

also

$$(52) \quad \beta_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) \leq \beta.$$

Andererseits: ist n ganz, $n \geq 2$, so liegt $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ in einem Würfel n -ter Ordnung. Nach A 1, A 2 gibt es also ganze Zahlen p_1, p_2, \dots, p_s, q mit

$$(53) \quad \left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{1}{2 z_n^{\frac{s+1+\beta}{s}} (i=1, 2, \dots, s), z_n \leq q \leq k_2 z_n z_{n-1}^{\frac{s+1+\beta}{s(s+1)}}.$$

Wird also $\frac{s+1+\beta}{s(s+1)} = \sigma$ gesetzt, so ist nach (32), (53)

$$z_n \leq q \leq k_2 z_n (\log z_n)^2 \leq k_2 z_n (\log q)^2,$$

also

$$\left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{k_2 (\log q)^2}{q} \right)^{\frac{s+1+\beta}{s}} \quad (i=1, 2, \dots, s),$$

also

$$(54) \quad \beta_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) \geq \beta.$$

Nach (1), (52), (54) ist aber

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = \beta_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = \beta,$$

w. z. b. w.

B. Kalicun-Chodowicki.

Przyczynek do zastosowania Geometrii kinematycznej do konstrukcji środków krzywizn przekrojów płaskich i stycznych głównych powierzchni prostokreślnych wchrowatych, występujących najczęściej w praktyce technicznej.

Beitrag zur Anwendung der kinematischen Geometrie zur Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte der ebenen Schnittkurven und der Haupttangente der windschiefen Regelflächen, die am meisten in der technischen Praxis vorkommen.

(CZĘŚĆ I).

A. Wstęp.

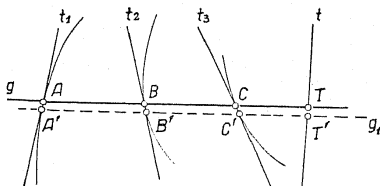
1. Powierzchnię prostokreślną nazywamy, jak wiadomo, wchrowatą, jeżeli każde dwie jej sąsiednie tworzące są względem siebie wchrowate, a więc ograniczają element powierzchniowy, który nie da się rozwinąć na płaszczyźnie.

W części I tej rozprawy zajmemy się przedewszystkiem takimi powierzchniami wchrowatymi, które opisuje prosta g przez ruch swój po trzech krzywych c_1, c_2, c_3 , które stale wszystkie przecina. Krzywe te nazywamy *kierownicami*, a mogą one być płaskimi, przestrzennymi lub zastąpione liniami prostymi. Zamiast jednej z tych kierownic może być podany jakiś inny warunek ruchu, np. prosta g ma podczas swego ruchu przecinać stale kierownice c_1 i c_2 i tworzyć z kierownicą c_2 stały kąt.

Że w powyższy sposób wytworzona przez prostą g powierzchnia

²²⁾ Zusatz bei der Korrektur: Herr Mahler wird demnächst einen sehr einfachen Beweis von (2) veröffentlichen.

jest wichrowata, wynika z następującego spostrzeżenia (Rys. 1): Niechaj tworząca g w pewnym momencie przecina kierownice c_1, c_2, c_3 w punktach A, B, C , w następnej zaś bezpośrednio (sąsiednim) położeniu g_1 , które zajmie po nieskończonym małym czasie dt , w punktach A', B', C' . Elementy AA', BB', CC' krzywych c_1, c_2, c_3 wyznaczają do nich styczne t_1, t_2, t_3 w punktach A, B, C ; a ponieważ styczne te są w ogólności wichrowate względem siebie, przeto tworzące g i g_1 nie mogą leżeć na jednej płaszczyźnie, są zatem również wichrowate. Stąd wynika, że wszystkie styczne (t) powierzchni w poszczególnych punktach tworzącej g są względem siebie wichrowate, wyznaczają więc z tworzącą g nieskończenie wiele płaszczyzn, które dotykają powierzchni w poszczególnych punktach tej tworzącej.



Rys. 1.

Nie jest jednak wykluczony osobliwy przypadek, że sąsiednie tworzące g i g_1 przecinają się w jednym punkcie, zwanym *ostrzem* (punktem) *kuspidalnym*. Wtedy wszystkie styczne (t) w poszczególnych punktach tworzącej ($g \cdot g_1$) $\equiv g$, zwanej *tworzącą torsalną* wypełniają z g jedną płaszczyznę, która się styka z powierzchnią we wszystkich punktach tej tworzącej.

2. Biorąc jeszcze raz pod uwagę położenie stycznych (t) powierzchni wichrowatej Φ względem dwóch nieskończenie bliskich (sąsiednich) tworzących g i g_1 (Rys. 1) w ogólnym przypadku, zauważymy, że można je uporządkować jako tworzące tego samego układu hiperbolojdy wichrowatej (jednopowłokowej) Γ , przyjmując za jej kierownice którekolwiek trzy z tych stycznych, np. t_1, t_2, t_3 . Hiperbolojda Γ ma wtedy z powierzchnią Φ , prócz wspólnych 3 płaszczyzn stycznych ($t_1 \cdot g$), ($t_2 \cdot g$), ($t_3 \cdot g$) i 3 ich wspólnych punktów styczności A, B, C , nieskończenie wiele wspólnych płaszczyzn stycznych i ich punktów styczności na tworzącej g , czyli obie powierzchnie posiadają wspólną styczność wzdłuż tworzącej g . Tworząca bowiem g i bezpośrednio po niej następująca tworząca g_1 przecinają wszystkie tworzące hiperbolojdy układu (t) w parach bezpośrednio po sobie następujących punktów T i T', \dots ,

które stanowią wspólne elementy styczności obu powierzchni. Wskutek tego znane *twierdzenie dla hiperbolojdy Γ o rzutowości pęku płaszczyzn stycznych, którego osią jest dowolna tworząca g z szeregiem ich punktów styczności*, którego podstawą jest ta tworząca, jest ważne również dla powierzchni Φ , i może być wykorzystane do konstrukcji dalszych płaszczyzn stycznych i ich punktów styczności tej powierzchni, gdy są znane 3 pary homologicznych elementów tych utworów.

Jeżeli zaś styczne t_1, t_2 i t_3 miały po trzy sąsiednie punkty wspólne z powierzchnią Φ , t. j. gdyby przecinały po 3 bezpośrednio po sobie następujące tworzące, czyli gdyby były *stycznymi głównymi* (przeglądając) powierzchni Φ w punktach A, B i C , wtedy, jak z łatwością można uzasadnić, *wszystkie tworzące układu (t) hiperbolojdy Γ , wyznaczonej przez te styczne główne, dotykałyby powierzchni Φ w 3 punktach; hiperbolojda Γ miałaby z Φ w każdym punkcie tworzącej g wspólną płaszczyznę ściśle styczną. Hiperbolojdę taką nazywać będziemy ściśle styczną z powierzchnią Φ wzdłuż tworzącej g i oznaczać będziemy przez Γ_s .*

Przyjmując trzy styczne t_1, t_2, t_3 powierzchni Φ (Rys. 1) tak, aby leżały w trzech płaszczyznach $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$, natenczas styczne w punktach tworzącej g , można uporządkować jako tworzące tego samego układu (t) paraboloidy hiperbolicznej Π , posiadającej z powierzchnią Φ wspólną tworzącą g i stykającej się z nią we wszystkich punktach tej tworzącej.

Gdyby zaś styczne t_1, t_2, t_3 , będące w przestrzeni równoległe do tej samej płaszczyzny, były *stycznymi głównymi* w punktach A, B i C powierzchni Φ , natenczas wyznaczona przez nie paraboloida Π posiadałaby ściśle styczność z Φ we wszystkich punktach wspólnej tworzącej g . Paraboloidę taką nazywać będziemy ściśle styczną i oznaczać przez Π_s .

3. Wyobraźmy sobie obecnie, że paraboloida Π , stykająca się z powierzchnią Φ wzdłuż wspólnej tworzącej g , ma w punkcie A tej tworzącej wspólną płaszczyznę ściśle styczną τ ; wtedy każda płaszczyzna σ , poprowadzona przez A , przecina płaszczyznę τ podług prostej s , powierzchnie zaś podług krzywych c i c^2 , które dotykają stycznej s w punkcie A i mają w nim po trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty wspólne, a zatem posiadają w punkcie A tę samą krzywiznę (Rys. 2).

Ze zmianą położenia płaszczyzny przecinającej σ w przestrzeni i stycznej s na płaszczyźnie τ zmienia się krzywizna krzywych c i c^2 w punkcie A , która przechodzi przez wartość graniczną 0 ($\rho = \infty$), gdy styczna s zejdzie się z drugą tworzącą t paraboloidy Π , znajdującą się na pł. τ i przechodzącą przez punkt styczności A . Tworząca zatem t ,

Rzuty te obu układów przecinać się będą pod kątem prostym, gdy paraboloida jest równoboczna, t. j. gdy $\pi_{t\infty} \perp \pi_{g\infty}$.

Jeżeli płaszczyzna styczna w dowolnym punkcie A paraboloidy jest prostopadła do $\pi_{t\infty}$, t. j. $\tau \perp \pi_{t\infty}$, wtedy rzuty prostokątne na nią tylko tworzących układu (g) są równoległe, gdy zaś $\tau \perp \pi_{g\infty}$, to znowu tylko rzuty tworzących (t) są równoległe.

5-a. Wyjdźmy od wyprowadzenia konstrukcji krzywizny normalnego przekroju paraboloidy równobocznej Π_r w jej wierzchołku W (Rys. 3).

