Contribution à la théorie des objets géométriques

Przyczynek do teorii obiektów geometrycznych

(Démonstration de la non-existence des objets géométriques spéciaux à une composante de la classe supérieure à la troisième dans un espace à une dimension)

Par

ST. GOŁĄB (Cracovie)

Dans les travaux précédents [1]) j'ai déterminé dans un espace à une dimension tous les objets géométriques purs spéciaux à une composante de première, deuxième et troisième classes. Dans la présente note je démontre qu'il n'existe pas d'objets de classe plus élevée que la troisième.

Le résultat de ce travail semble au premier abord n'être pas nouveau. On pourrait croire qu'il est contenu dans un théorème de Lie qui dit que pour une variable il n'existe aucun groupe des transformations au nombre des paramètres essentiels plus grand que trois. Or, toutes les démonstrations de ce théorème que je connais supposent le caractère analytique de la fonction $f(x; p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots)$ et en profitent d'une manière explicite (cf. p. ex. G. Kowalewski, Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Leipzig 1931, pp. 228 sq.). Dans ma recherche je suppose uniquement que la fonction f est de classe C_1 (les dérivées partielles du premier ordre continues) et il me semble que c'est là que réside l'importance de mon résultat.

[1]) St. Gołąb, Über die Klassifikation der geometrischen Objekte, Mathem. Zeitschr. 44 (1938), 104—114.

St. Gołąb, Sur la théorie des objets géométriques (Les objets différentiels purs de deuxième et de troisième classe). Ann. Soc. Pol. Math. 19 (1946), 7—35.

M. **Ważewski** a construit tout récemment l'exemple d'un groupe de transformations à une variable et à quatre paramètres essentiels

$$x = f(x;\, p_1, p_2, p_3, p_4),$$

où f est de classe C_∞ (possédant les dérivées partielles de tous les ordres), mais non analytique.

Le résultat de M. **Ważewski** rend le résultat obtenu par moi, plus important.

Comme résultat accessoire j'obtiens le théorème de la page 12 dans lequel j'établis l'existence des objets de n-ième classe (n quelconque >3) pour un sous-groupe de transformations défini au moyen des relations (30).

§ 1. Supposons que dans un espace X_1 à une dimension soit donné un pseudo-groupe de transformations [1])

(1) $$\xi_2 = \varphi(\xi_1)$$

où la fonction φ possède les dérivées continues jusqu' à l'ordre n ($n > 4$), la dérivée première étant différente de zéro:

(2) $$\varphi'(\xi_1) \neq 0.$$

Supposons en outre que l'on donne un objet géométrique à une composante, un objet différentiel pur de la classe n. Cela signifie qu'en désignant par x_i la composante de cet objet dans le système ξ_i, il subsiste la loi suivante de transformation de la composante:

(3) $$x_2 = f(x_1;\, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n)}),$$

où la fonction f ne dépend pas du choix du système ξ_i. L'objet étant essentiellement de la classe n, on a l'inégalité

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi^{(n)}} \neq 0.$$

En ce qui concerne la régularité de la fonction

(4) $$f(x;\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

nous supposons, qu'elle est pourvue des *dérivées partielles continues* *du premier ordre par rapport à toutes les* $n+1$ *variables*. La dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ sera désignée par le symbole f_0, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$ par f_i. Nous avons donc

(5) $$f_n \neq 0.$$

Considérons un troisième système quelconque ξ_3 et la transformation

(6) $$\xi_3 = \psi(\xi_2)$$

ayant la propriété:

(7) $$\psi'(\xi_2) \neq 0$$

et appartenant à notre pseudo-groupe.

La transformation composée

(8) $$\xi_3 = \psi[\varphi(\xi_1)] = \chi(\xi_1)$$

satisfait à la condition

(9) $$\chi'(\xi_1) \neq 0.$$

Nous avons:

(10) $$x_3 = f(x_1;\, \chi', \chi'', \ldots, \chi^{(n)}).$$

D'autre part on a:

(11) $$x_3 = f(x_2;\, \psi', \psi'', \ldots, \psi^{(n)}).$$

Les relations (3), (10) et (11) conduisent à l'identité:

(12) $$f\{f(x;\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n)});\, \psi', \psi'', \ldots, \psi^{(n)}\} \equiv f(x;\chi';\chi'', \ldots, \chi^{(n)}).$$

Cette relation doit être satisfaite identiquement par toutes les valeurs des variables $x, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n)}, \psi', \psi'', \ldots, \psi^{(n)}$, parce que les dérivées $\chi', \ldots, \chi^{(n)}$ s'expriment d'une manière univoque au moyen des variables $\varphi', \varphi'', \ldots, \psi^{(n)}$.

