ANTIQUITATES MATHEMATICAE
Vol. 12(1) 2018, p. 31–80
doi: 10.14708/am.v12i0.6406

Lech Maligranda (Luleå)
Jan Strelcyn (Paryż)

Jan Ptaszycki (1854–1912)

Streszczenie. Jan Ptaszycki był polskim matematykiem pracującym w Petersburgu w latach 1876-1912. W Polsce jest zapomniany, a w Rosji uważany zazwyczaj za rosyjskiego matematyka, znanego tam jako Iwan Lwowicz Ptaszycki. W rosyjskiej literaturze historyczno-matematycznej, w zależności od autora, podaje się, że Ptaszycki był rosyjskim matematykiem lub, rzadziej, polskim matematykiem, na przykład u Łokoć (2015, 2018). Ważne informacje o Ptaszyckim pochodzą z nekrologów K. A. Posse (1912) i S. Dicksteina (1912) oraz ze wspomnień I. Ja. Depmana (1960), którzy znali go osobiście. Chcemy przybliżyć współczesnemu czytelnikowi tego zapomnianego polskiego matematyka pracującego w Petersburgu. Po omówieniu jego biografii krótko omawiamy jego prace matematyczne. Na zakończenie artykułu cytujemy artykuły i książki związane z dorobkiem naukowym Ptaszyckiego oraz podajemy pełną listę prac i książek, które opublikował a także listę prac, gdzie można znaleźć informacje o nim.

2010 Klasyfikacja tematyczna AMS (2010): 01A55, 01A60, 01A70, 01A73, 13N99.

Słowa kluczowe: Jan Ptaszycki, biografie, Uniwersytet Petersburski, historia matematyki w Rosji, całkowanie w postaci skończonej, algebra różniczkowa.

1. Wstęp. Jan Ptaszycki był polskim matematykiem pracującym w Petersburgu w okresie 1876–1912. W Polsce jest on wręcz zapomniany, a w Rosji uważany na ogół za matematyka rosyjskiego, znany tam jako Iwan Lwowicz Ptaszycki. Nie ma o nim żadnego artykułu w polskiej Wikipedii, natomiast w rosyjskiej są aż trzy. W historyczno-matematycznej literaturze rosyjskiej, zależnie od autora, podaje się, że Ptaszycki był matematykiem rosyjskim lub, co rzadsze, matematykiem polskim jak np. w [Lo15a] i [Lo15b]. Po polsku informacje o nim znajdujemy w opracowaniach słownikowych [DW63], [Do86], [Du12], [SW03] oraz nekrologu napisanym przez S. Dicksteina [Di12], natomiast w języku rosyjskim w pracach [Pt2], [Pt3], [Pt4], [Ju68], [Lo15a], [Lo15b], [Od14] i nekrologu napisanym przez K. A. Posse [Po12] (przedrukowanym w [Pt3], bez podania autora artykułu). Podkreślamy, że ważne informacje dotyczące Ptaszyckiego pochodzą z nekrologów K. A. Posse [Po12] i S. Dicksteina [Di12] oraz ze wspomnień I. Ja. Depmana [De60], to jest od osób, które go znały osobiście.

Ptaszycki w 1876 roku ukończył Uniwersytet w Petersburgu i pozostał pracownikiem tego uniwersytetu do końca życia, uzyskując magisterium (polski doktorat) w 1881 roku i rosyjski doktorat (polska habilitacja) w 1888 roku. Został mianowany profesorem nadzwyczajnym w 1897 roku i zwyczajnym w 1901 roku. Od 1880 roku uczył w gimnazjum męskim im. cara Aleksandra II w Peterhofie oraz od 1883 roku wykładał na uniwersytecie i od 1891 roku także w Michajłowskiej Akademii Artyleryjskiej.

Główne jego prace były poświęcone problemowi tzw. całkowania w postaci skończonej różniczek rozmaitych typów: algebraicznych, niewymiernych, eliptycznych i innych.

Chcieliśmy przybliżyć czytelnikowi tego zapomnianego, matematyka polskiego pracującego w Petersburgu. Staraliśmy się dotrzeć do jego prac i osiągnięć w matematyce jak również do informacji o jego działalności. Po opisie jego biografii, omawiamy skrótowo jego prace matematyczne. Na końcu prezentujemy pełny spis opublikowanych prac i książek Ptaszyckiego, listę prac gdzie można znaleźć informacje o nim oraz cytujemy artykuły i książki związane z jego dorobkiem naukowym.

2. Biografia Jana Ptaszyckiego. Jan Ptaszycki[1] urodził się 2 września 1854 roku (21 sierpnia 1854 roku według starego stylu), według źródeł archiwalnych, we wsi Nabiereżna, w powiecie Wereja, w guberni moskiewskiej[A.1] w polskiej ziemiańskiej rodzinie Leona, zarządcy majątków Wittgensteinów i Elżbiety z Roszczewskich (zob. [Lo15a, str. 3] i [Lo15b, str. 3]).

Miał brata Stanisława Ludwika Ptaszyckiego (12 IV (31 III) 1853 Nabiereżna–20 XII 1933 Warszawa, pochowany 3 dni później w Bielsku Podlaskim), który był filologiem, historykiem i archiwistą (zob. [Ko86]) oraz dwie siostry: Jadwigę (ur. 28 IX 1855–?) i Antoninę-Marię (ur.

[1]Nazwisko bywa pisane Ptaschitzki, Ptaschitzky, Ptaschytskij, Ptashishki, Ptashitski, Ptashitskii, Ptashitsky, Ptashytski, Ptaszickij, Ptaszitsky, Ptaszyckij, a imiona wraz z imieniem odojcowskim (otczestwom) jakie znaleźliśmy to Ivan Lvovich, Iwan Lwowicz i Jean Lvovich.

27 VIII 1862–?).

Wykształcenie podstawowe otrzymał w domu pod kierunkiem matki. W 1860 roku rodzina przeniosła się na Litwę, początkowo do Wilna by później zamieszkać w majątku Baranowice pod Bielskiem na ziemi grodzieńskiej. Tutaj Jan spędził dzieciństwo. Do gimnazjum klasycznego uczęszczał w Wilnie, które ukończył ze złotym medalem w 1872 roku. Po ukończeniu gimnazjum w Wilnie udał się do Petersburga, gdzie pozostał na stałe. Jego brat Stanisław po długim pobycie w Petersburgu w 1918 roku wrócił do Polski i zamieszkał w Lublinie.

1: Cztery zdjęcia Jana Ptaszyckiego

W latach 1872–1876 Jan studiował matematykę na Wydziale Fizyczno-Matematycznym Uniwersytetu Petersburskiego, gdzie wówczas wykładali P. L. Czebyszew, A. N. Korkin, O. I. Somow, E. I. Zołotariow i Polak Julian Sochocki[2]. Zwłaszcza prof. Sochocki okazał mu wielką

[2]Pafnutij Lwowicz Czebyszew (1821–1894), Aleksandr Nikołajewicz Korkin (1837–1908), Osip Iwanowicz Somow (1815–1876), Jegor Iwanowicz Zołotariow

życzliwość (zob. [Di12, str. 241–242]) i Ptaszycki został jego ulubionym uczniem (zob. [Di28, str. 106]). Sam Ptaszycki był wdzięczny Zołotariowowi za dużą pomoc w początkach swojej kariery naukowej (zob. [De60, str. 52]).

W 1876 roku, będąc studentem czwartego roku, za rozprawę *O całkowaniu różniczek algebraicznych w postaci skończonej* Ptaszycki otrzymał pierwszą nagrodę ustanowioną z okazji I Zjazdu Rosyjskich Lekarzy i Przyrodników w wysokości 110 rubli (zob. [47, str. 34]. Studia ukończył ze stopniem kandydata w 1876 roku i pozostał na uniwersytecie przez dwa lata, aby przygotować się do egzaminu na stopień magistra, otrzymując przy tym stypendium.

Jak podaje I. Ja. Depman[3] [De60] po dwóch latach stażu na Uniwersytecie Petersburskim, w latach 1878–1879 Ptaszycki przebywał w Paryżu. W 1880 roku został mianowany nauczycielem matematyki w Gimnazjum w Peterhofie koło Petersburga i pełnił te obowiązki do roku 1890.

W 1881 roku żoną Jana Ptaszyckiego została Felicja Zawadzka[4] (18 V 1849–20 IV 1922 Leszno).Była ona córką księgarza wileńskiego Adama Zawadzkiego (1814–1874) i Wincenty Agnieszki Zawadzkiej z domu Ziółkowskiej (1819–1894). Państwo młodzi mieszkali początkowo w Nowym Peterhofie i tam się urodził ich pierwszy syn.