Oznaczmy tworzące wierzchołkowe przez g i t i przyjmijmy, że powierzchnię tę wytwarza tworząca g , odbywająca swój ruch po kierownikach t i t_1 , które przecina w punktach $A \equiv W$ i B (rys. 3a)). Jeżeli punkt A odbędzie na t w nieskończenie małym czasie dt , ruchem postępowym z prędkością v_1 drogę $AA_n = v_1 \cdot dt$, to w tym samym czasie odbędzie punkt B na t_1 takimże ruchem z prędkością v_1 drogę $BB_n = v_1 \cdot dt$, którą otrzymamy z przyjętej drogi AA_n , jeżeli t_1 przetniemy płaszczyzną $\parallel \Pi_{t\infty}$, poprowadzoną przez punkt A_n . Łącząc punkty A_n i B_n , otrzymamy prostą $g_n = A_n B_n$, której położenie zajmie tworząca g po odbyciu ruchu swego w przestrzeni w czasie dt . Ruch ten można rozłożyć na dwa ruchy składowe: przesunięcie równoległe na pł. stycznej $\tau \equiv (g \cdot t)$, o nieskończenie mały odcinek $AA_n = B B_n' = v_1 \cdot dt$, do położenia $g_n' = A_n B_n'$, i nieskończenie mały obrót o kąt ω prostej g_n' w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny normalnej $(g \cdot n)$ w punkcie $A \equiv W$. Przy tym obrocie punkt B_n' opisze nieskończenie mały łuk $B_n B_n' = \sqrt{B B_n'^2 - B B_n'^2} = dt \sqrt{v_1^2 - v_1'^2}$, który możemy przyjmując, że jest $\perp \tau$; oznaczając więc stały odcinek $AB = A_n B_n' = a$, otrzymamy z trójkąta $A_n B_n B_n'$ wyrażenie

$$tg \omega = \frac{dt \sqrt{v_1^2 - v_1'^2}}{a} \dots \dots \dots (1)$$

Wyobraźmy sobie obecnie przekrój c_n paraboloidy Π_r (rys. 3a)) płaszczyzną normalną $(s \cdot n)$, przecinającą płaszczyznę styczną τ podług prostej s , zamykającej z tworzącą t kąt α . Prosta s jest styczną krzywej c_n , ma więc z nią dwa nieskończenie bliskie punkty wspólne; następny jej nieskończenie bliski punkt przypadnie w punkcie L_n , w którym tworząca g_n przebije płaszczyznę $(s \cdot n)$. Drogę w przestrzeni, którą musi odbyć jakiś punkt tworzącej g , schodzący się w pierwotnym jej położeniu z punktem A , aby zająć położenie L_n , można rozłożyć również na dwie składowe: a) na drogą $AS_n = \frac{v_1 dt}{\cos \alpha} = v' \cdot dt$, którą odbył ten

punkt w czasie dt ruchem postępowym z prędkością v' po stycznej s , podczas przesuwania się równoległego tworzącej g po pł. τ ; b) na drogę $S_n L_n \perp s$, którą odbyłby ten punkt na płaszczyźnie $(s \cdot n)$ podczas obrotu prostej g_n' w płaszczyźnie $\parallel (g \cdot n)$. Ta ostatnia droga da się wyrazić równaniem:

$S_n L_n = S_n A_n \cdot tg \omega = V_1 \cdot dt \cdot tg \alpha \cdot tg \omega$, a po uwzględnieniu równania (1):

$$S_n L_n = v_1 tg \alpha \frac{\sqrt{v_1^2 - v_1'^2}}{a} dt^2 = v'' \cdot dt^2 \dots \dots \dots (2)$$

Koło styczne do s w punkcie A i przechodzące przez nieskończenie bliski punkt L_n jest kołem krzywiznowym przekroju c_n w punkcie A . Promień jego ρ obliczymy przy pomocy trójkąta prostokątnego $A L_n N$, w którym bok $L_n N \perp A L_n$, wysokość zaś $L_n N_1 = A S_n = \frac{v_1 dt}{\cos \alpha}$, da się również obliczyć z twierdzenia o średniej geometrycznej:

$$\overline{L_n N_1^2} = A N_1 \cdot N_1 N = A N_1 (A N - A N_1),$$

czyli

$$\left(\frac{v_1 dt}{\cos \alpha} \right)^2 = A N_1 (2\rho - A N_1).$$

A ponieważ odcinek $A N_1$ jest znikająco mały wobec 2ρ , mamy przeto:

$$\left(\frac{v_1 dt}{\cos \alpha} \right)^2 = A N_1 \cdot 2\rho \dots \dots \dots (2')$$

Z rysunku jednak poznajemy, że $A N_1 = S_n L_n$; a wprowadzając do równania (2') wartość za $S_n L_n$ z równania (2), otrzymamy:

$$\left(\frac{v_1 dt}{\cos \alpha} \right)^2 = 2\rho v_1 dt^2 tg \alpha \frac{\sqrt{v_1^2 - v_1'^2}}{a},$$

stąd

$$\rho = \frac{\left(\frac{v_1}{\cos \alpha} \right)^2}{2 v_1 tg \alpha \frac{\sqrt{v_1^2 - v_1'^2}}{a}} \dots \dots \dots (3)$$

czyli, po wprowadzeniu w liczniku za $\frac{v_1}{\cos \alpha} = v'$, a w mianowniku za

$v_1 tg \alpha \frac{\sqrt{v_1^2 - v_1'^2}}{a} = v''$ [por. rów. (2)], równanie (3) przyjmie kształt:

$$\rho = \frac{v'^2}{2v''} \dots \dots \dots (4^*)$$

Aby na podstawie równania (4) skonstruować promień krzywizny ρ przekroju normalnego c_n w punkcie A , należy wyjaśnić geometrycznie znaczenie wyrażeń w liczniku i mianowniku. W tym celu przyjmijmy na kierownicy t [Rys. 3b)] odcinek AA_1 za prędkość v_1 punktu A , a na kierownicy t_1 odetnijmy, sposobem w ust. pierw. art. 4 wskazanym, odcinek BB_1 jako prędkość v_1 punktu B . Jeżeli przez A_1 poprowadzimy prostą $A_1S \equiv G_1' \parallel G$, to przetnie ona styczną s w punkcie S , prostą zaś $BB_1' \parallel t$ w punkcie B_1' ; odcinek $AS = \frac{v_1}{\cos \alpha} = v'$ przedstawiać nam będzie prędkość ruchu postępowego punktu A na stycznej s , odcinek zaś $B_1B_1' = \sqrt{v_1^2 - v_1'^2}$ prędkość obrotową punktu B_1' przy obrocie prostej g_1' w płaszczyźnie równoległej do $(g \cdot n)$, do położenia $g_1 \equiv A_1B_1$. Przy tym obrocie prostej g_1' punkt S obróci się z prędkością SL , którą otrzymamy, jeżeli prostą $SL \parallel n$ przetniemy w punkcie L zapomocą prostej $g_1 \equiv A_1B_1$. Z trójkątów bowiem podobnych SLA_1 i $A_1B_1B_1'$ wynika proporcja:

$$SL : SA_1 = B_1B_1' : A_1B_1,$$

czyli

$$SL : v_1 \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{v_1^2 - v_1'^2} : a,$$

skąd otrzymujemy wyrażenie na $SL = v_1 \operatorname{tg} \alpha \frac{\sqrt{v_1^2 - v_1'^2}}{a}$, które jest zupełnie zgodne z wyrażeniem w równaniu (2), gdzie oznacza połowę przyspieszenia, z jakim punkt S_n [rys. 3a)] porusza się ruchem jednostajnym przyspieszonym na pł. $(s \cdot n)$, jak również zgodne z wyrażeniem w mianowniku równania (3).

Promień zatem krzywizny ρ normalnego przekroju c_n w wierzchołku parabolojdy równobocznej Π_r płaszczyzną $(s \cdot n)$ konstruujemy sposobem następującym [Rys. 3b)]:

Przez dowolny punkt B na tworzącej wierzchołkowej g prowadzimy tworzącą t_1 układu (t) i wyznaczamy jej rzut prostokątny t_1' na płaszczyznę styczną $\tau \equiv (g \cdot t)$. Przez dowolny punkt A_1 na drugiej tworzącej wierzchołkowej t prowadzimy prostą $g_1' \parallel g$, która prze-

*) Porów. Prace matem.-fizycz. tom XXXII, str. 86. Kalicun-Chodowicki. Przyczynek do konstrukcji elementów styczności i środka krzywizn jednobieżnych krzywych płaskich przy pomocy Geometrii kinematycznej.

cina styczną s w punkcie S , rzut g_1' w punkcie B_1' . Przez punkt S poprowadzimy prostą $SL \parallel n$, przez B_1' prostą $B_1'B_1 \parallel n \perp \tau$, która przecina tworzącą t_1 w punkcie B_1 , a prosta $A_1B_1 \equiv g_1$ przecina prostą SL w punkcie L .*).

Odcinek AS przedstawia prędkość v' , z którą punkt A odbywa ruch postępowy na stycznej s , odcinek zaś SL prędkość v'' , z którą punkt S stycznej s obraca się na płaszczyźnie przekroju $(s \cdot n)$.

Z wyznaczonych w ten sposób prędkości v' i v'' wykreślimy promień krzywizny ρ przekroju c_n w punkcie A na podstawie wzoru (4), jeżeli koniec L odcinka $SL, \equiv 2v''$ na prostej SL połączymy z A , a następnie z punktu S poprowadzimy prostą $SK_n \perp AL$. Prosta ta przetnie normalną $n \equiv 0$ w punkcie K_n , który jest środkiem krzywizny, odcinek zaś AK_n promieniem krzywizny.

b) Konstrukcja krzywizny przekroju skośnego C_s w wierzchołku W parabolojdy równobocznej Π_r .

Wyobraźmy sobie obecnie, że poprowadziliśmy przez wierzchołek W równobocznej parabolojdy Π_r płaszczyznę $(s \cdot n_1)$ skośną do pł. stycznej $\tau \equiv (g \cdot t)$; krawędź tych płaszczyzn oznaczmy znowu przez s , krzywę przekroju przez c_s (Rys. 3a), punkt przecięcia się z płaszczyzną $(s \cdot n_1)$ nieskończenie bliskiej krawędzi g_n przez M .

Punkty M , A i styczna s wyznaczają koło krzywiznowe przekroju c_s . Do wykreślenia jego promienia ρ_s musimy mieć — według poprzedniego ustępu**) — prędkość postępową v' punktu A na stycznej s i prędkość obrotową jednego punktu tej stycznej w płaszczyźnie $(s \cdot n_1)$ na prostej $p \perp s$. (Rys. 3b). Prędkość postępową v' , jak poznajemy z rysunku, jest taka sama, jak dla przekroju normalnego c_n , celem zaś wyprowadzenia prędkości obrotowej weźmy pod uwagę trójkąt S_nL_nM (rys. 3a), w którym bok S_nM przedstawia drogę, jaką zakreśla punkt S_n na płaszczyźnie $(s \cdot n_1)$ podczas obrotu prostej g_n' w płaszczyźnie równoległej do pł. normalnej $(g \cdot n)$.