Nous transcrirons les relations (12) sous la forme suivante:

(13) $$f\{f(x;\alpha_1, \ldots, \alpha_n);\, \beta_1, \ldots, \beta_n\} \equiv f\{x; g_1(\alpha,\beta), \ldots, g_n(\alpha,\beta)\}.$$

Les fonctions $g_i(\alpha,\beta)$ sont parfaitement déterminées; ce sont des polynômes des variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \beta_1, \ldots, \beta_i$, la fonction g_i est donc une fonction des $2\,i$ variables. On l'obtient en appliquant la formule de dérivation d'une fonction composée. On a en particulier:

(14) $$\begin{cases} g_1 = \alpha_1 \cdot \beta_1, \quad g_2 = \beta_2\,\alpha_1^2 + \beta_1\,\alpha_2, \quad g_3 = \beta_3\,\alpha_1^3 + 3\,\beta_2\,\alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\alpha_3, \\ g_4 = \beta_4\,\alpha_1^4 + 6\,\beta_3\,\alpha_1^2\,\alpha_2 + 3\,\beta_2\,\alpha_2^2 + 4\,\beta_2\,\alpha_1\,\alpha_3 + \beta_1\,\alpha_4. \end{cases}$$

[1]) St. **Gołąb**, Über den Begriff der „Pseudogruppe von Transformationen", Math. Ann. 116 (1939), 768—780.

En général, la fonction $g_i(\alpha, \beta)$ est une fonction linéaire des variables $\beta_1, \ldots, \beta_i$ et un polynôme de degré i des variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$.

Remarquons, que la transformation identique $\xi_2 = \xi_1$ ne change pas la composante de l'objet. Il s'ensuit que l'on a:

$$f(x; 1, 0, \ldots, 0) \equiv x. \tag{15}$$

Nous supposons dans la suite que

$$n \geqslant 4. \tag{16}$$

§ 2. Pour ne pas interrompre le raisonnement nous le précéderons par quelques lemmes qui concernent la forme de la dérivée de l'ordre i d'une fonction composée sous les hypothèses particulières sur les dérivées composantes.

Lemme I. La fonction $g_n(\alpha, \beta)$ a la forme suivante:

$$g_n = \beta_n \alpha_1^n + \binom{n}{2} \beta_{n-1} \alpha_1^{n-2} \alpha_2 + n \beta_2 \alpha_{n-1} \alpha_1 + \beta_1 \alpha_n + \bar{\bar{g}}_n, \tag{17}$$

où le polynôme $\bar{\bar{g}}_n$ ne contient pas les termes $\beta_n, \beta_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n-1}$ et ne dépend ainsi que des variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$.

Démonstration. Pour $n=4$ le théorème est évident d'après une des formules (14) $(\bar{\bar{g}}_4 = 3\beta_2 \alpha_2^2)$.

Supposons que la formule (17) soit juste pour n. Nous la démontrerons pour $n+1$. Différentions dans ce but (17) en tenant compte des relations:

$$(\alpha_i)' = \alpha_{i+1}, \quad (\beta_i)' = \beta_{i+1} \cdot \alpha_1. \tag{18}$$

On a

$$\left\{\begin{aligned} g_{n+1} = (g_n)' = {} & \underline{\beta_{n+1} \cdot \alpha_1^{n+1}} + \underline{n \beta_n \alpha_1^{n-1} \alpha_2} + \underline{\binom{n}{2} \beta_n \alpha_1^{n-2} \cdot \alpha_2} + \\ & + \binom{n}{2} (n-2) \beta_{n-1} \alpha_1^{n-3} \alpha_2^2 + \binom{n}{2} \beta_{n-1} \alpha_1^{n-2} \alpha_3 + \\ & + n \beta_3 \alpha_{n-1} \alpha_1^2 + \underline{n \beta_2 \alpha_n \alpha_1} + n \beta_2 \alpha_{n-1} \alpha_2 + \underline{\beta_2 \alpha_n \alpha_1} + \\ & + \underline{\beta_1 \alpha_{n+1}} + (\bar{\bar{g}}_n)'. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Remarquons maintenant, que $n + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$. De plus, il résulte des

formules (18) que dans $(\bar{\bar{g}}_n)'$ ne figurent que les termes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_{n-2}, \beta_{n-1}$. En désignant les termes non soulignés dans le deuxième membre de (19) par $\bar{\bar{g}}_{n+1}$, nous verrons que (17) est satisfait quand n sera remplacé par $n+1$.