2: Zdjęcia Felicji Ptaszyckiej – żony Jana Ptaszyckiego

Małżeństwo miało dwóch synow: Jana-Feliksa (30 V 1882–1954) i

(1847–1878), matematycy rosyjscy i Julian Karol Sochocki [Sokhotski] (1842–1927), polski matematyk, od 1882 roku profesor Uniwersytetu w Petersburgu.

[3]Iwan Jakowliewicz Depman (1885–1970), rosyjski matematyk i pedagog. W latach 1907–1912 student Uniwersytetu Petersburgskiego.

[4]Felicja Marja Alexandra Helena Ptaszycka z d. Zawadzka.

Adama (1885 Petersburg–1918 Petersburg)[5]. Pierwszy syn zajmował się historią i literaturą polską (w latach 1900–1904 studiował na Wydziale Historyczno-Filologicznym Uniwersytetu Petersburskiego), a drugi był inżynierem elektrotechnikiem i został rozstrzelany przez bolszewików w petersburskiej fabryce Siemensa (zob. [Ch16, str. 15 i 82]).

3: Zdjęcia synów Ptaszyckiego: Jana i Adama

Działalność Polonii petersburskiej od drugiej połowy XIX wieku do okresu rewolucji 1917 roku opisana została w książce [67], gdzie znajdujemy też artykuły Ptaszyckich – brata Stanisława i Jana-Feliksa, syna Jana.

W 1881 roku Ptaszycki uzyskał stopień magistra na podstawie pracy *O całkowaniu w postaci skończonej różniczek niewymiernych* [P3], a promotorem był Aleksandr Nikołajewicz Korkin. Przypomnijmy, że stopień magistera w tamtym czasie w Rosji znaczył trochę więcej niż doktorat w Polsce (por. [40, Dodatek A, str. 199–200]). W 1883 roku został docentem prywatnym[A.2]. Jednak sytuacja materialna docenta prywatnego nie była łatwa, gdyż nie otrzymywał on pensji. Mówiło się, że oficjalne stanowisko docenta prywatnego jest znacznie niższe niż nauczyciela w gimnazjum.

W roku 1885 rozpoczął wykłady na Uniwersytecie Petersburskim. Były to: geometria wykreślna (1885–1899), funkcje eliptyczne (1885–1912), geometria analityczna (1890–1912) i zastosowanie rachunku całkowego w geometrii (1905–1912). Od 1891 roku wykładał także w Michajłowskiej Akademii Artyleryjskiej (1891–1912) i w Szkole Michajłowskiej[A.3] (1891–1895), a były to teoria równań różniczkowych i wybrane

[5]Żoną Adama była Wanda Paulina Ptaszycka z d. Januszkiewicz, secundo voto Szaciłło (1888 Poniewież, Litwa–1984 Warszawa) i mieli oni córkę Halinę Marię Chojnacką z d. Ptaszycką (11 IV 1916 Petersburg–10 XI 2009 Warszawa).

działy z różnych dziedzin matematyki.

Uczniowie Ptaszyckiego oceniali jego wykłady jako „dzieło doskonałe”. Wiadomo, że wykłady były przemyślane do ostatniego szczegółu. Nie zawierały niczego zbędnego. Na pytanie dlaczego w miejsce jego krótkiego wykładu z teorii funkcji eliptycznych francuskie wykłady zajmują wiele tomów? Ptaszycki odpowiadał (zob. [De60, str. 53–54]):

> Wykłady powinny zawierać tylko to co potrzebne. Francuzi nie mogą się obejść bez elokwencji i literatury. Weźcie ich elegancką literaturę. Co autor to talent i geniusz. A co po nich zostanie za dwadzieścia lat? Chyba tylko kilkanaście stron Maupassanta.

Litograficzne wydania wykładów Ptaszyckiego w latach 1896–1909 dotyczyły geometrii analitycznej [P14], [P15], [P19], [P20], [P23], [P26], zastosowania rachunku całkowego w geometrii [P22], [P24] i funkcji eliptycznych [P25].

(a) Jan Ptaszycki w ogrodzie

(b) Jan, Adam i Felicja Ptaszyccy.

4: Jan Ptaszycki w ogrodzie oraz Jan, Adam i Felicja Ptaszyccy.

W 1888 roku Ptaszycki uzyskał rosyjski stopień doktora matematyki czystej na podstawie pracy *O całkowaniu w postaci skończonej różniczek eliptycznych* [P6], a promotorem był Julian Sochocki (zob. [60, str. 105]). W tym samym roku Ptaszycki został wybrany członkiem korespondentem Charkowskiego Towarzystwa Matematycznego i w tym też roku zostały wydrukowane w Komunikatach Towarzystwa (Soobszczenia Charkowskiego matematiczeskogo obszczestwa) jego dwie prace [P8] i [P9]. Odnotujmy, że współpraca Ptaszyckiego z Towarzystwem w Charkowie rozpoczęła się już w 1884 roku, kiedy to Komunikaty Towarzystwa opublikowały jego pracę [P4]. Dodajmy, że komunikaty były pismem o bardzo wysokim poziomie naukowym.

W 1890 roku Ptaszycki był wśród założycieli Petersburskiego Towarzystwa Matematycznego, a już w 1893 roku został członkiem zarządu Towarzystwa. Od 1901 roku pełnił funkcję sekretarza Wydziału Fizyczno-Matematycznego Uniwersytetu Petersburskiego.

Od 5 maja 1894 roku był członkiem korespondentem Akademii Umiejętności w Krakowie.

Prace Ptaszyckiego były znane we Włoszech, gdyż w 1908 roku – roku Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Rzymie – został on członkiem nr 767 prestiżowego włoskiego towarzystwa matematycznego *Circolo Matematico di Palermo*, razem z innymi pięcioma matematykami rosyjskimi: Kaganem, Kryłowem, Kojałowiczem, Soninem i Sincowem[6].

Jan Ptaszycki był ponadto (zob. [Pt5]): członkiem Towarzystwa Fizyczno-Matematycznego w Kazaniu, członkiem Niemieckiego Towarzystwa Matematycznego i członkiem Rosyjskiego Towarzystwa Astronomicznego.

W 1896 roku był, wspólnie z A. A. Markowem[7], recenzentem doktoratu Dmitra A. Grawe[8] (zob. [60, str. 197]).

W 1897 roku został mianowany profesorem nadzwyczajnym uniwersytetu w Petersburgu, w roku 1901 profesorem zwyczajnym, a w roku 1907 otrzymał godność profesora zasłużonego.

W sprawozdaniu uniwersyteckim za 1908 rok znajdujemy następujące dane o Ptaszyckim (zob. [Lo15a, str. 13]):

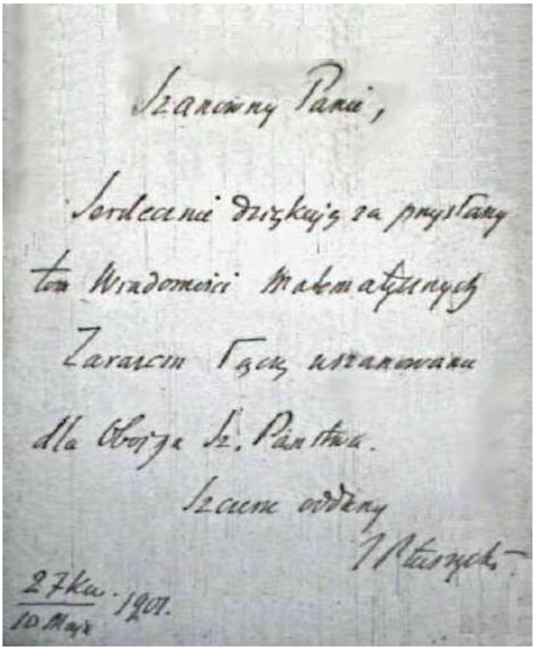
> nagrodzony Orderem świętej Anny 2 i 3 stopnia oraz Orderem świętego Stanisława 2 i 3 stopnia, emerytura 300 rubli wynagrodzenia [miesięcznie, płacone przez 10 miesięcy w roku (uwaga autorów)], za wykłady 1200 rubli i za bycie sekretarzem Wydziału 600 rubli rocznie, w sumie 4800 rubli. Wyznanie rzymsko-katolickie, doktor matematyki czystej, na Wydziale od 1 stycznia 1880 r., w obecnej randze od 1 stycznia 1892 roku; profesor nadzwyczajny od dnia 14 września 1901 r.; profesor zwyczajny od

---

[6] Wieniamin Fiedorowicz Kagan (1869–1953), Aleksiej Nikołajewicz Kryłow (1863–1945), Borys Michajłowicz Kojałowicz (1867–1941), Nikołaj Jakowlewicz Sonin (1849–1915), Dmitrij Matwiejewicz Sincow (1867–1946).