Oznaczając w tym trójkącie kąt L_nS_nM przez λ i stosując do niego twierdzenie o wstawach, mamy:

$$M S_n : S_n L_n = \sin (90^\circ + \omega) : \sin [90^\circ - (\omega + \lambda)]$$

$$= \cos \omega : \cos (\omega + \lambda) = \cos \omega : (\cos \omega \cos \lambda - \sin \omega \sin \lambda).$$

*) Zauważyć należy, że prosta $A_1B_1 \equiv g_1$ jest równoległa do prostej A_1B_1 łączącej punkt A z rzutem prostokątnym B_1 punktu B na pł. normalną $(g \cdot n)$.

**) Por. dopisek u dołu str. 8 niniejszej rozprawy.

Przyjmując $\lim \cos \omega = 1$, $\lim \sin \omega = 0$ i wprowadzając za $S_n L_n$ wyrażenie z równania (2) ust. a), dochodzimy do równania:

$$M S_n = \frac{v'' dt^2}{\cos \lambda},$$

czyli

$$\frac{M S_n}{dt^2} = \frac{v''}{\cos \lambda} = v''' \quad \dots \quad (5)$$

Prędkość zatem $v''' = SL_2$ [rys. 3b], z jaką porusza się punkt S stycznej s w płaszczyźnie skośnej ($s \cdot n_1$) po dowolnej prostej l , przechodzącej przez S , otrzymamy z prędkości obrotowej $v'' = SL$ tego punktu w płaszczyźnie normalnej ($s \cdot n$), jeżeli prostą l przetniemy w punkcie L_2 zapomocą prostej, poprowadzonej w płaszczyźnie (l, S, L) przez punkt L , prostopadłe do SL .

Przy pomocy prędkości v''' wykreślimy prędkość obrotową $v^{III} = SL_3$ tego punktu S na prostej $p \perp s$ w płaszczyźnie ($s \cdot n_1$), jeżeli prostą p przetniemy w punkcie L_3 zapomocą prostej $L_2 L_n \parallel s$.*

Wprowadzając wyznaczone prędkości v' i v^{III} do równania (4), otrzymamy:

$$\rho_s = \frac{v'^2}{2 v^{III}} \quad \dots \quad (6)$$

Równanie (6) wskazuje, że ρ_s wykreślamy tak samo, jak ρ :

Prędkość obrotową, $v^{III} = SL_n$ przedłużamy o taką samą długość do punktu L_4 , t. j. $SL_4 = 2 \cdot SL_3$, łączymy następnie L_4 z punktem A i wykreślamy do tej prostej AL_4 z punktu S prostopadłą SK_s ; ta prostopadła przecina normalną n_1 krzywej c_s w punkcie K_s , który jest środkiem krzywizny, odcinek zaś AK_s promieniem krzywizny w punkcie A tej krzywej.

c) Zastanawiając się bliżej nad konstrukcjami, wyprowadzonymi w ust. a) i b) niniejszego artykułu, dochodzimy dodatkowo do następujących własności:

1) Wykreślając na rys. 3b) z prędkości $v'' = SL$ prędkość $v''' = SL_2$, prowadziliśmy przez L prostą $LL_2 \perp SL$, a więc równoległą do płaszczyzny stycznej $\tau = (s \cdot g)$; tak samo jest równoległą do płaszczyzny τ prosta $L_2 L_3 \parallel s$, przy pomocy której wykreśliliśmy z prędkości v''' na prostej l prędkość v^{III} na prostej $p \perp s$. Stąd wynika, że punkty L , L_2 i L_3 leżą na płaszczyźnie, równoległej do pł. stycznej τ . A zatem:

*) Tamże str. 84.

Prędkości, z jakimi poruszałby się punkt S stycznej s , przy jej obrocie dokoła punktu A , po prostych przechodzących przez niego, są równo odcinkom, które odcina na tych prostych, licząc od punktu S , płaszczyzna równoległa do płaszczyzny stycznej paraboloidy w punkcie A .*).

Jeżeli więc jest znana prędkość punktu S na jednej z tych prostych, możemy z łatwością wyznaczyć jego prędkość na każdej innej, a temsamem skonstruować promień krzywizny przekroju paraboloidy dowolną płaszczyzną, przechodzącą przez styczną s .

2) Jeżeli na rys. 3b) oznaczymy kąt nachylenia płaszczyzny skośnej ($s \cdot n_1$) do płaszczyzny normalnej ($s \cdot n$) przez φ , otrzymamy z trójkąta prostokątnego $SL L_3$:

$$SL_3 = v^{III} = \frac{v''}{\cos \varphi} = \frac{v_1 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{v_1^2 - v_1'^2}}{\cos \varphi} \quad [\text{Por. rów. (2)}]$$

Po wprowadzeniu tego wyrażenia za v^{III} do równania (6), mamy przy uwzględnieniu $v' = \frac{v_1}{\cos \alpha}$:

$$\rho_s = \frac{\left(\frac{v_1}{\cos \alpha}\right)^2}{2 v_1 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{v_1^2 - v_1'^2}} \cos \varphi = \rho \cos \varphi \quad [\text{Por. rów. (3)}]$$

Promień ρ_s krzywizny przekroju paraboloidy w punkcie A płaszczyzną skośną ($s \cdot n_1$) jest rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę promienia krzywizny w tym punkcie przekroju normalnego paraboloidy płaszczyzną ($s \cdot n$).

3) Należy zauważyć w końcu, że powyższe związki między v^{III} i v'' ρ_s i ρ przekrojów paraboloidy równobocznej Π_r w jej wierzchołku $A \equiv W$, są niezależne od rodzaju paraboloidy i charakteru jej punktu A , dlatego w następnych artykułach będziemy brali pod uwagę tylko przekroje normalne paraboloidy dowolnej Π .

6. Konstrukcja krzywizny normalnego przekroju dowolnej paraboloidy Π w jej wierzchołku W [Rys. 4].

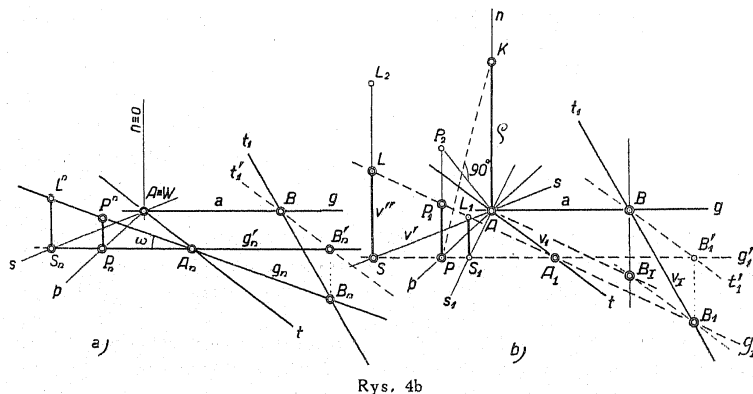
Tworzące wierzchołkowe g i t nie są do siebie prostopadłe, jednak rzuty prostokątne na płaszczyznę styczną $\tau = (g, t)$ obu układów tworzących paraboloidy są względem siebie równoległe (por. art. 4), z czego

*) Jestto analogia do konstrukcyj na płaszczyźnie wyprowadzonych na str. 84, 85 tamże.

wynika zgodność konstrukcji krzywizny normalnego przekroju w wierzchołku W paraboloidy Π z konstrukcją takiegoż przekroju w wierzchołku paraboloidy równobocznej Π_r .

Jeżeli bowiem przyjmijemy, że paraboloidę Π wytwarza tworząca g przez ruch swój po kierownicach t i t_1 , to jej przejście do nieskończenie bliskiego położenia g_n da się znowu rozłożyć na równoległe przesunięcie na pł. τ do $g_n \parallel g$, i na obrót o nieskończenie mały kąt ω w płaszczyźnie $\parallel (g \cdot n)$ (Rys. 4a). Przy pierwszym ruchu składowym punkt A odbywa po prostych t , p , s , s_1, \dots przechodzących przez niego na pł. τ , nieskończenie małe drogi AA_n , AP_n , AS_n, \dots , które wyznacza na nich prosta $g_n' \parallel g$, podczas drugiego ruchu poszczególne punkty prostej g_n' zakreślają w pł. $\parallel (g \cdot n)$ nieskończenie małe łuki, które ogranicza prosta g_1 .

Przyjmując więc na rys. 4b) prędkość postępową $v_1 = AA_1$ punktu



Rys. 4b

A na kierownicy t , wyznaczmy z niej prędkości postępowe AP , AS , AS_1, \dots tego punktu na prostych przez niego na pł. stycznej τ przechodzących, jeżeli te proste przetniemy prostą g_1' , poprowadzoną przez punkt A , równoległą do g , a więc tak samo jak na rys. 3b).

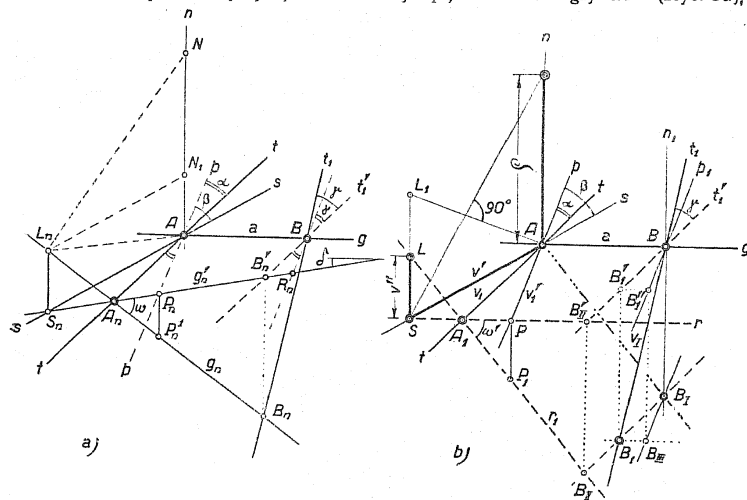
Również tak samo jak na rys. 3b) wyznaczono na rys. 4b) przy pomocy prędkości $v_1 = BB_1$ prędkości obrotowe punktów P , S , S_1, \dots , przecinając prostopadłe w tych punktach do pł. stycznej prostą $g_1 = A_1 B_1$, która, jak z rysunku poznajemy, jest równoległa do prostej $A B_1$, łączącej punkt A z punktem B_1 , który jest rzutem równoległym w kierunku $t_1' \parallel t$ punktu B_1 na płaszczyznę normalną $(g \cdot n)$.