En posant

$$g_n = \binom{n}{2} \beta_{n-1} \alpha_1^{n-2} \alpha_2 + n \beta_2 \alpha_{n-1} \alpha_1 + \bar{\bar{g}}_n \tag{20}$$

la formule (17) peut être écrite sous une forme plus simple:

$$g_n = \beta_n \alpha_1^n + \beta_1 \alpha_n + \bar{g}_n, \tag{21}$$

où $\bar{g}_n$ ne renferme pas des termes α_n et β_n et ne dépend alors, que des variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.

Lemme II. Si les dérivées α_i de la composante intérieure satisfont aux équations:

$$\alpha_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 2, \ldots, n-1, \tag{22}$$

les dérivées g_i de la fonction composée s'expriment alors par les formules suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} & g_i = \beta_i \alpha_1^i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 && (23) \\ & g_n = \beta_n \alpha_1^n + \beta_1 \alpha_n. && (24) \end{aligned}\right.$$

Démonstration. Pour $n=4$ le lemme est evidemment juste en vertu des formules (14). Supposons que le formules (23) et (24) soient vérifiées pour la valeur n et considérons la dérivée g_{n+1} en supposant que $\alpha_i = 0$ pour $i = 2, \ldots, n$. On a

$$g_i = \beta_i \alpha_1^i \quad \text{pour} \quad i = 1; \ldots, n-1.$$

On a ensuite d'après (24)

$$g_n = \beta_n \alpha_1^n + \beta_1 \alpha_n = \beta_n \alpha_1^n.$$

Enfin

$$g_{n+1} = \beta_{n+1} \alpha_1^{n+1} + \beta_1 \alpha_{n+1} + \bar{g}_{n+1}.$$

Mais $\bar{g}_{n+1}$ est un polynôme homogène des variables $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, donc $g_{n+1} = 0$, d'où

$$g_{n+1} = \beta_{n+1} \alpha_1^{n+1} + \beta_1 \alpha_{n+1}.$$

La démonstration par induction est ainsi achevée.

Lemme III. Si les dérivées β_i de la composante extérieure satisfont aux équations

$$\beta_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 2, \ldots, n-1, \tag{25}$$

les dérivées g_i de la fonction composée sont alors données par les formules:

$$\begin{cases} g_i = \beta_1 \alpha_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n-1 & (26) \\ g_n = \beta_n \alpha_1{}^n + \beta_1 \alpha_n . & (27) \end{cases}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour $n \geqslant 2$ la dérivée $g_n(\alpha, \beta)$ ne contient pas de terme de la forme $C . \alpha_1{}^p . \beta_1{}^q$. Cela résulte de la formule $g_2(\alpha, \beta) = \beta_2 \alpha_1{}^2 + \beta_1 \alpha_2$ et des relations (18). En effet, chaque terme de la dérivée g_i, à l'exception des termes $\beta_i \alpha_1{}^i$ et $\beta_1 \alpha_i$, ou chaque terme du polynôme g_i contient un facteur α_j $(j \geqslant 2)$ et un facteur β_k $(k \geqslant 2)$. Cela résulte de la formule $g_3 = \beta_3 \alpha_1{}^3 + 3 \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_3$ et des équations (18). D'après la remarque précédente, (22) implique (23) et (25) implique (26). De là, ainsi que de la relation (21), résulte que (22) implique (24) et (25) implique (27).

Les lemmes II et III conduisent immédiatement au

Lemme IV. Si

$$\alpha_i = \beta_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 2, \ldots, n-1 \tag{28}$$

on aura

$$\begin{cases} g_i(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 2, \ldots, n-1 \\ g_n(\alpha, \beta) = \alpha_1{}^n \beta_n + \alpha_n \beta_1 . \end{cases} \tag{29}$$

Du lemme précédent nous tirons une conséquence importante à savoir:

L'ensemble des transformations

$$\bar{\xi} = \varphi(\xi)$$

ayant les propriétés

$$\begin{cases} \varphi'(\xi_0) \neq 0, \\ \varphi''(\xi_0) = \varphi'''(\xi_0) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(\xi_0) = 0 \end{cases} \tag{30}$$

forme un sous-groupe du groupe donné.

Remarquons que cette proposition ne peut pas être généralisée de manière que l'ensemble des transformations

$$\begin{cases} \varphi'(\xi_0) \neq 0, \\ \varphi^i(\xi_0) = 0 \qquad i = k, \ldots, n-1; \qquad k \geqslant 3 \end{cases} \tag{30'}$$

forme un groupe.