[7] Andriej Andriejewicz Markow [Markov, Markoff] (1856–1922), matematyk rosyjski.

[8] Dmitri Aleksandrowicz Grawe [Grave] (1863–1939), matematyk rosyjski, profesor uniwersytetu w Kijowie.


Szanowny Panie,

Serdecznie dziękuję za przysłany tom Wiadomości Matematycznych.

Zarazem łączę uszanowanie dla Obojga Sz. Państwa.

Szczerze oddany

J. Ptaszycki

27 kw. / 10 Maja 1907.

5: Kopia listu Ptaszyckiego do Samuela Dicksteina z 27 kwietnia 1907 roku.

16 grudnia 1902 r.; zasłużony profesor od dnia 25 października 1907 r. Od 1 grudnia 1907, pracownik kontraktowy.

Wykładów Ptaszyckiego, A. A. Markowa i J. Sochockiego słuchał Dmitrij Dmitriewicz Morduchaj-Bołtowski (1876–1952) i z wielką wdzięcznością je wspominał mówiąc, że *żyli w blasku Czebyszewa* i on sam uważał się za wnuka naukowego Czebyszewa ([44, str. 162]). Od 1902 roku, pod wpływem prac Ptaszyckiego, publikował on prace dotyczące całek abelowych ([42]) i recenzentami jego rozprawy magisterskiej, obronionej 10 grudnia 1906 roku na Uniwersytecie Petersburskim, byli J. L. Ptaszycki i D. F. Seliwanow (zob. [44, str. 163])[9].

Wyniki Ptaszyckiego opublikowane w zagranicznych czasopismach [P2] i [P10], [P11], [P12], dotyczące całek abelowych i uogólniające między innymi rezultaty Hermite'a[10] o całkach hipereliptycznych spowodowały, że jego nazwisko stało się znane w Europie. Prawdopodobnie dzięki temu Ptaszycki znalazł się w delegacji matematyków, wysłanej do Paryża na Drugi Międzynarodowy Kongres Matematyków (Paryż, 6–12 sierpień 1900), gdzie był on nawet jednym z sekretarzy kongresu.

[9] Dmitri Fiedorowicz Seliwanow [Selivanov] (1855–1932), matematyk rosyjski.
[10] Charles Hermite (1822–1901), matematyk francuski.

Może warto w tym miejscu wymienić całą delegację rosyjską obecną na Kongresie: M. A. Tichomandrycki (Charków) z zaproszonym odczytem, I. W. Mieszczerski (Petersburg), J. L. Ptaszycki (Petersburg), O. Sabinina (Moskwa), W. I. Schiff (Petersburg) z mężem Piotrem (matematykiem i pułkownikiem), D. F. Seliwanow (Petersburg), D. M. Sincow (Ekaterinosław), G. K. Susłow (Kijów), A. W. Wasiliew (Kazań) i N. A. Zabudski (Petersburg)[11].

I. Ja. Depman opisuje jeszcze jedno zdarzenie związane z Ptaszyckim [De60, str. 54–55]. W 1911 roku matematyk Jakow Wiktorowicz Uspienski (1883–1947) obronił pracę magisterską. Wydawało mu się jednak, że obrona nie była dostatecznie dobra i że mógłby wystąpić lepiej, dlatego też zwrócił się do sekretarza wydziału Ptaszyckiego z zapytaniem, czy nie można by uznać obronę za nieodbytą. Ptaszycki odpowiedział:

> Dlaczego się martwicie? Jakie rzeczywiste, pomimo formalnego, ma znaczenie obrona, w szczególności to, jak ona przeszła? Obecnie, wiele osób mówi, że formalnie są prawosławnymi. Wy też będziecie formalnie magistrem nauk matematycznych. Wszystko inne zależy nie od formalnych uprawnień, ale od waszych konkretnych prac.

Całe życie Ptaszyckiego było poświęcone pracy naukowej i nauczaniu na dwóch wyższych uczelniach. W życiu cechowały go prawość, prostota i łagodność w stosunkach z ludźmi. Jak pisze Dickstein ([Di12, str. 247]):

> Powodowany dobrocią serca i życzliwością dla ludzi wspierał radą i czynem każdego kto zwrócił się do niego o pomoc.

Ptaszycki zmarł 30 kwietnia (17 kwietnia według starego stylu) 1912 roku w Petersburgu. W nekrologu Konstantyna Aleksandrowicza Posse (1847–1928) czytamy (zob. [Po12, str. 252]):

> Śmierć przyszła niespodziewanie, zwłaszcza dla tych, którzy znali go blisko. W poniedziałek 26 marca, w drugi dzień Wielkanocny, jak zwykle przebywali u niego koledzy i znajomi. Nikomu nie przyszło do głowy, że na drugi dzień będzie już w łóżku i po

[11] Matwiej Aleksandrowicz Tichomandrycki (1844–1921), Iwan Wsiewołodowicz Mieszczerski (1859–1935), Olga Sabinina, prawdopodobnie córka Jegora Fiodorowicza Sabinina (1883–1909)?, Wiera Iosifowna Schiff (1860–1919), Piotr Aleksandrowicz Schiff (1848–1909), Gawrił Konstantinowicz Susłow (1857–1935), Alexander Wasiliewicz Wasiliew (1853–1929), Nikołaj Aleksandrowicz Zabudski (1853–1917).

> krótkiej chorobie, po trzech tygodniach, umrze w szpitalu gdzie został przewieziony za radą lekarzy na kilka godzin przed śmiercią. Rodzaj choroby nie został dokładnie określony, ale jak mówią, nastąpił zawał serca.

Na pogrzebie i na uroczystej mszy pogrzebowej w katolickiej katedrze św. Katarzyny uczestniczyli niemal wszyscy jego koledzy z Wydziału oraz z Akademii Artyleryjskiej. Obecnych też było wielu studentów Na grobie studenci złożyli wieniec z napisem *Drogiemu nauczycielowi i przyjacielowi.* Studenci Ptaszyckiego rzeczywiście stracili w nim nauczyciela i przyjaciela, zawsze ciepło i przyjaźne odnoszącego się do nich.

Szczątki Ptaszyckiego zostały złożone na cmentarzu Antokolskim w Wilnie przy kościele św. Piotra i Pawła, gdzie są też groby jego rodziny. Napis jaki się znajduje na nagrobku:

6: Nagrobek Jana Ptaszyckiego w Wilnie

> Ś†P. Jan Ptaszycki, Doktor matematyki, Zasłużony profesor Uniwersytetu Petersburskiego, Czł. Akademji Umiejętności w Krakowie, ur. 21/$_{\text{VIII}}$ 1854 † *zm.*17/$_{\text{IV}}$ 1912
>
> *Ani uczynił bliźniemu swemu złego i zelżywości nie przyjął przeciw bliźniemu swemu*, Ps. 14, 3.

Po jego śmierci pojawiły się dwa nekrologi. Pierwszy [Po12], napisany po rosyjsku, przez profesora matematyki uniwersytetu w Petersburgu i kolegę Ptaszyckiego, K. A. Posse (przedrukowany w [Pt3] bez podania autora), a drugi [Di12], po polsku, napisany przez Samuela Dicksteina (1851–1939), który otrzymał informacje od jego syna Jana-Feliksa i brata Stanisława oraz korzystał z tekstu Posse. Dickstein napisał (zob. [Di12, str. 241]):

7: Groby rodziny Jana Ptaszyckiego w Wilnie.

> Jan Ptaszycki żył i działał z dala od kraju ojczystego, ale żył myślą o nim: synów swoich, dziś już samoistnie pracujących, w miłości ku krajowi chował, a umierając, księgozbiór swój matematyczny przekazał Bibliotece Jagiellońskiej w Krakowie, polskich bibliotek macierzy.

Spora część jego biblioteki rzeczywiście się tam znajduje, ale z niewiadomych powodów część jego biblioteki znalazła się w kilku innych bibliotekach naukowych w Polsce. Pełnego katalogu ofiarowanego przez niego księgozbioru nie ma do dzisiaj.