Przy pomocy prędkości v' i v'' w jakiegokolwiek płaszczyźnie normalnej w punkcie A , które nazywać będziemy parą prędkości sprzężonych, wyznaczmy:

- 1) środek i promień krzywizny według równania (4);
- 2) parę prędkości sprzężonych w jakiegokolwiek innej płaszczyźnie normalnej, przechodzącej przez A , a więc również parę prędkości $(v_1, 0)$ w płaszczyźnie $(n \cdot t)$, czyli tworzącą t , gdyby nie była dana, przy pomocy prostej $g_1' \parallel g$ i prostej $g_1 \parallel AB_1$.

7. Konstrukcja krzywizny normalnego przekroju dowolnej paraboloidy Π w punkcie A , w którym płaszczyzna styczna jest prostopadła do jednej z płaszczyzn kierowniczych [Rys. 5]

Niechaj płaszczyzna styczna $\tau = (g \cdot t)$ w punkcie A będzie prostopadła do płaszczyzny kierowniczej πg_{∞} . Wtedy rzuty prostopadłe na pł. τ tylko tworzących układu (t) są do siebie równoległe, z czego wynika, że rzut prostopadły t_1' kierownicy t_1 jest równoległy do t (Rys. 5a),



Rys. 5

rzut zaś g_n' sąsiedniego położenia g_n tworzącej g zamyka z nią na płaszczyźnie τ nieskończenie mały kąt δ . Ruch zatem tworzącej g po kierownicach t i t_1 , prowadzący ją w nieskończenie małym czasie dt do położenia g_n , możemy rozłożyć na dwa nieskończenie małe obroty.

a) o nieskończenie mały kąt δ na płaszczyźnie τ , do położenia g_n' ;

b) o nieskończenie mały kąt ω w płaszczyźnie $(g_n' \cdot g_n) \perp \tau$ do położenia g_n .

Ad a). Poprowadźmy przez punkt A na płaszczyźnie τ : styczną $p \perp g$, a kąt jej z tworzącą t oznaczmy przez α ; następnie dowolną styczną s , zamykającą z p kąt β .

Podczas obrotu tworzącej g na pł. τ punkt A odbywa po prostych t , p i s drogi AA_n , AP_n i AS_n , których zależność od siebie wyprowadzimy z trójkątów $AP_n A_n$ i $AP_n S_n$.

Z trójkąta $AP_n A_n$ mamy:

$$\begin{aligned} AA_n : AP_n &= \sin(90 + \delta) : \sin[90 - (\alpha + \delta)] \\ &= \cos \delta : \cos(\alpha + \delta) \\ &= \cos \delta : (\cos \alpha \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{przyjmując } \lim_{\delta \rightarrow 0} \cos \delta = 1, \lim_{\delta \rightarrow 0} \sin \delta = 0$$

$$AP_n = AA_n \cos \alpha, \text{ a po wprowadzeniu za } AA_n = v_1 dt,$$

$$AP_n = v_1 \cos \alpha \cdot dt, \text{ czyli } \frac{AP_n}{dt} = v_1 \cos \alpha = v_1' \quad . \quad . \quad (7)$$

Z trójkąta drugiego $AP_n S_n$ mamy:

$$\begin{aligned} AS_n : AP_n &= \sin(90 + \delta) : \sin[90 - (\delta + \beta)] \\ AS_n : v_1' dt &= \cos \delta : \cos(\delta + \beta), \text{ zaś dla } \lim_{\delta \rightarrow 0} \cos \delta = 1, \lim_{\delta \rightarrow 0} \sin \delta = 0, \\ &= 1 : \cos \beta, \text{ stąd} \end{aligned}$$

$$AS_n = \frac{v_1' dt}{\cos \beta}, \text{ czyli } \frac{AS_n}{dt} = \frac{v_1'}{\cos \beta} = v' \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Ad b). Podczas obrotu tworzącej g_n' w płaszczyźnie $(g_n' \cdot g_n) \perp \tau$ punkt S_n odbywa w płaszczyźnie $(s \cdot n)$ drogę

$$S_n L_n = S_n A_n \operatorname{tg} \omega \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Wyraźmy $S_n A_n$ i $\operatorname{tg} \omega$ przez przyjęte wielkości $AA_n = v_1 dt$, $BB_n = v_1 dt$, α , β , δ i kąt $\gamma = (t_1 \cdot t_1')$.

Z trójkąta $AS_n A_n$ mamy:

$$\begin{aligned} S_n A_n : AA_n &= \sin(\beta - \alpha) : \sin[90 - (90 + \delta)] \\ &= \sin(\beta - \alpha) : \cos(\beta + \delta) \\ &= \sin(\beta - \alpha) : (\cos \beta \cos \delta - \sin \beta \sin \delta), \text{ dla } \lim_{\delta \rightarrow 0} \cos \delta = 1, \end{aligned}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sin \delta = 0$$

$$= \sin(\beta - \alpha) : \cos \beta, \text{ stąd}$$

$$S_n A_n = \frac{AA_n \cdot \sin(\beta - \alpha)}{\cos \beta} = \frac{v_1 \sin(\beta - \alpha)}{\cos \beta} dt \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Poprowadźmy przez punkt B (rys. 5a) prostą $BR_n \perp g$, a punkt przecięcia się jej z g_n' oznaczmy przez R_n . Dla nieskończenie małego kąta δ możemy przyjąć, że w trójkątach prostokątnych $AP_n A_n$ i $BR_n B_n$, boki $A_n P_n$ i $R_n B_n'$, leżące naprzeciw równych kątów $A_n AP_n = B_n' BR_n = \alpha$, są równe, z czego wyniknie $A_n B_n' = P_n R_n = \frac{AB}{\cos \delta} = \frac{a}{\cos \delta} = a$, dla $\lim_{\delta \rightarrow 0} \cos \delta = 1$.

Jeżeli przyjmiemy następnie, że nieskończenie mały łuk $B_n B_n' \perp \tau$, otrzymamy z prostokątnych trójkątów $A_n B_n B_n'$ i $B_n B_n' B$:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{B_n B_n'}{A_n B_n'} = \frac{BB_n \sin \gamma}{a} = \frac{v_1 \sin \gamma}{a} dt \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Po wprowadzeniu wartości z równania (10) i (11) do równania (9), otrzymujemy:

$$S_n L_n = \frac{v_1 v_1 \sin(\beta - \alpha) \sin \gamma}{a \cos \beta} dt^2,$$

czyli

$$\frac{S_n L_n}{dt^2} = \frac{v_1 v_1 \sin(\beta - \alpha) \sin \gamma}{a \cos \beta} = v'' \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Przyjmijmy na kierownicy t (Rys. 5b) dowolny odcinek $A A_1 = v_1$ za prędkość postępową punktu A na tej kierownicy, odcinek zaś $BB_1 = v_1$, który wyznacza na kierownicy t_1 płaszczyznę, poprowadzoną przez A_1 równoległą do $(g \cdot n)$, za prędkość postępową punktu B na kierownicy t_1 . Wyznaczmy następnie rzut równoległy B_1 punktu B_1 w kierunku $t_1' \parallel t$ na płaszczyznę normalną $(g \cdot n)$.

Przez punkt A_1 poprowadźmy prostą $r \parallel g$ i prostą $r_1 \parallel AB_1$.

Z trójkątów prostokątnych $A A_1 P$ i $A S P$ mamy:

$$AP = v_1 \cos \alpha = v_1' \text{ według równania (7).}$$

$$AS = \frac{v_1'}{\cos \beta} = v' \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Oznaczmy punkt, w którym prosta r przecina t_1' przez B_{II}' , punkt zaś, w którym r_1 przecina prostą $B_1 B_I$ przez B_{II} . Z rysunku poznajemy, że

$$B_{II} B_{II}' = B_1' B_1 = v_1 \sin \gamma,$$

a więc

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{B_1 B_1'}{A_1 B_{II}'} = \frac{v_1 \sin \gamma}{a}$$

Z trójkąta $AS A_1$ mamy:

$$S A_1 : v_1 = \sin (\beta - \alpha) : \cos \beta,$$

stąd

$$S A_1 = \frac{v_1 \sin (\beta - \alpha)}{\cos \beta}.$$

Z trójkąta zaś $LS A_1$:

$$SL = S A_1 \operatorname{tg} \omega' = \frac{v_1 v_1 \sin (\beta - \alpha) \sin \gamma}{a \cos \beta} = v'' \text{ według równ. (12).}$$

Udowodniliśmy zatem, że *prędkości sprzężone przekroju normalnego paraboloidy w punkcie A, w którym płaszczyzna styczna jest prostopadła do jednej z płaszczyzn kierowniczych, dadzą się wyznaczyć taką samą konstrukcją, jak w wierzchołku paraboloidy.*

Celem wykazania, że również konstrukcja promienia krzywizny w przyjętym punkcie A jest zgodna z konstrukcją poznaną w poprzednich artykułach, weźmy pod uwagę koło krzywiznowe w płaszczyźnie normalnej $(s \cdot n)$ (rys. 5a), wyznaczone przez styczną s , punktem styczności A i nieskończenie bliskim punktem L_n . Koło to niechaj przecina normalną n w punkcie N . Wysokość $L_n N_1 = A S_n$ trójkąta prostokątnego $A L_n N$ dzieli przeciwprostokątną $AN = 2\rho$ na odcinki $AN_1 = S_n L_n$ i $N_1 N = 2\rho - S_n L$, z którymi tworzy proporcję ciągłą:

$$S_n L_n : A S_n = A S_n : (2\rho - S_n L),$$

stąd

$$2\rho - S_n L = \frac{A S_n^2}{S_n L_n};$$

po wstawieniu zaś w licznik i mianownik wartości z równań (8) i (12), i skreślanii $S_n L$ jako nieskończenie małego odcinka wobec 2ρ , otrzymamy:

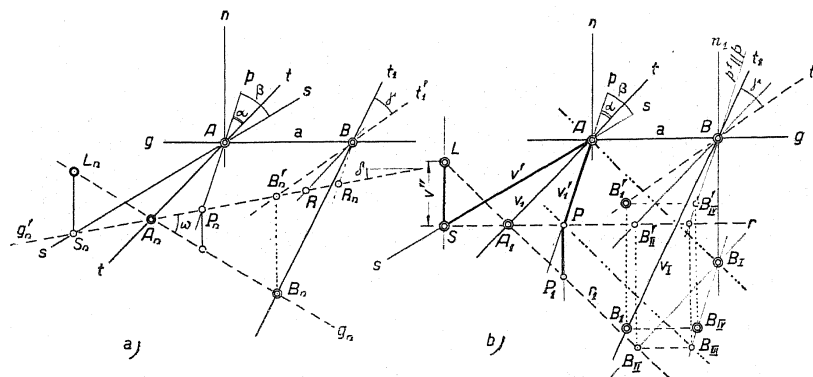
$$\rho = \frac{\left[\frac{v_1}{\cos \beta} \right]^2}{2 v_1 v_1 \sin (\beta - \alpha) \sin \gamma} = \frac{v'^2}{2 v''} \dots \dots \dots (13^*)$$

a zatem zupełnie zgodne równanie z równaniem (4) str. 8.

*) B. Procházka. Vybrané statě z deskriptivné Geometrie, VI Svazek — str. 132.

8. Konstrukcje krzywizn normalnego przekroju paraboloidy II w dowolnym jej punkcie A (Rys. 6).

Pozostaje nam w końcu do wyprowadzenia konstrukcja krzywizny normalnego przekroju paraboloidy w dowolnym jej punkcie A , którego płaszczyzna styczna $\tau \equiv (g \cdot t)$ ma dowolne położenie względem płaszczyzn kierowniczych, wskutek czego, żaden z obu układów tworzących nie będzie miał rzutów prostokątnych na tę płaszczyznę równoległych, a zatem ani rzut prostokątny g_n' tworzącej g_n nie będzie równoległy do g , ani także rzut t_1' kierownicy t_1 nie będzie równoległy do t . (Rys. 6a).



Rys. 6.

a) Poprowadźmy przez punkt A na rys. 6-a), podobnie jak na rys. 5-a), styczną $p \perp g$, z którą t zamyka kąt α , i styczną dowolną s , która z p zamyka kąt β . Przyjmując znowu, że prosta g_n' jest sąsiednim położeniem na pł. τ , tworzącej g po jej obrocie o nieskończenie mały kąt δ , otrzymamy z trójkątów $AA_n P_n$ i $AS_n P_n$, takie same wyrażenia na drogi AP_n i AS_n , jak w równaniach (7) i (8) art. 7, co dowodzi, że również w danym przypadku, z dowolnie przyjętej prędkości postępowej na jednej ze stycznych punktu A , np. z prędkości $v_1 = A A_1$ (Rys. 6-b), otrzymamy prędkości postępowe punktu A na innych stycznych, przecinając je prostą $r \parallel g$, poprowadzoną przez A_1 .

b) Celem wyprowadzenia konstrukcji sprzężonych prędkości obrotowych, wykreślimy na rys. 6-a) przez punkt B prostą $BR_n \parallel p$ i prostą $BR \parallel t$, i weźmy pod uwagę trapezy $A_n R B A$ i $P_n R_n B A$. Przyjmując,

że w nieskończenie małych trójkątach prostokątnych $AP_n A_n$ i $BR R_n$ bok $A_n P_n = R R_n$, otrzymamy:

$$A_n R = A_n P_n + P_n B_n' + B_n' R = A_n B_n' + B_n' R$$

$$P_n R_n = R R_n + P_n B_n' + B_n' R = A_n B_n' + B_n' R = \frac{AB}{\cos \delta} = \frac{a}{\cos \delta},$$

a zatem $A_n B_n' + B_n' R = \frac{a}{\cos \delta} = a$, przy $\lim. \cos \delta = 1$; a ponieważ

w sumie tej nieskończenie mały odcinek $B_n' R$ znika wobec skończonego odcinka $A_n B_n'$, przeto musimy przyjąć, że

$$A_n B_n' = a.$$

Wprowadzając tę wartość za $A_n B_n'$ do propozycji $S_n L_n : S_n A_n = B_n B_n' : A_n B_n'$, która wynika z podobieństwa trójkątów $S_n L A_n$ i $A_n B_n' B_n$, otrzymamy

$$S_n L_n = \frac{S_n A_n \cdot B_n B_n'}{a},$$

a po wprowadzeniu za $S_n A_n$ wartości z równania (10), zaś za $B_n B_n' = B B_n \sin j = v_1 dt \sin \gamma [\gamma = \angle(t_1 \cdot t_1')]$, wyniknie na $\frac{S_n L_n}{dt^2}$ identyczne wyrażenia z równaniem (12) poprzedniego artykułu.

Wyznaczywszy na kierownicy t_1 (rys. 6-b) odcinek $B B_1 = v_1$ jako przynależną prędkość punktu B na tej kierownicy, rzucmy prostokątnie punkt B_1 na płaszczyznę $\tau = (g \cdot t)$. Odcinek $B_1 B_1' = B_1 B \sin \gamma = v_1 \sin \gamma [\gamma = \angle(t_1 \cdot t_1')]$ jest równoległy do płaszczyzny normalnej $(n_1 \cdot p_1) \perp g$ poprowadzonej przez B prostopadle do tworzącej g ; oznaczając ten rzut przez $B_{IV} B_{IV}'$, mamy więc $B_{IV} B_{IV}' = B_1 B_1' = v_1 \sin \gamma$. A ponieważ z rysunku poznajemy, że odcinek $B_{IV} B_{IV}'$ jest równy swemu rzutowi prostokątnemu $B B_1$ na płaszczyznę normalną $(g \cdot n) \perp \tau$ w punkcie A , zaś ten ostatni jest równy swemu rzutowi równoległemu $B_{II} B_{II}'$ w kierunku kierownicy t na płaszczyznę $(v \cdot v_1) \parallel (n \cdot g)$, przeto dochodzimy do następującej równości:

$B_{II} B_{II}' = B B_1 = B_{IV} B_{IV}' = B_1 B_1' = v_1 \sin \gamma$, z której wynika jednoznaczność trójkątów $A_1 B_{II} B_{II}'$ i $A B_1 B_1'$, a stąd równoległość prostej $r_1 \equiv A_1 B_{II}$ do prostej AB_1 , przyczem punkt B_1 otrzymujemy z punktu B_1 w ten sposób, że rzucamy go prostokątnie najpierw do płaszczyzny normalnej $(n_1 \cdot p_1) \perp g$ w punkcie B , a następnie otrzymamy rzut B_{IV} rzucamy prostokątnie do płaszczyzny normalnej $(n \cdot g) \perp \tau$ w punkcie A .

Obliczmy obecnie odcinek SL , który wyznacza prosta $r_1 \parallel AB_1$ na prostej $SL \perp s$ w płaszczyźnie $(s \cdot n)$, z proporcji, jaka zachodzi w trójkątach podobnych $SL A_1$ i $A_1 B_{II} B_{II}'$:

$$SL : SA_1 = B_{II} B_{II}' : A_1 B_{II}',$$

czyli

$$SL : SA_1 = v_1 \sin \gamma : a, \text{ stąd}$$

$$SL = \frac{v_1 v_1 \sin(\beta - \alpha) \sin \gamma}{a \cos \beta} = v''.$$

Otrzymaliśmy zatem na SL wartość zupełnie zgodną z porównaniem (12) art. 7, co dowodzi, że również w dowolnym punkcie A na paraboloidzie π konstruujemy sprzężone prędkości obrotowe w płaszczyznach normalnych przekrojów w tym punkcie, tak samo jak w poprzednich przypadkach, przy pomocy prostej $r_1 \parallel s B_1$, z tą tylko różnicą, że punkt B_1 wyznaczamy z punktu B_1 w sposób wyżej opisany.

Mając wyznaczone prędkości sprzężone, konstruujemy z nich ρ na podstawie równania (13) art. 7.

C. Zastosowania poznanych konstrukcyj.

9. Zagadnienie 1.

Dana jest paraboloida hiperboliczna Π w rzutach prostokątnych zapomocą kierownic t_1 i t_2 i płaszczyzny kierowniczej $\tau_{t\infty}$, która schodzi się z płaszczyzną poziomą rzutów.

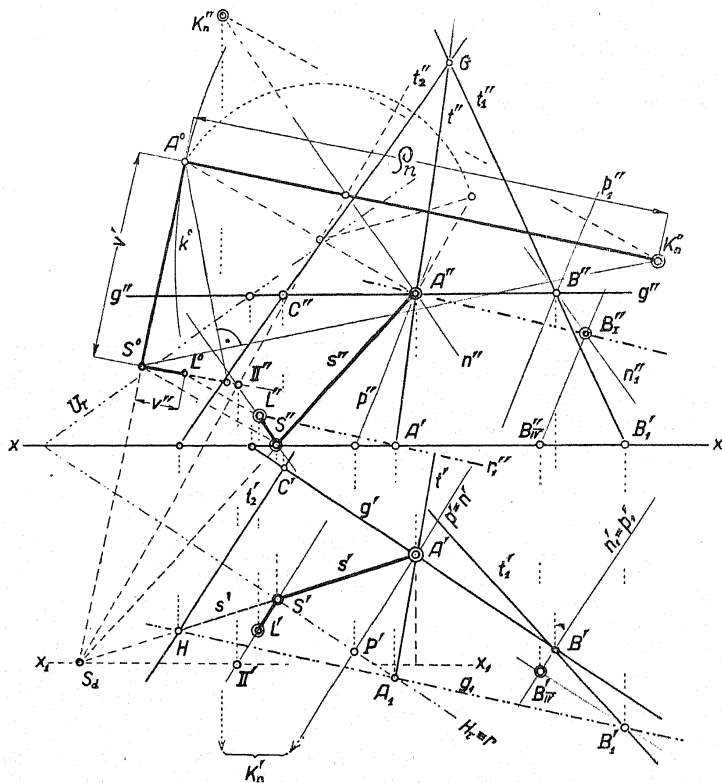
Wyznaczyć promień krzywizny ρ_n normalnego przekroju tej powierzchni w dowolnym punkcie A .