§ 3. Nous revenons au sujet propre de notre travail.

Nous affirmons que sous l'hypothèse (16) *il n'existe pas une fonction f remplissant les identités* (13) *et* (15) *et l'inégalité* (5).

Nous allons démontrer cette proposition par réduction à la contradiction et dans ce but nous supposons pour le moment qu'une telle fonction existe.

Nous introduisons deux fonctions auxiliaires:

$$\mu(x, y, z) = f(x; y, 0, \ldots, 0, z) \tag{31}$$

$$\nu(x, z) = \mu(x, 1, z). \tag{32}$$

En posant dans l'équation (13):

$$\alpha_1 = \beta_1 = 1, \quad \alpha_i = \beta_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 2, \ldots, n-1 \tag{33}$$

et en tenant compte du lemme IV du § 2, nous obtenons pour la fonction ν l'équation fonctionnelle suivante:

$$\nu\{\nu(x, \alpha_n), \beta_n\} \equiv \nu(x, \alpha_n + \beta_n). \tag{34}$$

D'après nos hypothèses sur la fonction f (l'existence des derivées continues du premier ordre ainsi que l'identité (15) qui conduit à l'identité $\nu(x, 0) \equiv x$) nous pouvons déduire en vertu d'un résultat obtenu dans mon travail antérieur [1]) qu'il existe un intervalle E (pour la variable x) tel que la fonction ν possède une des deux formes possibles:

(35) $\nu(x, z) \equiv x$

ou

(36) $\nu(x, z) \equiv \Omega\{z + \omega(x)\}$

pour $x \in E$, z quelconque

$\Omega(u)$ étant une fonction monotone an sens strict et définie pour tous les u, ω étant fonction inverse de la fonction Ω. Nous montrerons que la possibilité (35) est exclue dans ce cas. En effet, supposons pour un instant la validité de l'identité (35), posons dans l'équation (13):

[1]) Cf. les pages 14 et 15 de mon travail des Annales d. l. Soc. Pol. d. Math., cité plus haut.

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 2, \ldots, n-1$$

et appliquons le lemme II. Nous obtiendrons:

$$f(x; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n) \equiv f(x; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n + \beta_1 \alpha_n). \tag{37}$$

En différentiant l'identité précédente par rapport à α_n on obtient

$$0 \equiv f(x; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n + \beta_1 \alpha_n) \cdot \beta_1, \tag{38}$$

ce qui pour $\alpha_n = 0$ et après la division par $\beta_1 \neq 0$ donne

$$f_n(x; \beta_1 \ldots \beta_n) \equiv 0, \tag{39}$$

ce qui est impossible en vertu de (5). Il nous reste donc la possibilité (36).

Posons dans l'équation (13):

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 2, \ldots, n-1$$

et prenons en considération (36). Ceci fournit:

$$f\{\Omega(\alpha_n + \omega(x)); \beta_1, \ldots, \beta_n\} = f(x; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n + \beta_1 \alpha_n). \tag{40}$$

La différentiation de la relation précédente par rapport à α_n donne

$$f_0\{\Omega(\alpha_n + \omega(x)); \beta_1, \ldots, \beta_n\} = \beta_1 \cdot f_n(x; \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n + \beta_1 \alpha_n). \tag{41}$$

En y posant $\alpha_n = 0$ et en tenant compte des relations:

$$\Omega[\omega(x)] \equiv x, \quad \Omega'[\omega(x)] \equiv \frac{1}{\omega'(x)} \tag{42}$$

nous avons

$$\frac{f_0(x; \beta)}{\omega'(x)} = \beta_1 \cdot f_n(x; \beta). \tag{43}$$

L'équation (43) est une équation linéaire et homogène. Pour la résoudre nous construisons le système corréspondant des équations ordinaires:

$$\omega'(x)\, dx = \frac{d\beta_1}{0} = \cdots = \frac{d\beta_{n-1}}{0} = -\frac{d\beta_n}{\beta_1}. \tag{44}$$

Les termes extrêmes donnent:

$$\omega'(x)\, dx + \frac{d\beta_n}{\beta_1} = 0, \tag{45}$$

ce qui après l'intégration conduit à la relation:

$$\omega(x) + \frac{\beta_n}{\beta_1} = C \quad \text{(constante)}. \tag{46}$$

L'intégrale générale de l'équation (43) s'exprime alors par la formule

$$f(x; \beta_1 \ldots \beta_n) = F\left\{\omega(x) + \frac{\beta_n}{\beta_1}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\right\} \tag{47}$$

où la fonction

$$F(u, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \tag{48}$$

est une fonction arbitraire de n variables indépendantes.