Pomimo tego, że Ptaszycki jest w Polsce zapomniany, w literaturze naukowej (głównie rosyjskiej) jego nazwisko jest obecne i znajdujemy je na przykład w następujących książkach bądź pracach: [Ju68], [Lo15a], [Lo15b], [Lo16], [Od14], [Sh46] oraz [5], [6], [7], [9], [11], [14], [15], [16], [17], [26], [27], [31], [38], [39], [42], [43], [44], [47], [48], [49], [56], [57], [58], [60], [66] i [70].

W dokumencie z 17 marca 1914 roku (zob. [Pt1]) znajduje się informacja, że została ustanowiona nagroda imienia Iwana Lwowicza Ptaszyckiego, którego synowie Jan i Adam złożyli w banku 2500 rubli na 5% i ten procent ma stanowić coroczną sumę nagrody dla studenta za najlepszą pracę na Wydziale Fizyczno-Matematycznym Cesarskiego Uniwersytetu Petersburskiego. Nagroda ma być przyznana po raz pierwszy za 1915 rok. Jak czytamy w [30] pierwszym stypendystą imienia Jana Ptaszyckiego na Uniwersytecie Petersburskim został Jan Jankowski[A.4]. Niestety nie mamy dalszych informacji dotyczących tej nagrody. Prawdopodobnie ze względu na wybuch pierwszej wojny światowej nie była już ona więcej przyznawana, a po rewolucji przestała istnieć.

3. Dorobek naukowy Jana Ptaszyckiego. Pobieżnie, dorobek naukowy Jana Ptaszyckiego opisali w jego nekrologach znający go osobiście: A. K. Posse [Po12] (po rosyjsku), S. Dickstein [Di12] (po polsku) oraz na str. 55–58 [De60] I. Ja. Depman, który będąc studentem słuchał jego wykładów. Nieco bardziej szczegółowo dorobek naukowy Ptaszyckiego był omawiany w latach 2015, 2017 i 2018 przez drugiego autora [61], [62], [63] na konferencjach z historii matematyki. Dodajmy, że [Po12] i [Di12] są dobrym wstępem do wejścia w świat jego prac.

Ptaszycki opublikował niewielką ilość prac. Można je podzielić na trzy kategorie: dysertacje (dwie), pojedyncze artykuły (piętnaście) i teksty wykładów (osiem). Przy czym jeśli chodzi o artykuły, to często Ptaszycki publikował z drobnymi zmianami ten sam artykuł po rosyjsku, po francusku i po polsku. Prace [P7], [P8] i [P10] to w istocie ta sama praca. To samo odnosi się do prac [P12] i [P13] oraz do prac [P16] i [P18]. Praca [P5] to skrócona wersja pracy [P4]. Tak więc w istocie Ptaszycki opublikował tylko dziesięć artykułów. Za wyjątkiem pracy [P1] poświęconej mechanice i pracy [P21] dotyczącej teorii liczb (zob. [56]), wszystkie pozostałe prace Ptaszyckiego dotyczą analizy. W różnych swoich pracach, Ptaszycki w nowy, często prostszy sposób, opisał niektóre odkrycia swoich poprzedników i uzupełnił je własnymi wynikami.

Prace Ptaszyckiego były głównie poświęcone problemowi całkowania w postaci skończonej funkcji algebraicznych (w ówczesnej terminologii, różniczek) i pokrewnych, tzn. problemowi znajdowania postaci całek nieoznaczonych (funkcji pierwotnych) takich funkcji.

Współczesną epokę w tej dziedzinie zapoczątkował Niels Henrik Abel (1802–1829). Jego bardzo oryginalnym kontynuatorem był Pafnutij Lwowicz Czebyszew (1821–1894). W nieco innym kierunku poszły prace Joseph'a Liouville'a (1809–1882), który jest twórcą ogólnej teorii całkowania w postaci skończonej. W XIX wieku, tematem tym zajmowało się wielu znakomitych matematyków. W dzisiejszych czasach, ze względu na rozwój algebry komputerowej, temat ten stał się ponownie aktualny (zob. [22], [23] oraz [68]). Szczegółowo opisaną historię tej dziedziny do połowy XX wieku można znaleźć w [39].

Czebyszew miał wielu uczniów, wśród nich Ptaszyckiego. W pracy [6, str. 844] wymienionych jest ich jedenastu zaś w pracy [11, str. 113], czternastu i za każdym razem Ptaszycki jest wymieniony. Ptaszycki jest jednym z dwóch uczniów (a raczej naukowych wnuków) Czebyszewa, drugim był I. P. Dołbnia[12] którzy poświęcili się prawie wyłącznie pro-

[12]Iwan Pietrowicz Dołbnia (1853–1912), rosyjski matematyk, profesor Akademii

blemowi całkowania w postaci skończonej.

Temu zagadnieniu poświęcił Ptaszycki pracę magisterską [P3], pracę doktorską [P6] oraz większość pozostałych prac. Ptaszycki jest bezpośrednim kontynuatorem Czebyszewa, w zakresie problematyki całkowania w postaci skończonej i nie jest możliwe wyjaśnienie rezultatów Ptaszyckiego bez choćby pobieżnej znajomości wyników Czebyszewa w tej dziedzinie.

Jeżeli dana jest całka nieoznaczona, to funkcję podcałkową łatwo odtworzyć przez różniczkowanie. Udowodnienie, że całka nieoznaczona danej funkcji, np. funkcji e^{x^2}, nie może być wyrażona w terminach funkcji „elementarnych"jest zupełnie innym zadaniem, gdyż musi powiązać istnienie całki „elementarnej" ze specjalną formą funkcji podcałkowej.

Zacytujmy słynne stwierdzenie Laplace'a z 1814 roku [32, 2 wyd. (str. 7), 3 wyd. (str. 5)] (zob. też [10, str. 138]):

> . . . la différentiation laissant subsister les quantités exponentielles et radicales, et ne faisant disparaitre les quantités logarithmiques qu'autant qu'elles sont multipliées par des constantes, on doit en conclure que l'intégrale d'une fonction différentielle ne peut contenir d'autres quantités exponentielles et radicales que celles qui sont contenues dans cette fonction . . .

W przekładzie na polski:

> . . . zatem różniczkowanie nie unicestwiając wielkości wykładniczych i pierwiastkowych, zaś likwidując wielkości logarytmiczne tylko wtedy gdy są one pomnożone przez stałe, powoduje że całka funkcji różniczkowalnej nie może zawierać innych wielkości wykładniczych i pierwiastkowych niż te które są zawarte w tej funkcji . . .

Wypowiedź ta została, po raz pierwszy, udowodniona przez Liouville'a w [35], najpierw w przypadku algebraicznych funkcji podcałkowych [33], [34], a następnie dla bardziej ogólnych klas funkcji w [36].

Opis fascynującej historii twierdzeń Liouville'a znajdujemy w książce Lützena [37, Rozdział IX, str. 351-422], natomiast przystępne omówienie na przykład w pracach [12], [13] i [41]. Prace [46], [53], [54] i książka [22] otwierają współczesny etap w rozwoju teorii Liouville'a całkowania w postaci skończonej. Doskonałym wprowadzeniem w ten temat są książki [52] oraz [10], [29].

Górniczej w Petersburgu.

Chociaż dowody podane przez Liouville'a były w istocie poprawne, to niektóre z pojęć którymi się posługiwał nie były zdefiniowane w sposób dostatecznie precyzyjny. Chodzi tu przede wszystkim o klasyfikację funkcji przestępnych (zob. [65, str. 112–123], [45, str. 366–384]). Dopiero wprowadzenie do tej tematyki przez Ostrowskiego[13] w [46] ciał różniczkowych i ich rozszerzeń, pozwoliło podać definicje i dowody nie budzące żadnych zastrzeżeń oraz otworzyło współczesną epokę w tej dziedzinie.

Wróćmy teraz do lat 1820–1870, gdy Abel, Liouville i Czebyszew zajmowali się całkowaniem w postaci skończonej. Oprócz wyżej wymienionych źródeł, wymieńmy pracę Czebotariowa[14] [15], gdzie autor podaje dowody rezultatów Abela, Liouville'a i Czebyszewa, w duchu analizy klasycznej. Praca ta jest przedrukowana prawie bez zmian w §53 książki [16], która niestety do tej pory nie doczekała się przekładu na język obcy. Przeglądowy artykuł Gołubiewa[15] [25] też dotyczy tego tematu (zob. także [6] i [11, str. 120–121]).

