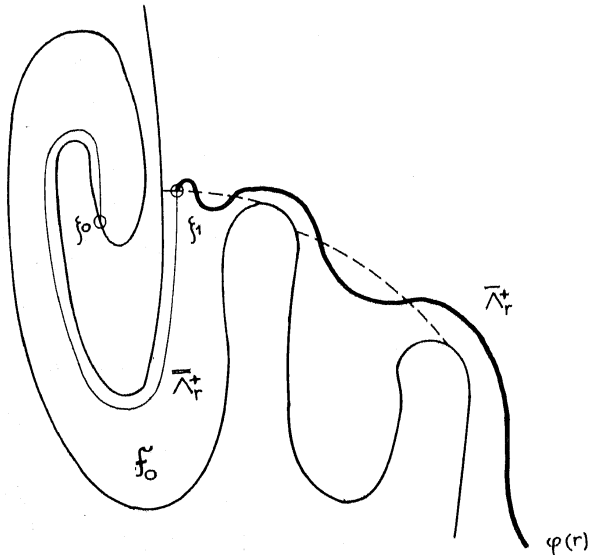


Fig. 7.

XL. Unter den Voraussetzungen des Satzes XXXIII sei die Abbildung von Γ auf H_z im Unendlichen winkeltreu. Ist dann Λ_r^+ das Bild des Viertelkreises $|z| = r, \frac{\pi}{2} \geq \arg z \geq 0$, so liegt Λ_r^+ in einem Kreisring

$$(39,3) \quad (1-\varepsilon) \frac{|\varphi(r)|}{\mu_-(\zeta_0)} e^{-\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi} \leq |\zeta| \leq (1+\varepsilon) |\varphi(r)| \mu_+(\zeta_0) e^{\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi},$$

wo ε mit $r \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, $\zeta = \varphi(z)$ die betrachtete Abbildung von Γ auf H_z vermittelt, ζ_0 das Bild von $z = ir$ ist und $\mu_-(\zeta_0)$, $\mu_+(\zeta_0)$ die oben angegebene Bedeutung haben.

Bei dem Satz XL ist es allerdings unwesentlich, dass die Abbildung von Γ auf H_z im Unendlichen winkeltreu oder auch nur winkelproportional ist. Die Behauptung dieses Satzes gilt nämlich mit etwas schwächeren Konstanten bereits dann, wenn nur die Erreichbarkeit von π_0 vorausgesetzt wird. Es lässt sich dies durch Kombination des obigen Beweises für den Satz XXXVIII mit einer weiteren Betrachtung zeigen, die man entweder mit Hilfe der Ahlforsschen Methode oder mit Hilfe der Methode des Dirichletschen Integrals durchführen kann. Da aber beides über den Rahmen der in dieser Abhandlung angewandten Methoden hinausgeht, soll darauf in einer späteren Mitteilung eingegangen werden.