En posant pour abréger

$$F(u, v) = F(u, v, 0, \ldots, 0) \tag{49}$$

nous aurons

$$\mu(x, y, z) = F\left\{\omega(x) + \frac{z}{y}, y\right\}. \tag{50}$$

Posons dans l'identité (13):

$$\alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = \beta_2 = \cdots = \beta_{n-1} = 0 \tag{51}$$

et tenons compte du lemme IV. Cela donne:

$$\mu\{\mu(x, \alpha_1, \alpha_n), \beta_1, \beta_n\} = \mu(x, \alpha_1 \beta_1, \alpha_n \beta_1 + \beta_n \alpha_1^n). \tag{52}$$

En remplaçant μ par F en vertu de la relation (50) nous obtenons

$$F\left\{\omega\left[F\left(\omega(x) + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}, \alpha_1\right)\right] + \frac{\beta_n}{\beta_1}, \beta_1\right\} = F\left\{\omega(x) + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} + \frac{\beta_n \alpha_1^{n-1}}{\beta_1}, \alpha_1 \beta_1\right\}. \tag{53}$$

Nous allons résoudre l'équation (53) en nous rappelant les relations

$$\mu(x, 1, z) = \nu(x, z) = F[\omega(x) + z, 1] = \Omega[\omega(x) + z] \tag{54}$$

donc

$$F(u, 1) = \Omega(u). \tag{55}$$

Posons $\beta_1 = 1$ dans la formule (53). Nous obtenons

$$\Omega\left\{\beta_n + F\left(\omega + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}, \alpha_1\right)\right\} = F\left(\omega + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} + \beta_n \alpha_1^{n-1}, \alpha_1\right). \tag{56}$$

En y appliquant l'opérateur ω et en introduisant la notation

$$H(u, v) = \omega\,[F(u, v)] \tag{57}$$

nous obtenons

$$\beta_n + H\left[\omega + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}, \alpha_1\right] = H\left[\omega + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} + \beta_n\,\alpha_1^{n-1}, \alpha_1\right]. \tag{58}$$

La différentiation de cette équation par rapport à β_n fournit

$$1 = \alpha_1^{n-1}\, H_1\left[\omega + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} + \beta_n\,\alpha_1^{n-1}, \alpha_1\right], \tag{59}$$

où nous avons posé

$$H_1 = \frac{\partial H}{\partial u}.$$

L'équation (59) conduit (en tenant compte du caractère arbitraire des valeurs α_n, β_n) à la relation

$$H_1(u, v) = \frac{1}{v^{n-1}}. \tag{60}$$

En intégrant cette équation nous aurons:

$$H(u, v) = \frac{u}{v^{n-1}} + h(v). \tag{61}$$

Pour déterminer la fonction $h(v)$ appliquons l'opérateur ω à l'équation (53):

$$H\left\{\frac{\beta_n}{\beta_1} + H\left[\omega + \frac{\alpha_n}{\alpha_1}, \alpha_1\right], \beta_1\right\} = H\left\{\omega + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} + \beta_n\,\frac{\alpha_1^{n-1}}{\beta_1}, \alpha_1\,\beta_1\right\}. \tag{62}$$

En tenant compte de (61) on obtient:

$$\frac{\beta_n}{\beta_1^{n}} + \frac{1}{\beta_1^{n-1}}\left(\frac{\omega}{\alpha_1^{n-1}} + \frac{\alpha_n}{\alpha_1^{n}} + h(\alpha_1)\right) + h(\beta_1) =$$

$$= \frac{\omega}{\alpha_1^{n-1}\,\beta_1^{n-1}} + \frac{\alpha_n}{\alpha_1^{n}\,\beta_1^{n-1}} + \frac{\beta_n}{\beta_1^{n}} + h(\alpha_1 \,.\, \beta_1)$$

ou

$$\frac{1}{\beta_1^{n-1}} \cdot h(\alpha_1) + h(\beta_1) = h(\alpha_1 \,.\, \beta_1). \tag{63}$$