Rozwiązanie [Rys. 7.] Tworzące w punkcie A oznaczono przez g i t ; rzut pionowy $g'' \parallel x$ i przecina t_1'' i t_2'' w punktach B'' i C'' , g' łączy rzuty poziome B' i C' punktów B i C , w których tworząca g przecina w przestrzeni kierownice t_1 i t_2 . Rzut pionowy t'' tworzącej t łączy A'' z punktem G , w którym przecinają się t_1'' i t_2'' , a który jest rzutem pionowym takiej tworzącej z układu (g) , która jest prostopadła do rzutni pionowej; rzut zaś poziomy t' łączy A' ze śladem poziomym A_1 tej tworzącej, który się znajduje na tworzącej g_1 , łączącej ślady poziome B_1 i H kierownic t_1 i t_2 .

Płaszczyzną styczną $\tau \equiv (g \cdot t)$ w punkcie A zaznaczono na rysunku śladami H_1 i V_1 ; do śladów tych są prostopadłe rzuty normalnej n powierzchni w punkcie A . Dowolna styczna s przyjęta na pł. τ wyznacza z normalną n płaszczyznę, przecinającą paraboloidę podług krzywej cn , dla której mamy wyznaczyć promień krzywizny w punkcie A .

Przyjmijmy, że paraboloid Π wytwarza tworząca g przez ruch swój po kierownicach t i t_1 , przyczem punkty jej A i B poruszają się po t i t_1 z prędkościami $AA_1 = v_1$ i $BB_1 = v_1$. Celem wyznaczenia promienia krzywizny, należy skonstruować

parę prędkości sprzężonych w płaszczyźnie $(s \cdot n)$. Prędkość postępową $AS = v'$ wyznaczymy, jak w ust. a) art. 8, przecinając w punkcie S styczną s zapomocą prostej $r \parallel g$, poprowadzonej przez A_1 ; a ponieważ $r \equiv H_1$, przeto S' znajduje się na śladzie H_1 , rzut pionowy na x . Prędkość obrotową $SL \parallel n$ wyznaczamy konstrukcją, poznaną w ust. b) art. 8: rzucamy prostokątnie punkt B_1 na płaszczyznę normalną do tworzącej g w punkcie B , która jest wyznaczona przez prostą $n_1 \parallel n$ i prostą $p_1 \perp g$, leżącą w płaszczyźnie $\tau \equiv (g \cdot t)$; oznaczmy ten rzut przez B_{IV} , rzucamy go prostokątnie na pł. normalną $(g \cdot n) \equiv (g \cdot n_1)$. Jeżeli więc $n_1 \parallel n$ przechodzi przez B , to rzut ten, oznaczony przez B_I padnie na n_1 , promień zaś rzucający jest równoległy do $p_1 \parallel p$. Prosta $r_1 \parallel AB_I$ (wyznaczono ją tylko w rzucie pionowym) przecina $SL \parallel n$



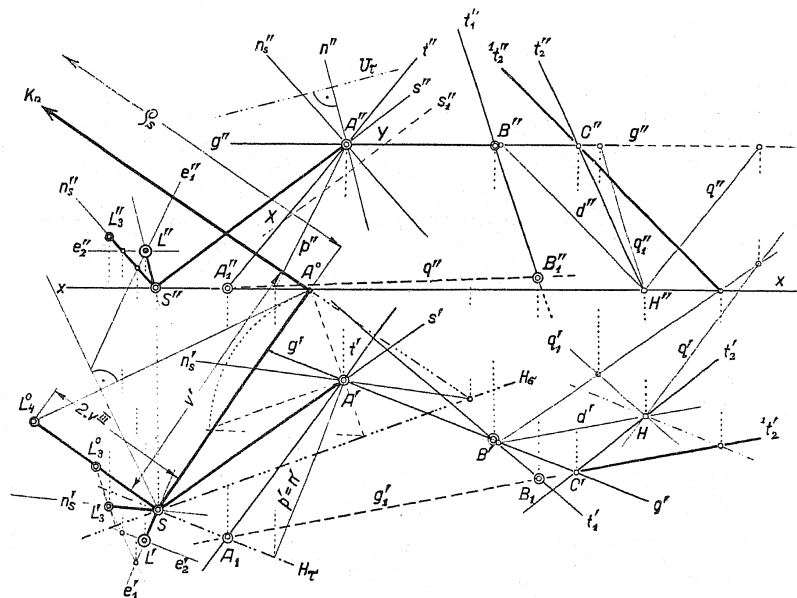
Rys. 7.

w punkcie L ; odcinek zatem SL'' jest prędkością obrotową punktu S w płaszczyźnie $(s \cdot n)$, sprzężoną z prędkością $v' = AS$.

Naturalną wielkość odcinka $SL \equiv v'$, jak również odcinka $AS \equiv v'$ wyznaczono przy pomocy układu płaszczyzny $(s \cdot n)$ na płaszczyznę pionową, prowadzoną przez oś $x_1 \parallel x$. W układzie tym wyznaczono również naturalną wielkość promienia $\rho_n = AK_n$ konstrukcją wynikającą z równania (13) art. 7.

10. Zagadnienie 2.

Dana jest w rzutach prostokątnych hiperboloida jednowłokowa Γ zapomocą kierownic t, t_1 i t_2 . Wyznaczyć promień krzywizny ρ_s skośnego przekroju tej powierzchni w dowolnym punkcie A (Rys. 8).



(Rys. 8).

Objaśnienie. Punkt A przyjmijmy na kierownicy t i poprowadźmy przez niego poprzeczną do t_1 i t_2 ; będzie to druga tworząca g hiperboloidy, przechodząca przez A , a płaszczyzna $\tau \equiv (g \cdot t)$ będzie pł. styczną w tymże punkcie. Ślady płaszczyzny τ oznaczono na rysunku przez H_1 i V_1 , punkty przecięcia się g z t_1 i t_2 przez B i C . Jeżeli t i t_1 przyjmijmy za kierownice a g za tworzącą paraboloidy hiperbolicznej

II, to jej płaszczyzna kierownicza $\pi_{g\infty}$ jest równoległa do t i t_1 . Poprowadźmy więc przez punkt H tworzącej t_2 hiperboloidy płaszczyznę ($q \cdot q_1$), równoległą do kierownic t i t_1 , i wyznaczmy jej krawędź d z płaszczyzną ($g \cdot t_2$) styczną do hiperboloidy w punkcie C . Prosta $t_2 \parallel d$, poprowadzona przez punkt C wyznacza z t i t_1 dokładnie paraboloidę II, która z hiperboloidą I ma wspólną tworzącą g i w trzech jej punktach A , B i C wspólną styczną. Obie powierzchnie zatem stykają się wzajemnie we wszystkich punktach tej tworzącej (zob. art. 2), a nadto posiadają, jak niżej wykazemy, w punktach A i B ścisłą styczność.

Wyobraźmy sobie, że poprowadziliśmy dowolną płaszczyznę α , która przecina wspólną płaszczyznę styczną $\tau = (g \cdot t)$ podług prostej s_1 (na rys. zaznaczono tylko rzut pion.), tworzące g i t w punktach Y i X , powierzchnię podług krzywych c^2 i c_1^2 . Krzywe te w punkcie Y będą się stykały, w punkcie X tylko przecinały. Jeżeli płaszczyznę α przesuniemy tak, aby przeszła przez punkt A , prosta s_1 nakryła się ze styczną s , wtedy również padną na siebie punkty Y i X , krzywe c^2 i c_1^2 będą miały w punkcie A trzy nieskończenie bliskie punkty wspólne, prosta s będzie ich wspólną styczną w tym punkcie.

Dowolna zatem płaszczyzna ($s \cdot H_2$) (rys. 8), poprowadzona przez punkt A przecina obie powierzchnie II i I podług krzywych c^2 i c_1^2 , które posiadają w tym punkcie trzy nieskończenie bliskie punkty wspólne, a zatem wspólną krzywiznę, którą wyznaczymy zapomocą, w poprzednich artykułach poznanych, konstrukcji dla paraboloidy II.

Przeprowadzenie konstrukcji. Poprowadźmy przez punkt A_1 kierownicę t prostą poprzeczną do t_1 i t_2 ; będzie to druga tworząca g_1 układu (g) paraboloidy.

Tworząca g_1 przecina kierownicę t , w punkcie B_1 ; odcinki $AA_1 = v_1$, $BB_1 = v_1$ możemy przyjąć za prędkości postępowe punktów A i B na kierownicach t i t_1 ruchu tworzącej g , wytwarzającej paraboloidę II.