Rezultaty Czebyszewa były poprzedzone twierdzeniami Abela i Liouville'a. Omówienie rezultatów Ptaszyckiego poprzedzimy więc omówieniem twierdzeń Abela, Liouville'a i Czebyszewa.

3.1. Twierdzenia Abela–Liouville'a. Wszystko rozpatrujemy w dziedzinie zespolonej. Zgodnie z duchem początku XIX wieku „wszystkie funkcje są algebraiczne", nawet jeśli wtedy to nie była prawda (funkcje trygonometryczne, wykładnicze). Używamy standartowych oznaczeń. Jeśli $\mathbb{K}$ jest ciałem, to $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ oznacza pierścień wielomianów zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_k$ o współczynnikach z $\mathbb{K}$, zaś $\mathbb{K}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ oznacza ciało funkcji wymiernych zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_k$ o współczynnikach z $\mathbb{K}$.

Definicja 1. *Niech $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{C}^k$. Funkcja $y = y(x)$ jest algebraiczna jeśli spełnia ona równanie wielomianowe*

$$W(x, y) = w_0(x)y^s + w_1(x)y^{s-1} + \ldots + w_s(x) = 0, \tag{1}$$

gdzie $w_i \in \mathbb{C}[x], 0 \leq i \leq s, w_0 \neq 0$. Bez ograniczenia ogólności możemy założyć, że wielomian W jest nierozkładalny.

Gdy $k = 1$, otrzymujemy standartową definicję funkcji algebraicznej jednej zmiennej. W dalszym ciągu, o ile nie będzie to jawnie powie-

[13] Aleksander Ostrowski (1893–1986), matematyk urodzony w Kijowie, profesor uniwersytetu w Bernie w Szwajcarii.

[14] Nikołaj Grigoriewicz Czebotariow (1894–1947), rosyjski i radziecki matematyk.

[15] Władimir Wasiliewicz Gołubiew (1884–1954), rosyjski i radziecki matematyk.

dziane, mówiąc o funkcjach algebraicznych mamy na uwadze wyłącznie funkcje algebraiczne jednej zmiennej.

Często funkcje algebraiczne wyrażają się za pomocą skończonej liczby algebraicznych operacji takich jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie wielomianów zmiennej x, przy czym wykładnik potęgi jest zawsze liczbą wymierną.

Na przykład, funkcja wymierna $y = \frac{p(x)}{q(x)}, p, q \in \mathbb{C}[x]$ jest algebraiczna, gdyż jest rozwiązaniem równania $q(x)y - p(x) = 0$, a także n-ty pierwiastek z wielomianu $y = \sqrt[n]{p(x)}$ jest funkcją algebraiczną ponieważ jest rozwiązaniem równania $y^n - p(x) = 0$. Funkcja która nie jest algebraiczna nazywa się *funkcją przestępną*; takimi są na przykład $\exp(x), \ln(x)$ i funkcje trygonometryczne $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$. Wszystkie funkcje rozpatrujemy w dziedzinie zespolonej, zatem w dalszym ciągu funkcje trygonometryczne nie będą brane pod uwagę, gdyż wyrażają się one przez funkcję wykładniczą $\exp(x)$.

Analogia pomiędzy liczbami algebraicznymi nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ i funkcjami algebraicznymi (nad ciałem funkcji wymiernych k-zmiennych $\mathbb{C}[x]$) jest oczywista. Podobnie jak liczby algebraiczne nad $\mathbb{Q}$ tworzą ciało algebraicznie domknięte, funkcje algebraiczne też tworzą ciało algebraicznie domknięte (zob. np. [64], §6.5; w przekładzie rosyjskim z 1976 roku jest to §41).

Co rozumiemy przez *całkowalność w postaci skończonej*? Pierwszy rozdział książki J. H. Davenporta [22] zaczyna się od sformułowania następującego problemu.

> **Problem.** *Kiedy dla danej funkcji algebraicznej możemy znaleźć (istnieje) wyrażenie złożone z funkcji algebraicznych, ich logarytmów i ich eksponent, którego pochodna równa się danej funkcji i jak znaleźć takie wyrażenie. O ile zaś takie wyrażenie nie istnieje, jak tego dowieść.*

Innymi słowy, mając daną funkcję algebraiczną jednej zmiennej $y = y(x)$, kiedy jej funkcja pierwotna $\int y(x)dx$ wyraża się za pomocą funkcji algebraicznych, ich logarytmów i exponent. Jak znaleźć takie wyrażenie. O ile zaś ono nie istnieje, jak tego dowieść.

Częściowe odpowiedzi na te pytania podali Abel i Liouville, zaś z teoretycznego punktu widzenia pełną algorytmiczną odpowiedź podali Risch [50] i [51] oraz Davenport [22].

Można też rozpatrywać bardziej ogólny problem, pochodzący od Liouville'a, w którym zamiast całkowania funkcji algebraicznych rozpatruje się całkowanie ogólniejszych klas funkcji.

Teoria *całkowania w postaci skończonej* jako osobna dziedzina matematyki, została stworzona przez Liouville'a, który w szeregu swoich prac z lat 1833–1841 wprowadził klasę *funkcji elementarnych*. Jest ona zdefiniowana poprzez skończoną liczbę operacji arytmetycznych (dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia) na funkcjach algebraicznych, wykładniczych, logarytmicznych, stałych oraz ich superpozycji.

Funkcje elementarne obejmują także funkcje trygonometryczne i hiperboliczne, ponieważ mogą być one wyrażone zespolonymi funkcjami wykładniczymi i logarytmicznymi. Bezpośrednio z definicji wynika, że zbiór funkcji elementarnych jest zamknięty ze względu na operacje arytmetyczne, superpozycje i różniczkowanie, ale nie jest zamknięty ze względu na branie granicy i sum nieskończonych. Jak dowiódł Liouville w [33], funkcje elementarne nie są zamknięte ze względu na całkowanie, tzn. całka nieoznaczona z funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną. Dowody, że całki z funkcji e^{x^2}, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$ nie mogą być funkcjami elementarnymi znajdujemy na przykład w [41, str. 153–155], [52, str. 48–49 dla pierwszych trzech funkcji] i [54, str. 971–972].

My, podobnie jak Abel, Czebyszew i Ptaszycki ograniczymy się wyłącznie do całkowania funkcji algebraicznych.

Z uprzednio sformułowanego stwierdzenia Laplace'a wynika, że funkcja pierwotna funkcji algebraicznej nie może zawierać członów wykładniczych.

Doświadczenie nabyte na początku studiów pokazuje, że funkcje pierwotne funkcji algebraicznych, o ile je można wyliczyć, są zawsze postaci

$$w_0(x) + \sum_{i=1}^{k} a_i \log w_i(x), \tag{2}$$

gdzie $\{w_i(x)\}_{0\le i\le k}$ są funkcjami algebraicznymi, zaś $\{a_i\}_{1\le i\le k} \in \mathbb{C}$. Wybór podstawy logarytmu nie odgrywa tutaj żadnej roli.

Przykład 1. Przykład całki z funkcji algebraicznej, której całka jest funkcją algebraiczną:

$$\int \frac{dx}{(\alpha x^2+\beta)^{3/2}} = \frac{1}{\beta}\frac{x}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} + C, \beta \neq 0 \quad \text{(zob. Fichtenholz [24, §283]).}$$

Przykład 2. Przykład całki z funkcji algebraicznej, która „całkuje się w logarytmach":

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx = \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

(z $t=\sqrt{x+1}$, zob. Fichtenholz [24, §278])

$$= \ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}\,i}\ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+(1+2t)\,i} - \frac{1}{\sqrt{3}\,i}\ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-(1+2t)\,i}.$$

Dlatego też w XIX wieku, zamiast mówić o *całkowaniu w postaci skończonej* funkcji algebraicznych mówiono także o ich *całkowaniu w logartymach*. My też będziemy używać tej terminologii, gdy całka funkcji algebraicznej jest postaci (2). Idąc za J.H. Davenportem ([22, str. 54]) będziemy nazywać całkę funkcji algebraicznej *czysto algebraiczna*, jesli w (2) nie ma członów logarytmicznych, zaś gdy w (2) $w_0 = 0$, będziemy nazywać taką całkę *czysto logarytmiczna*.