En différentiant (63) par rapport à α_1 on en tire:

$$\frac{1}{\beta_1^{n-1}} \cdot h'(\alpha_1) = \beta_1\, h'(\alpha_1 \,.\, \beta_1),$$

ce qui pour $\alpha_1 = 1$ donne:

$$h'(\beta_1) = \frac{A}{\beta_1^{n}}, \tag{64}$$

où nous avons posé:

$$A = h'(1). \tag{65}$$

Il s'ensuit

$$h(\beta_1) = \frac{A}{1-n}\,\beta_1^{1-n} + B \tag{66}$$

où B est une constante. En posant (66) dans (63) on trouve:

$$\frac{A}{1-n}\,\alpha_1^{1-n} \,.\, \beta_1^{1-n} + B\,\beta_1^{1-n} + \frac{A}{1-n}\,\beta_1^{1-n} + B = \frac{A}{1-n}\,\alpha_1^{1-n}\,\beta_1^{1-n} + B,$$

et par conséquent:

$$B = \frac{A}{n-1}, \tag{67}$$

d'où résulte

$$h(v) = \frac{A}{n-1}\,(1 - v^{1-n}). \tag{68}$$

Nous avons donc

$$H(u, v) = \frac{u}{v^{n-1}} + \frac{A}{n-1}\left(1 - \frac{1}{v^{n-1}}\right) \tag{69}$$

ce qui avec (57) fournit la formule:

$$F(u, v) = \Omega\left\{\frac{u}{v^{n-1}} + \frac{A}{n-1}\left(1 - \frac{1}{v^{n-1}}\right)\right\}. \tag{70}$$

Si on pose

$$\Psi(u) = \Omega\left\{u + \frac{A}{n-1}\right\} \tag{71}$$

on voit sans peine que la fonction

$$\psi(x) = \omega(x) - \frac{A}{n-1} \tag{72}$$

est la fonction inverse de la fonction Ψ et la formule (70) peut être écrite sous une forme plus simple:

$$F(u, v) = \Psi\left\{\frac{u}{v^{n-1}} - \frac{A}{(n-1)\,v^{n-1}}\right\}. \tag{73}$$

Les formules (73), (50) et (72) donnent finalement:

$$\mu(x,y,z) = \Psi\left\{\frac{\varphi(x)}{y^{n-1}} + \frac{z}{y^n}\right\}. \tag{74}$$

On constate par une substitution directe que la fonction μ définie par l'intermédiaire de la formule (74), où Ψ est une fonction arbitraire assujettie à la seule condition d'être monotone au sens strict, satisfait à l'équation (52).

Le résultat auquel nous sommes arrivés peut être formulé sous la forme du théorème suivant.

Théorème. *Le sous-groupe des transformations étant défini par les relations* (30), *il existe des objets spéciaux de la n-ième classe qui tous sont contenus dans la formule suivante:*

$$f(x;\alpha_1,0,\ldots,0,\alpha_n) = \Psi\left\{\frac{\varphi(x)}{\alpha_1^{n-1}} + \frac{\alpha_n}{\alpha_1^n}\right\}, \tag{75}$$

où Ψ est une fonction monotone au sens strict, d'ailleurs quelconque, définie partout, et φ est la fonction inverse de Ψ.

§ 4. Nous allons maintenant continuer la démonstration de la non-existence des objets en question en admettant le groupe général des transformations.

Dans ce but nous allons profiter deux fois de la formule (75) en substituant d'abord dans l'identité (13):

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0 \tag{76}$$

et ensuite:

$$\beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_{n-1} = 0\,. \tag{77}$$

En tenant compte de (23) et (24), respectivement de (26) et (27), nous obtenons:

$$f\left\{\Psi\left[\frac{\varphi}{\alpha_1^{n-1}} + \frac{\alpha_n}{\alpha_1^n}\right];\beta_1,\ldots,\beta_n\right\} = f(x;\alpha_1\beta_1,\alpha_1^2\beta_2,\ldots,\alpha_1^{n-1}\beta_{n-1},\alpha_1^n\beta_n+\alpha_n\beta_1) \tag{78}$$

$$\Psi\left\{\frac{\beta_n}{\beta_1^n} + \frac{\varphi[f(x;\alpha_1,\ldots,\alpha_n)]}{\beta_1^{n-1}}\right\} = f(x;\alpha_1\beta_1,\alpha_2\beta_1,\ldots,\alpha_{n-1}\beta_1,\alpha_n\beta_1+\alpha_1^n\beta_n). \tag{79}$$

En appliquant à l'équation (79) l'opérateur φ on obtient

$$\frac{\beta_n}{\beta_1^n} + \frac{1}{\beta_1^{n-1}}\cdot\varphi[f(x;\alpha_1,\ldots,\alpha_n)] = \varphi[f(x;\alpha_1\beta_1,\ldots,\alpha_{n-1}\beta_1,\alpha_n\beta_1+\alpha_1^n\beta_n)]. \tag{80}$$