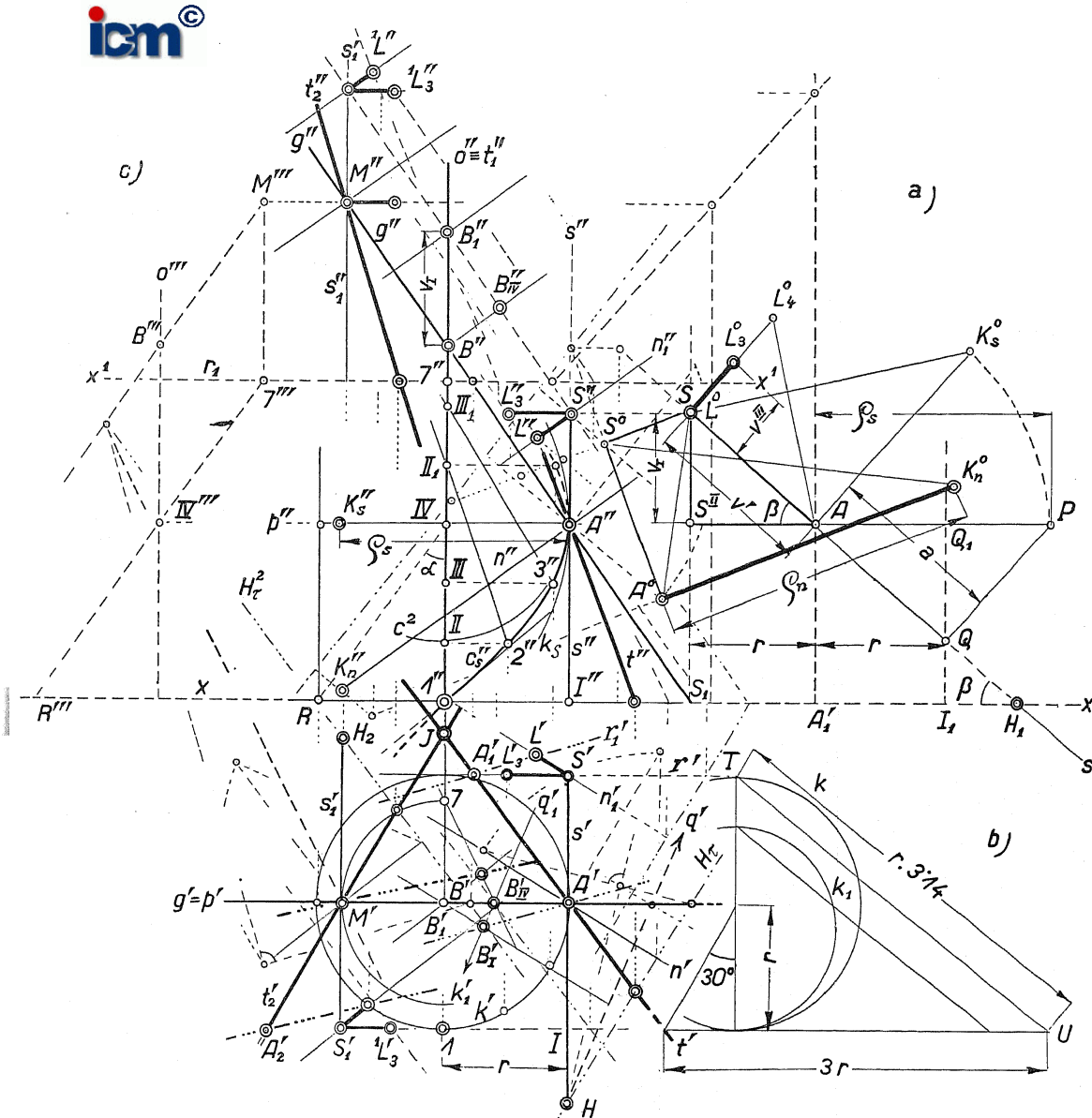
Z tych prędkości wyznaczono — zupełnie zgodnie z rysunkiem 7 — prędkości sprzężone $AS = v'$ i $SL = v''$ przekroju normalnego ($s \cdot n$) w punkcie A paraboloidy.

Z prędkości SL wyznaczamy na rys. 8 prędkość obrotową $SL_3 = v'''$ punktu S w płaszczyźnie skośnej ($s \cdot H_2$), jeżeli, w myśl ust. c) art. 5, przetniemy prostą $ns \perp s$ w płaszczyźnie ($s \cdot H_2$) [porównaj kład tej pł. na pł. poziomą] płaszczyznę (l_1, l_2), poprowadzoną przez punkt L , równoległą do pł. stycznej $\tau = (g \cdot t)$; punkt przecięcia oznaczono przez L_3 .

W ten sposób wyznaczone prędkości sprzężone $AS = v'$ i $SL_3 = v'''$ na płaszczyźnie skośnej ($s \cdot H_2$), położono je z tą płaszczyzną na rzutnię poziomą i wykreślono promień krzywizny na podstawie równania (6) ust. b) art. 5.

11. Zagadnienie 3.

Dana jest w rzutach prostokątnych skośna powierzchnia śrubowa. Wyznaczyć:



(Rys. 9).

- a) promień krzywizny ρ_n normalnego przekroju tej powierzchni w dowolnym punkcie A ;
- b) styczną główną (przebiegiem) powierzchni w tym punkcie;
- c) hiperbolojędę jednopowłokową ściśle styczną z tą powierzchnią wzdłuż tworzącej g (Rys. 9).

Objaśnienie. Przyjmijmy, że powierzchnię śrubową wytwarza prosta g przez swój po prostej o (oś), prostopadłej do rzutni poziomej, którą przecina pod stałym kątem α , i po linii śrubowej c_s , nawiniętej na walca obrotowym W o promieniu r . Oznaczmy punkty przecięcia się tworzącej z c_s przez A , z o przez B .

Ruch tworzącej g składa się w każdym momencie z dwóch ruchów: nieskończenie małego obrotu dokoła o i nieskończenie małego przesunięcia w płaszczyźnie $(o \cdot g)$. Podczas pierwszego ruchu punkt B jest w spoczynku, punkt A zakreśla nieskończenie mały łuk koła k , o promieniu $=r$, którego płaszczyzna jest $\perp o$; podczas drugiego ruchu oba punkty odbywają drogi do siebie równoległe, z równymi prędkościami. Jeżeli zatem przyjmijmy na stycznej s krzywej c_s w punkcie A odcinek $AS=v'$ [zob. rys. 9-a) — jako rzut boczny na pł. styczną do W], za prędkość ruchu punktu A po c_s , to, kreśląc przez S prostą $SS_{II} \parallel o$, przez A prostą $AS_{II} \perp SS_{II}$, otrzymamy trójkąt prostokątny AS_{II} , którego przyprostokątna $SS_{II}=v_1$ przedstawia prędkość postępową obu punktów A i B , przyprostokątna zaś AS_{II} prędkość obrotową punktu A .

Wyobraźmy sobie, że poprowadziliśmy przez styczną s płaszczyznę $(s \cdot p)$, prostopadłą w punkcie A do płaszczyzny, stycznej do walca W w tymże punkcie. Płaszczyzna ta jest, jak wiadomo, płaszczyzną ściśle styczną krzywej c_s , zawiera zatem dwie bezpośrednio po sobie następujące styczne, a więc trzy nieskończenie bliskie punkty tej krzywej, przez które przechodzą po trzy bezpośrednio po sobie następujące tworzące powierzchni śrubowej i powierzchni walcowej W ; płaszczyzna $(s \cdot p)$ przecina zatem obie powierzchnie podług krzywych, które posiadają w punkcie A trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty wspólne, a więc wspólne koło krzywiznowe k_s .

Krzywą walca jest elipsa c^2 , która ma w punkcie A wierzchołek, mała jej oś $b=r$, wielka $a=\frac{r}{\cos \beta}$, gdzie β jest kątem nachylenia stycznej s do podstawy walca [Por. rzut boczny a)]. Promień krzywizny tej elipsy w wierzchołku A małej osi obliczymy i wykażemy według znanego równania:

$$\rho_s = \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{r} = \frac{\left(\frac{r}{\cos \beta}\right)^2}{r} = \frac{r}{\cos^2 \beta}; \quad \dots \quad (1)$$

Kreśląc więc trójkąt prostokątny APQ (rys. a), którego jedną przyprostokątną jest a , rzut zaś tej przyprostokątnej na przeciwprostokątną $=b=r$, otrzymamy przeciwprostokątną $AP=\rho_s$.

Promień $\rho_s=AP$ jest zatem promieniem krzywizny przekroju skośnego powierzchni śrubowej w punkcie A płaszczyznę $(s \cdot p)$; w zagadnieniu naszym ad a) chodzi o krzywiznę przekroju tej powierzchni płaszczyznę normalną $(s \cdot n)$ w punkcie A .

Wytwórzmy kinematycznie paraboloidę Π przez ruch tworzącej g , której punkt B porusza się po kierownicy $t_1=0$ z prędkością $BB_1=v_1$, punkt zaś A po stycznej s z prędkością $AS=v'$, a której przekrój płaszczyzną $(s \cdot p)$ ma taki sam promień krzywizny ρ_s w punkcie A , jak przekrój tą płaszczyzną powierzchni śrubowej. Parabolojda ta posiada więc z powierzchnią śrubową wspólne dwie tworzące $t_1=0$ i g , a nadto wspólną płaszczyznę ściśle styczną $(g \cdot s)$ w punkcie A . Każda zatem płaszczyzna, poprowadzona przez punkt A , przetnie obie powierzchnie podług krzywych, które posiadać będą wspólną krzywiznę w tymże punkcie; płaszczyzna normalna $(s \cdot n)$ przetnie więc paraboloidę Π podług krzywej, której promień krzywizny ρ_n będzie promieniem szukanym również dla powierzchni śrubowej.

Na płaszczyźnie ściśle stycznej $(g \cdot s)$ przechodzi przez punkt A druga tworząca t paraboloidy. Wyznaczymy ją kinematycznie konstrukcją ad 2) art. 6, skoro wyznaczmy prędkości sprzężone $v'=AS$ i $v''=SL$ w płaszczyźnie normalnej $(s \cdot n)$.

Ponieważ przekrój paraboloidy dowolną płaszczyzną, przechodzącą przez tworzącą t ma w punkcie A krzywiznę $=0$, czyli $\rho=\infty$, taką samą krzywiznę będzie miał również przekrój tą płaszczyzną powierzchni śrubowej; tworząca t będzie zatem miała z tą powierzchnią trzy punkty nieskończenie bliskie wspólne, czyli będzie przecinała trzy po sobie następujące tworzące powierzchni, będzie zatem jej styczną główną (przebiegiem) w punkcie A .

Jeśli takim samym sposobem skonstruujemy w końcu styczną główną t_2 powierzchni w drugim dowolnym punkcie M na tworzącej g , to styczne główne t, t_2 wyznaczą z osią powierzchni o hiperboloidę jednopowłokową Γ_s , ściśle styczną z tą powierzchnią wzdłuż tworzącej g (por. art. 2).

Przeprowadzenie konstrukcji.