Często mówi się o całkowalności *całek abelowych*, tzn. całek postaci:

$$\int W(x, y(x))\,dx, \tag{3}$$

gdzie W jest dowolną funkcją wymierną dwóch zmiennych x i y związanych równaniem algebraicznym $F(x, y) = 0$, F jest wielomianem, $F \in K[x, y]$, a ciało $K = \mathbb{C}$, np. gdy $F(x, y)$ jest wielomianem nierozkładalnym zmiennej y

$$F(x, y) = w_0(x)y^s + w_1(x)y^{s-1} + \ldots + w_s(x)$$

którego współczynniki $w_i(x), i = 0, 1, \ldots, s$, są funkcjami wymiernymi zmiennej x. Całki abelowe są naturalnym uogólnieniem całek eliptycznych, które powstają, gdy $F(x, y) = y^2 - P(x)$, gdzie $P(x)$ jest wielomianem stopnia 3 lub 4. Jeśli wielomian P jest stopnia większego niż 4, to odpowiadające im całki nazywają się *całkami hipereliptycznymi.*

Przykładem takiej całki jest całka *pseudohipereliptyczna* badaną już przez Abela:

$$\int \frac{x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{\sqrt{x^{2m+2} + a_1x^{2m+1} + \ldots + \ldots a_{2m+1}x + a_{2m+2}}}\,dx.$$

Tutaj

$$\begin{cases} W(x, y) = \dfrac{x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{y}, \\ F(x, y) = y^2 - (x^{2m+2} + a_1x^{2m+1} + \ldots + \ldots a_{2m+1}x + a_{2m+2}). \end{cases}$$

Całki funkcji algebraicznych $\int v(x)\,dx$, gdzie $v = v(x)$ jest funkcją algebraiczną i całki abelowe (3) reprezentują tę samą klasę całek. Jednak stosowanie całek abelowych pozwala „parametryzować” całki, np. całki abelowe $\int \frac{b(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx$, gdzie R jest ustalonym wielomianem, zaś b jest wielomianem, który może się zmieniać.

Całkowalność w postaci skończonej jest nadzwyczaj czuła na zmianę parametrów od których zależy funkcja podcałkowa.

Przykład 3. Całka abelowa

$$I_0 = \int \frac{1}{\sqrt{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}}\,dx \tag{4}$$

całkuje się elementarnie (w postaci skończonej), gdyż $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = (x-1)^2(x-2)^2$. Natomiast jak wynika z twierdzenia 5 Czebyszewa, które przytoczymy później

$$I_{0,04} = \int \frac{1}{\sqrt{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 3,96}}\,dx \tag{5}$$

nie całkuje się w postaci skończonej (w logarytmach).

Podstawowe twierdzenie o całkowaniu w postaci skończonej funkcji algebraicznych zostało udowodnione w 1834 roku przez Liouville'a [35]. Ale przed Liouvillem twierdzenie to w szczególnych przypadkach sformułował i dowiódł Abel [1], [3].

Podajemy to twierdzenie w sformułowaniu Czebotariowa [15, str. 235–236] oraz [16, str. 355–356], które lekko precyzujemy. To twierdzenie uzasadnia wzor (2).

Twierdzenie 1 (Abel–Liouville)**.** *Niech $y = y(x)$ będzie funkcją algebraiczną. Jeżeli*

$$\int y(x)dx = \Phi(x, \log w_1(x), \log w_2(x), \ldots, \log w_k(x)), \tag{6}$$

gdzie $\{w_i\}_{1\le i\le k}$ są funkcjami algebraicznymi jednej zmiennej, Φ jest funkcją algebraiczną $(k+1)$-zmiennych oraz $k \ge 1$ jest najmniejszą liczbą całkowitą taką, że zachodzi (6).

(1.1) *Wtedy istnieje taka funkcja algebraiczna $w_0 = w_0(x)$ i takie stałe $\{a_i\}_{1\le i\le k} \in \mathbb{C}$, że*

$$\int y(x)dx = w_0(x) + \sum_{i=1}^{k} a_i \log w_i(x). \tag{7}$$

(1.2) *O ile zachodzi (7), to istnieją takie funkcje wymierne* $\{W_i\}_{0\le i\le k} \in \mathbb{C}(x,y)$ *i stałe* $\{c_i\}_{1\le i\le k} \in \mathbb{C}$, *że*

$$\int y(x)dx = W_0(x, y(x)) + \sum_{i=1}^{k} c_i \log W_i(x, y(x)). \tag{8}$$

Dowód w duchu analizy klasycznej można znaleźć w [15] oraz w §53 książki [16]. W podręczniku [45, str. 366–384], który bardzo polecamy, jest przytoczony nieco zmodyfikowany dowód Liouville'a. Sformułujemy teraz

Twierdzenie 2 (Abel 1826). *Niech* $b, R \in \mathbb{C}[x]$ *i* R *nie ma zer wielokrotnych. Jeśli całka* $\int \frac{b(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx$ *jest czysto logarytmiczna (tzn. jest postaci (7) z* $w_0(x) = 0$*), to wtedy*

$$\int \frac{b(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx = A \log \frac{p + q\sqrt{R(x)}}{p - q\sqrt{R(x)}}, \tag{9}$$

gdzie $A \in \mathbb{C}$, $p, q \in \mathbb{C}[x]$. *Ponadto,* $p^2 - q^2R = const$. *Bez ograniczeń można przyjąć, że* $p^2 - q^2R = 1$.

Twierdzenie to Abel sformułował na końcu [1], ale zapowiedzianego dowodu nigdy nie opublikował. Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 6 Czebyszewa, które sformułujemy w części 3.b i które jest dowiedzione w [18]. Szkic współczesnego dowodu twierdzenia 2 można znaleźć w [25, §4].

Nieco później Abel sformułował bardziej ogólne twierdzenie dotyczące przypadku wymiernych funkcji b.

Twierdzenie 3 (Abel 1828). *Niech* $P, Q, R \in \mathbb{C}[x]$ *i* R *nie ma zer wielokrotnych. Jeśli całka* $\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{R(x)}}\,dx$ *całkuje się w logarytmach, to wtedy*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{R(x)}}\,dx = \frac{p_0}{q_0}\sqrt{R} + \sum_{i=1}^{k} C_i \log \frac{p_i + q_i\sqrt{R}}{p_i - q_i\sqrt{R}}, \tag{10}$$

gdzie $p_i, q_i \in \mathbb{C}[x], 0 \le i \le k$, $C_i \in \mathbb{C}, 1 \le i \le k$.

Abel sformułował to twierdzenie w liście do A.-M. Legendre'a[16] z 25 listopada 1828 roku ([2]) i dowiódł to twierdzenie tylko dla wielomianow

[16] Adrien-Marie Legendre (1752–1833), matematyk francuski.

R stopnia 3 lub 4 ([3]). Pełny dowód wynika z rezultatów Abela i późniejszych rezultatów Liouville'a ([45, str. 369–376]).

W [1], pod koniec §1, Abel formułuje następujący problem.

Problem Abela. Znaleźć wszystkie całki postaci $I = \int \frac{b(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx$, gdzie b, R są wielomianami zmiennej x i R nie ma pierwiastków wielokrotnych, takie że

$$\int \frac{b(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx = A \log \frac{p + q\sqrt{R(x)}}{p - q\sqrt{R(x)}}, \tag{11}$$

gdzie $A \in \mathbb{C}, p, q \in \mathbb{C}[x]$.

W związku z powyższym problemem, Abel sformułował dwa twierdzenia w pewnym sensie odwrotne do twierdzenia 2. Twierdzenia te w sposób nie całkiem jawny pojawiają się w [1].

Twierdzenie 4. *Jeżeli $p, q, R \in \mathbb{C}[x]$ i R nie ma zer wielokrotnych oraz $p^2 - q^2R = 1$, to wtedy zawsze można znaleźć wielomian b taki, że zachodzi wzór (11).*

Rozwiązanie problemu Abela sprowadza się zatem do znalezienia wszystkich par wielomianów (p, q) takich, że $p^2 - q^2R = 1$. To równanie jest wielomianowym analogiem równania Pella–Fermata $x^2 - y^2D = 1$, $D \in \mathbb{N}$, $\sqrt{D} \notin \mathbb{Q}$, dobrze znanego w teorii liczb. Liczba $\sqrt{D}$ rozwija się w okresowy od pewnego miejsca ułamek łańcuchowy i dzięki temu rozwinięciu można znaleźć wszystkie rozwiązania równania Pella–Fermata w liczbach całkowitych.