En tenant compte de la relation (47)

$$f(x;\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = F\left[\varphi(x) + \frac{\alpha_n}{\alpha_1},\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\right] \tag{81}$$

l'équation (80) se transcrira sous la forme:

$$\begin{aligned}\frac{\beta_n}{\beta_1^n} + \frac{1}{\beta_1^{n-1}}\cdot\varphi\left\{F\left[\varphi+\frac{\alpha_n}{\alpha_1},\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\right]\right\} &= \\ = \varphi\left\{F\left[\varphi+\frac{\alpha_n}{\alpha_1}+\beta_n\frac{\alpha_1^{n-1}}{\beta_1},\alpha,\beta_1,\ldots,\alpha_{n-1}\beta_1\right]\right\}&.\end{aligned} \tag{82}$$

Posons

$$\varphi[F] = G(u,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\,. \tag{83}$$

L'identité (82) donne alors

$$\frac{\beta_n}{\beta_1^n} + \frac{1}{\beta_1^{n-1}}G\left[\varphi+\frac{\alpha_n}{\alpha_1},\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\right] = G\left[\varphi+\frac{\alpha_n}{\alpha_1}+\beta_n\frac{\alpha_1^{n-1}}{\beta_1},\alpha_1\beta_1,\ldots,\alpha_{n-1}\beta_1\right]. \tag{84}$$

L'identité (78) donne en se servant de (81) et de (83):

$$\begin{aligned}G\left[\frac{\varphi}{\alpha_1^{n-1}}+\frac{\alpha_n}{\alpha_1^n}+\frac{\beta_n}{\beta_1},\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\right] &= \\ = G\left[\varphi+\frac{\alpha_n}{\alpha_1}+\beta_n\frac{\alpha_1^{n-1}}{\beta_1},\alpha_1\beta_1,\alpha_1^2\beta_1,\ldots,\alpha_1^{n-1}\beta_{n-1}\right]&.\end{aligned} \tag{85}$$

L'identité (85) montre que la fonction G jouit de la propriété suivante:

$$G(u,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}) = G(\lambda^{n-1}u,\lambda\alpha_1,\lambda^2\alpha_2,\ldots,\lambda^{n-1}\alpha_{n-1}) \tag{86}$$

pour chaque $\lambda \neq 0$.

En introduisant la fonction M:

$$M(u,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}) = G(u,1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}) \tag{87}$$

on obtiendra:

$$G(u,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}) = M\left(\frac{u}{\alpha_1^{n-1}},\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2},\ldots,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1^{n-1}}\right) \tag{88}$$

ce qui permet de transcrire l'équation (84) sous la forme:

$$\begin{aligned}\frac{\beta_n}{\beta_1^n} + \frac{1}{\beta_1^{n-1}}M\left[\frac{\varphi}{\alpha_1^{n-1}}+\frac{\alpha_n}{\alpha_1^n},\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2},\ldots,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1^{n-1}}\right] &= \\ = M\left[\frac{\varphi}{\alpha_1^{n-1}\beta_1^{n-1}}+\frac{\beta_n}{\beta_1^n}+\frac{\alpha_n}{\alpha_1^n\beta_1^{n-1}},\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2\beta_1},\ldots,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1^{n-1}\beta_1^{n-2}}\right]&.\end{aligned} \tag{89}$$

En différentiant (89) par rapport à β_n nous obtenons

$$(90)\qquad \frac{1}{\beta_1^{\,n}}=\frac{1}{\beta_1^{\,n}}M_0\left[\frac{\psi}{\alpha_1^{\,n-1}\beta_1^{\,n-1}}+\frac{\beta_n}{\beta_1^{\,n}}+\frac{\alpha_n}{\alpha_1^{\,n}\beta_1^{\,n-1}},\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\,2}\beta_1},\ \dots,\ \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1^{\,n-1}\beta_1^{\,n-2}}\right].$$

En y posant $\beta_n=0$, $\alpha_1=\beta_1=1$, nous trouvons:

$$(91)\qquad M_0[\psi+\alpha_n,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1}]\equiv 1.$$

On a donc

$$(92)\qquad M(u,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1})=u+P(\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1}),$$

ce qui confronté avec (90), donne

$$(93)\qquad \frac{1}{\beta_1^{\,n-1}}P\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\,2}},\dots,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1^{\,n-1}}\right)=P\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\,2}\beta_1},\dots,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1^{\,n-1}\beta_1^{\,n-2}}\right).$$

Les relations (88) et (92) donnent:

$$(94)\qquad G(u,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})=\frac{u}{\alpha_1^{\,n-1}}+P\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\,2}},\dots,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1^{\,n-1}}\right).$$