Ad a) Część linii śrubowej Cw od punktu I do A , którą opisze na walcu W punkt 1 w tym czasie, w którym jego rzut poziomy zakreśli łuk $I A'$ koła K' równający się $\frac{1}{4}$ obwodu tego koła, wykreślono w rzucie pionowym przy pomocy podziału tego łuku i odcinka na osi $I''IV=I''A''$ na 3 równe części.

Tworzące powierzchni śrubowej, przechodzące przez punkty $2, 3, A$ otrzymamy, gdy połączymy je z punktami osi II_1, III_1, B'' , wyznaczonymi w ten sposób, że odcinki $II_1=III_1, III_1=IV, B''=IV, I''$, przyczem IV, I'' jest wysokością trójkąta prostokątnego RIV, I'' , którego przeciwprostokątna zamyka z osią O kąt α .

Styczną s w punkcie A do krzywej Cw wykreślono na podstawie jej własności, że jej podstyczna $A' H$ na płaszczyźnie $\perp O$, przechodzącej przez punkt 1 , jest równa rozwiniętej łuku $I A'$. Wyznaczając więc przy pomocy konstrukcji Kochańskiego na rys. b) rozwiniętą połowę obwodu koła o promieniu r jako odcinek TU i odcinając połowę tego odcinka na rzucie poziomym s' stycznej, od A' w dół, otrzymamy ślad poziomy H stycznej s . Przy pomocy zaś tego śladu wykreślono rzut boczny tej stycznej, w którym występuje w naturalnej wielkości kąt β , pod którym są nachylone do rzutni poziomej wszystkie styczne krzywej Cw .

Mając wykreślony rzut boczny stycznej s , przyjmujemy na nim dopiero prędkość postępową $v'=SA$ punktu A , jednak dla ułatwień konstrukcyjnych tak, aby jej rzut poziomy $A' S' = r$. Przy pomocy trójkąta $AS_{II} S$ wyznaczamy również w tym rzucie prędkość postępową $v_1=S_{II} S=B'' B_1''$ punktu B , którą przenosimy następnie na rzut pionowy osi O .

Jeżeli w końcu wyznaczmy ρ_s przy pomocy trójkąta APQ [zob. rzut boczny a)], na podstawie równania (1) niniejszego artykułu, i wyobraźmy sobie, że położyliśmy płaszczyznę $(s \cdot p)$ ściśle styczną krzywej Cw w punkcie A na płaszczyznę styczną walca W w tym punkcie znajdziemy z $v'=AS=a$ i ρ_s na podstawie równania (6) art. 5 b), prędkość obrotową $v'''=SL_g$ punktu S , sprzężoną z v' w płaszczyźnie $(s \cdot p)$, która, jak wynika z porównania mianowników wspomnianych równań (1) i (6),

równa się $\frac{r}{2}$. A ponieważ płaszczyzna ściśle styczna $(s \cdot p)$ jest $\parallel x$, zaś $s \perp x$, przeto

$$\text{również } SL'_g=S''L''_g=\frac{r}{2}.$$

Prowadząc przez punkt L_g płaszczyznę równoległą do płaszczyzny stycznej $\tau=(s \cdot g)$ powierzchni śrubowej i przecinając nią w punkcie L prostą n , przechodzącą przez S równoległą do normalnej powierzchni n w punkcie A , wyznaczmy, podobnie jak w poprzednich zagadnieniach, prędkość obrotową $SL=v''$ punktu S w płaszczyźnie normalnej $(s \cdot n)$.

Z naturalnych wielkości sprzężonych prędkości $A^0 S^0=v'$ i $S^0 L^0=v''$, uzyskanych przez kład płaszczyzny $(s \cdot n)$ na płaszczyznę pionową rzutów skonstruowano ρ_n — na podstawie równania (4) art. 5a).

Ad b). Wyznaczymy punkt B_{IV} , jako rzut prostokątny punktu B_1 na płaszczyznę prostopadłą do g w punkcie B , a następnie rzucmy B_{IV} prostokątnie na płaszczyznę normalną $(g \cdot n)$ zapomocą prostej q_1/q , jeżeli q jest prostą, poprowadzoną w płaszczyźnie stycznej τ prostopadłą do g . Otrzymamy punkt B_1 . Prosta r'/g' , poprowadzona przez S' równoległą do g' , i prosta r_1' , poprowadzona przez L' równoległą do $A'B_1'$, przecinają się w punkcie A_1' , który jest rzutem poziomym punktu A_1 , wyznaczającym z A szukaną tworzącą t paraboloidy, — jako styczną główną w punkcie A powierzchni śrubowej.

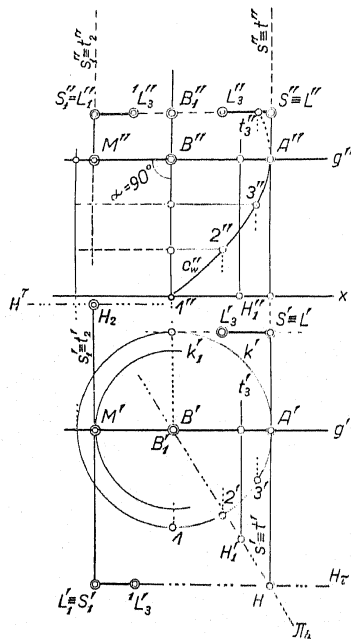
Ad c). Na rysunku 9 przyjęto na tworzącej g jeszcze jeden dowolny punkt M i wyznaczono w nim styczną główną t_m , używając tej samej metody i tej samej konstrukcji jak ad b) przy wykreślaniu stycznej głównej t . Należy tylko zauważyć, że linię śrubową, przechodzącą przez M opisuje punkt 7 , znajdujący się na walcu obrotowym o promieniu r_1 , którego podstawa jest prostopadłą do osi o i przecina rzut-

nię pionową podług prostej x' . Punkt 7, promień r , i prostą x' wyznaczono przy pomocy rzutu bocznego c) rys. 9.

Rzuty poziome obu stycznych głównych t i t_2 przecinają się w punkcie I , leżącym na średnicy koła k' , prostopadłej do średnicy przechodzącej przez rzut A' . Przez punkt I przechodzi tworząca l , należąca do układu tworzących (g) ściśle stycznej hiperboloidy Γ_s , wyznaczonej przez styczne główne t , t_2 i oś O .

12. Zagadnienie 4.

Dana jest w rzutach prostokątnych powierzchnia śrubowa prostokątna (konoida śrubowa). Wyznaczyć promień krzywizny ρ_n normalnego przekroju tej powierzchni a) w dowolnym jej punkcie A , b) w punkcie B na jej osi O [Rys. 10].



Rys. 10.

Objaśnienie. Prostokątna powierzchnia śrubowa jest szczególnym przypadkiem skośnej powierzchni śrubowej, gdy tworząca g , wyznaczająca powierzchnię śrubową zamyka z osią O kąt $\alpha = 90^\circ$.

(Rys.10). Wskutek tego płaszczyzna styczna ($s \cdot g$) w punkcie A jest płaszczyzną ściśle styczną linii śrubowej C_w w punkcie A .

Pomyślmy, że podobnie jak w poprzednim zagadnieniu, przy pomocy krzywizny krzywej C_w w płaszczyźnie ściśle stycznej ($g \cdot s$) wyznaczyliśmy prędkość obrotową $SL_3 = v'''$ punktu S w tej płaszczyźnie. Celem wyznaczenia prędkości obrotowej tego punktu w płaszczyźnie normalnej, przechodzącej przez styczną s , należy, według art. 5 c) 1), przez L_3 poprowadzić płaszczyznę równoległą do pł. stycznej w punkcie A i przeciąć nią prostą n_1 , przechodzącą przez S równoległe do normalnej powierzchni n . Prędkość ta jednak wskutek zejścia się punktu przecięcia L z punktem S równa się $SL = v'' = 0$, a zatem $\rho = \infty$, styczna s jest tworzącą t paraboloidy ściśle stycznej z konoidą śrubową w punkcie A , a więc styczną główną tej ostatniej. A zatem:

Styczne do linii śrubowych, przechodzących na konoidzie śrubowej przez poszczególne punkty jej tworzącej g , są jej stycznymi głównymi w tych punktach i wypełniają układ tworzących (t) równobocznej paraboloidy Π_r ściśle stycznej wzdłuż tworzącej g .

Płaszczyzna kierownicza $\pi_{t\infty}$ tej paraboloidy schodzi się z rzutnią poziomą, płaszczyzna zaś $\pi_{g\infty}$ jest prostopadła do tworzącej g , a więc i do $\pi_{t\infty}$; jej zatem wierzchołek przypada w punkcie B , tworzącymi wierzchołkowymi jest oś O i tworząca g .

Konstrukcja promienia krzywizny ρ_n normalnego przekroju tej paraboloidy, a zatem i konoidy śrubowej w punkcie A tworzącej g sprowadza się do przypadku z art. 7, w punkcie zaś B na osi O do przypadku z art. 5 a).

13. Zagadnienie 5.

Wyznaczyć paraboloidę ściśle styczną Π_s wzdłuż tworzącej g konoidy kolistej, danej zapomocą koła kierowniczego k w rzutni poziomej, jednej kierownicy prostej t_1 prostopadłej do rzutni pionowej i drugiej t_∞^2 znajdujące się w tej płaszczyźnie. [Rys. 11].

Rozwiązanie. Wytwórzmy kinematycznie paraboloidę, która z konoidą ma wspólne kierownice t_1 i t_∞^2 , i wspólną płaszczyznę ściśle styczną τ w punkcie A na kole kierowniczem k .

Przy pomocy promienia ρ_s koła k znajdziemy, z dowolnie przyjętej prędkości $AS = v'$ na stycznej s do koła k w punkcie A , sprzężoną prędkość obrotową $SL_3 = v'''$, a z tej ostatniej prędkość obrotową $SL = v''$ punktu S w płaszczyźnie normalnej ($s \cdot n_1$) — zupełnie tak samo, jak w poprzednich zagadnieniach. Z prędkości sprzężonych $v' = AS$ i $v'' = SL$ skonstruujemy wreszcie, jak w zagadnieniu 3, ad b) art. 11, punkt A_1 , który z punktem A wyznacza tworzącą t paraboloidy, a zatem styczną główną konoidy w punkcie A .