Jak poinformował nas Christian Houzel, Abel podał procedurę, która o ile rozwinięcie w ułamek łańcuchowy $\sqrt{R}$ od pewnego miejsca jest okresowe i symetryczne (tzn. jeśli od pewnego miejsca $\{r_1, r_2, \ldots, r_p\}$ jest okresem to $r_i = r_{p+1-i}, 1 \leq i \leq p$), a tak na ogół nie jest, pozwala znaleźć wszystkie rozwiązania równania $p^2 - q^2R = 1$ ([1, §14]). Niestety, do dzisiaj nieznane jest kryterium na okresowość (od pewnego miejsca) rozwinięcia na ułamek łańcuchowy $\sqrt{R}$.

W przypadku, gdy $R \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg R = 4$, takie kryterium odkrył Czebyszew ([19], [25]).

Twierdzenie 5 (Abel 1826)**.** *Niech $R(x)$ będzie wielomianem bez zer wielokrotnych, $\deg R = 2\rho + 2$. Istnienie wielomianu $b(x)$, $\deg b = \rho$ takiego, że zachodzi wzór (11) jest równoważne temu że rozwinięcie $\sqrt{R(x)}$ na ułamek łańcuchowy jest od pewnego miejsca okresowe.*

Dowód można znaleźć w pracach Czebotariowa [15, §3], [16, §53] i w pracy Schinzla [55], z której dowiadujemy się, że warunek na stopnie wielomianów R i b pojawia się na str. 200, zaś warunek, że R nie ma pierwiastków wielokrotnych pojawia się na str. 187 niemieckiego wydania [1]. Warunki te jednak nie występują w sformułowaniu twierdzenia, które podaje Abel. Szczegółowe opracowanie prac Abela można znaleźć w pracy C. Houzela [28].

3.2. Twierdzenia Czebyszewa. Celem Czebyszewa było uzyskanie konstruktywnych procedur do zdecydowania czy całka abelowa może być wyrażona w postaci (7) i jeśli tak jest, to jak dokładnie wyliczyć funkcje $w_0, w_1, \ldots, w_k$. Czebyszew wprowadził kilka oryginalnych metod badania tego problemu, ale jego ostateczne rozwiązanie zostało podane dopiero w latach 1969–1970 przez R. H. Rischa przy użyciu algebry różniczkowej. Jego rozwiązanie jest podstawą programów algebry komputerowej całkowania wyrażeń pisanych w postaci skończonej, jak te w programach Maple lub Mathematica (zob. [50], [51] i [22], [23], [10]). Teoria ta została znacznie udoskonalona przez J. H. Davenporta ([22]).

W przeszłości ten problem nie był prosty do rozwiązania. Dla przykładu N. G. Czebotariow w swojej matematycznej autobiografii [17, str. 16] opowiada, że w młodości pracował nad tego rodzaju problemami pod wpływem D. A. Grawe. Znalazł rodzaj algorytmu do obliczania wyrażeń algebraicznych, który wymaga długich rachunków (zob. [17, str. 17–20]) i dla wyjaśnienia podał dwa przykłady (zob. [17, str. 20–22]):

1. $$\int \frac{\frac{5}{3}x^6 + \frac{11}{3}x^4 + x^2 - 1}{(x^2+1)^2(x^4-1)^{1/3}}\,dx = \frac{x(x^4-1)^{2/3}}{x^2+1} + \mathrm{C},$$

2. $$\int \frac{8x^4 + 5x^5 - 16x^4 - 20x^3 - 9x^2}{(x^2-1)^2(x^4+x^3)^{1/4}}\,dx = \frac{4x^2+4x+4}{x-1}(x^4+x^3)^{3/4} + \mathrm{C}.$$

Obecnie, używając Maple, z programem opartym na teorii Rischa rezultaty te uzyskuje się natychmiastowo.

Rezultaty Czebyszewa o całkowaniu funkcji algebraicznych zostały omówione w artykule Gołubiewa [25]. My wybierzemy pewne z nich. Odnotujmy, że wiele rezultatów Czebyszewa było uzyskanych równolegle do wyników Liouville'a ale były one uzyskane odmiennymi metodami. Dodajmy, że Czebyszew prawie nie czytał prac innych matematyków za wyjątkiem prac Abela.

Czebyszew badał w szczegółach problem Abela oraz pewne jego uogólnienia i w swojej podstawowej pracy o całkach abelowych [18] otrzymał następujące główne twierdzenia (zob. [25, Tw. 1, str. 110] i szkic dowodu na stronach 108–109 oraz [25, Tw. III, str. 110]. Zob. też [Pt3]).

Twierdzenie 6 (Czebyszew 1853)**.** *Niech $P(x), Q(x), R(x)$ będą wielomianami przy czym $R(x)$ jest wielomianem, którego krotności zer są mniejsze od m $(m \geq 2)$. Jeśli całka*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt[m]{R(x)}}\,dx$$

jest czysto logarytmiczna to całka ta jest sumą wyrażeń postaci

$$\begin{aligned} &A \log\{\varphi(x, \sqrt[m]{R(x)}) \cdot \varphi^{\alpha}(x, \alpha\sqrt[m]{R(x)}) \\ &\quad \cdot \varphi^{\alpha^2}(x, \alpha^2\sqrt[m]{R(x)}) \cdot \ldots \cdot \varphi^{\alpha^{m-1}}(x, \alpha^{m-1}\sqrt[m]{R(x)})\}, \end{aligned}$$

gdzie $\varphi(x,t)$ jest wielomianem dwóch zmiennych x i t, a α pierwiastkiem pierwotnym równania $x^m - 1 = 0$, $A \in \mathbb{C}$ oraz liczba s takich wyrażeń wystarczających do wypisania całki jest:

$$\begin{cases} s \leq \deg Q(x), & \textit{gdy} \quad \deg \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt[m]{R(x)}} < -1, \\ s = \deg Q(x) + 1, & \textit{gdy} \quad \deg \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt[m]{R(x)}} \geq -1. \end{cases}$$

W przypadku $Q(x) = 1$ i $m = 2$, twierdzenie 6 redukuje się do twierdzenia 2 Abela. Dla $m = 2, \alpha = -1$ jest pierwiastkiem pierwotnym oraz

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx &= A\left[\log\varphi(x, \sqrt{R}) - \log\varphi(x, -\sqrt{R})\right] \\ &= A \log\frac{\varphi(x, \sqrt{R})}{\varphi(x, -\sqrt{R})} = A \log\frac{p(x) + q(x)\sqrt{R(x)})}{p(x) - q(x)\sqrt{R(x)})}. \end{aligned}$$

Jako natychmiastową konsekwencję powyższego twierdzenia, otrzymujemy:

Twierdzenie 7 (Czebyszew 1853)**.** *Niech $P(x), R(x)$ będą wielomianami i niech wszystkie zera $R(x)$ są o krotności mniejszej od m oraz* $\deg P(x) < \deg\sqrt[m]{R(x)} - 1$*, to całka*

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt[m]{R(x)}}\,dx$$

nie może być wyrażona w logarytmach.

Z tego twierdzenia natychmiast wynika, że dla każdego $0 < \varepsilon < \frac{1}{16}$, całka abelowa

$$I_\varepsilon = \int \frac{1}{\sqrt{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + \varepsilon}}\, dx,$$

a więc w szczególności całka (5) $I_{0,04}$ nie całkuje się w logarytmach.

Gdy w twierdzeniu 7 weźmiemy $m = 2$ oraz $\deg R(x) = 4$, to otrzymujemy twierdzenie Liouville'a o tym, że całki postaci:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad \text{lub} \quad \int \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\, dz \ (k \neq 0)$$

nie mogą być wyrażona przez funkcje elementarne.

Druga część rozprawy Czebyszewa [18, §IX] zawiera zastosowanie ogólnych twierdzeń do całkowania różniczek dwumiennych. Dowód dostateczności poniższego twierdzenia znajduje się zwykle w podręcznikach oraz kursach analizy dla studentów.

Twierdzenie 8 (Czebyszew 1853)**.** *Całka dwumienna*

$$\int x^m (a + bx^n)^p\, dx,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, zaś wykładniki m, n, p są liczbami wymiernymi wyraża się w postaci skończonej wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z liczb $p, \frac{m+1}{n}$ i $p + \frac{m+1}{n}$ jest całkowita.

Dostateczność, czyli te trzy przypadki całkowalności znał właściwie już Newton ([24, str. 41]), a na pewno Euler, ale w 1853 roku Czebyszew udowodnił, o wiele trudniejszą część twierdzenia, czyli konieczność, wykazując, że nie ma innych przypadków oprócz powyższych trzech (zob. dowód w [15, §2] i w [45, str. 37–39]).