De là résulte:

$$(95)\qquad F(u,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})=\Psi\left\{\frac{u}{\alpha_1^{\,n-1}}+P\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\,2}},\dots,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1^{\,n-1}}\right)\right\}$$

et d'après (81) finalement

$$(96)\qquad f(x;\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\Psi\left\{\frac{\psi(x)}{\alpha_1^{\,n-1}}+\frac{\alpha_n}{\alpha_1^{\,n}}+P\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\,2}},\dots,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1^{\,n-1}}\right)\right\}.$$

En posant (96) dans (13) nous obtenons:

$$(97)\qquad \begin{aligned}&\Psi\left\{\frac{\beta_n}{\beta_1^{\,n}}+P\left(\frac{\beta_2}{\beta_1^{\,2}},\dots,\frac{\beta_{n-1}}{\beta_1^{\,n-1}}\right)+\frac{1}{\beta_1^{\,n-1}}\left[\frac{\psi}{\alpha_1^{\,n-1}}+\frac{\alpha_n}{\alpha_1^{\,n}}+P\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\,2}},\dots,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1^{\,n-1}}\right)\right]\right\}=\\ &=\Psi\left\{\frac{\psi}{\alpha_1^{\,n-1}\beta_1^{\,n-1}}+\frac{g_n}{\alpha_1^{\,n}\beta_1^{\,n}}+P\left(\frac{g_2}{\alpha_1^{\,2}\beta_1^{\,2}},\dots,\frac{g_{n-1}}{\alpha_1^{\,n-1}\beta_1^{\,n-1}}\right)\right\}\end{aligned}$$

ou, en y appliquant l'opérateur ψ et en effectuant la reduction

$$(98)\qquad \begin{aligned}&P\left(\frac{\beta_2}{\beta_1^{\,2}},\dots,\frac{\beta_{n-1}}{\beta_1^{\,n-1}}\right)+\frac{1}{\beta_1^{\,n-1}}P\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1^{\,2}},\dots,\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_1^{\,n-1}}\right)=\\ &=\bar{g}_n+P\left(\frac{g_2}{\alpha_1^{\,2}\beta_1^{\,2}},\dots,\frac{g_{n-1}}{\alpha_1^{\,n-1}\beta_1^{\,n-1}}\right).\end{aligned}$$

Désignons par γ_i les valeurs des fonctions $g_i(\alpha,\beta)$ si nous remplaçons les arguments α_1 et β_1 par 1. L'identité (98) implique alors l'identité:

$$(99)\qquad P(\beta_2,\dots,\beta_{n-1})+P(\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1})=\bar{\gamma}_n+P(\gamma_2,\dots,\gamma_{n-1}).$$

En tenant compte de (20) et (21) nous en déduisons:

$$(100)\qquad \begin{cases}\bar{\gamma}_n=\binom{n}{2}\beta_{n-1}\alpha_2+n\beta_2\alpha_{n-1}+\bar{\bar{\gamma}}_n\\[4pt] \gamma_{n-1}=\beta_{n-1}+\alpha_{n-1}+\bar{\gamma}_{n-1}\end{cases}$$

où les polynômes $\bar{\bar{\gamma}}_n$ et $\bar{\gamma}_{n-1}$ ne contiennent pas les termes α_{n-1}, β_{n-1}.

Si nous effectuons la différentiation de l'identité (99) une fois par rapport à β_{n-1} et la deuxième fois par rapport à α_{n-1}, nous obtenons en vertu de (100):

$$(101)\qquad \begin{aligned}P_{n-1}(\beta_2,\dots,\beta_{n-1})&=\binom{n}{2}\alpha_2+P_{n-1}(\gamma_2,\dots,\gamma_{n-1})\\ P_{n-1}(\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1})&=n\beta_2+P_{n-1}(\gamma_2,\dots,\gamma_{n-1})\end{aligned}$$

car α_{n-1} et β_{n-1} ne figurent pas dans les expressions $\gamma_2,\dots,\gamma_{n-2}$.

En posant dans (101):

$$(102)\qquad \beta_i=\alpha_i\quad\text{pour}\quad i=2,\dots,n-1$$

on obtient

$$(103)\qquad \binom{n}{2}\alpha_2=n\alpha_2.$$

Comme α_2 est tout à fait arbitraire on en conclut que

$$(104)\qquad \binom{n}{2}=n$$

ce qui donne $n=3$ contrairement à notre hypothèse (16).

Notre proposition est ainsi démontrée.