W tej dziedzinie możemy jeszcze wymienić dwie prace Czebyszewa z lat 1865 i 1867 (zob. [20], [21] i [25, str. 112–114, 120]) w których badał on problem kiedy całka $\int \frac{\rho(x)}{\sqrt[3]{R(x)}}\, dx$, gdzie $\rho(x), R(x)$ są wielmianami, całkuje się w logarytmach, a w szczególności kiedy całka $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + ax^2 + b}}$ całkuje się w logarytmach.

Przejdźmy teraz do rezultatów Ptaszyckiego.

3.3. Twierdzenia Ptaszyckiego. Większość prac Ptaszyckiego to bezpośrednia kontynuacja badań Czebyszewa. Ptaszycki upraszcza i podaje bardziej szczegółowy opis wielu jego rezultatów. Odnosi się to przede wszystkim do jego pracy doktorskiej [P3] i habilitacyjnej [P6].

Przynajmniej jeden z rezultatów Ptaszyckiego można uważać za klasyczny. Twierdzenie to znajdujemy wraz z dowodem w pracy [P11, str. 263] po francusku oraz po polsku w [P13, str. 73–74]. Praca [P13] jest istotnie rozszerzoną i ulepszoną wersją pracy [P11]. Rezultat ten pojawił się wcześniej w pracy doktorskiej [P3, Twierdzenie na str. 38].

Twierdzenie 9 (Ptaszycki 1888)**.** *Niech*

$$R(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{n_s},\ \textit{gdzie } a_i \neq a_j \textit{ dla } i \neq j,$$

$n_1, n_2, \ldots, n_s$ są liczbami naturalnymi lub zerem, ale nie wszystkie równe zeru, i niech $W = W(x,t)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych. Całka

$$I = \int W(x,\ \sqrt[m]{R(x)})\, dx,\ \textit{gdzie}\quad m \in \mathbb{N},\ \ m \geq 2$$

daje się zapisać w postaci skończonej dla każdej funkcji wymiernej W wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} &\textit{albo}\ \ R(x) = (x-a_i)^{n_i} \\ &\textit{lub}\ \ R(x) = (x-a_i)^{n_i}(x-a_j)^{m-n_j}\ \textit{dla pewnych } 1 \leq i \neq j \leq s. \end{aligned} \tag{12}$$

Dowód. (Ptaszycki [P11, str. 264–270], [P13, str. 73–74]). Bezpośrednie całkowanie w obu przypadkach (12) jest dość proste, co pokazuje dostateczność. Konieczność Ptaszycki dowodzi przez pokazanie, że następujące trzy całki nie mogą być zapisane w postaci skończonej:

$$\text{(A)}\ \int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{n_s}}},$$
$$\text{gdy } n_1+n_1+\ldots n_s > m,$$

$$\text{(B)}\ \int \frac{x^{s-2}\,dx}{\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{n_s}}},$$
$$\text{gdy}\ \ n_1+n_1+\ldots n_s = m \text{ i } s \geq 3,$$

$$\text{(C)}\ \int \frac{x^{s-2}\,dx}{\sqrt[m]{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{n_s}}},$$
$$\text{gdy}\ \ n_1+n_1+\ldots n_s < m \text{ i } s \geq 2.$$

Dowód teraz wynika z twierdzenia Abela i z podejścia Czebyszewa do twierdzeń typu Abela. ■

Twierdzenie Ptaszyckiego 9 jest cytowane w książce Hardy'ego [27, str. 34].

Drugie twierdzenie udowodnione przez Ptaszyckiego jakie chcemy zacytować pojawiło się z dowodami w trzech jego pracach w języku francuskim [P10, str. 396], polskim [P7, str. 82] i rosyjskim [P8, str. 60–61]. Praca [P10] jest skróconą wersją pracy [P7] i pokrywa się (poza drobnymi szczegółami) ze stronami 81–85, a dalsze strony 86–90 zawierają dodatkowe informacje. Z kolei praca [P8] jest rosyjską wersją pracy [P7], a w [P9] podany został prostszy dowód głównego twierdzenia z [P8, z części 3–5][A.5]. Zagadnieniem tu występującym zajmowali się wcześniej Abel, Liouville, Briot i Bouquet (1859, 1875), Zeuthen (1880), Raffy (1883, 1885) oraz Humbert (1887)[17].

Twierdzenie 10 (Ptaszycki 1888)**.** *Niech $z = z(x)$ będzie funkcją algebraiczną zdefiniowaną przez nierozkładalne równanie*

$$z^n + \varphi_1(x)z^{n-1} + \varphi_2(x)z^{n-2} + \ldots + \varphi_{n-1}(x)z + \varphi_n(x) = 0,$$

gdzie $\{\varphi_i(x)\}_{1\leq i\leq n}$ są funkcjami wymiernymi zmiennej x oraz niech $P = P(x)$ będzie wielomianem. Przypuśćmy, że całka

$$I = \int \frac{z(x)}{P(x)}\, dx \tag{13}$$

jest funkcją algebraiczną. Wtedy

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{z(x)}{P(x)}\, dx \\ &= \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1}z^{n-1}}{Y}, \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie $Y, X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ są wielomianami zmiennej x.

Jednak jawne wypisanie wielomianów $Y, X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ zmiennej x nie jest proste, zatem zamiast tego podamy trzy przykłady znajdujące się w [P7, str. 86-90] jak również w [P8, str. 68–73].

[17]Charles Auguste Briot (1817–1882), matematyk i fizyk francuski; Jean-Claude Bouquet (1819–1885), matematyk francuski; Hieronymus Georg Zeuthen (1839–1920), matematyk duński; Louis Raffy (1855–1910), matematyk francuski; George Humbert (1859–1921), matematyk francuski.

Przykład 4. Niech $z = z(x)$ będzie zdefiniowane przez nierozkładalne równanie $z^3 - 3z + 2x = 0$. Stosując twierdzenie 10 otrzymujemy

$$I_1 = \int z(x)\,dx = \frac{3}{4}xz(x) - \frac{3}{8}z^2(x).$$

Przykład 5. Niech $z = z(x)$ będzie zdefiniowane przez nierozkładalne równanie $z^3 - 3xz + x^3 = 0$. Stosując twierdzenie 10 otrzymujemy

$$I_2 = \int z(x)\,dx = \frac{\frac{1}{2}x^2z(x) - \frac{1}{2}z^2(x)}{x}.$$

Bezpośrednim różniczkowaniem sprawdzamy, że całki I_1 i I_2 są poprawnie policzone.

Przykład 6. Niech $z = z(x)$ będzie zdefiniowane przez nierozkładalne równanie $z^2 - 2x^3z + x^6 - x^4 - 1 = 0$. Załóżmy, że $\int z(x)dx$ jest funkcją algebraiczną. Stosując twierdzenie 10 otrzymujemy

$$I_3 = \int \frac{z(x)}{x}\,dx = -\frac{1}{6}x^3 - cx + c + \frac{1}{2}z(x),$$

jednak przez zróżniczkowanie tej równości widzimy, że równość ta nie może być spełniona. Dlatego też całka I_3 nie jest funkcją algebraiczną.

Omówiliśmy wcześniej prace Ptaszyckiego [P7], [P8], [P9], [P10], [P11] i [P13] więc teraz omówimy krótko zawartość pozostałych jego prac, odkładając omówienie jego pracy magisterskiej [P3] i doktorskiej [P6] na sam koniec.

Pierwszą jego opublikowaną pracą był artykuł [P1], gdzie wyliczył orbity układu złożonego z trzech punktów materialnych o tej samej masie, który poruszając się na płaszczyźnie spełnia pewne dodatkowe warunki.

W drugiej swojej pracy [P2] prostuje niedokładność Leo Königsbergera (1877)[18] tzn. pokazuje, że jego rezultat nie jest poprawny, przyta-

[18]Leo (Léon) Königsberger urodził się 15 X 1837 w Poznaniu (Posen), a zmarł 15 XII 1921 w Heidelbergu, gdzie w latach 1884–1914 był profesorem na tamtejszym uniwersytecie.

czając konkretny przykład, w którym – wbrew temu co twierdzi Königsberger – całka wyraża się przez logarytmy. Przytoczmy ten przykład:

$$\begin{aligned} &\int \left[\frac{1}{z\sqrt{z^3+\frac{9}{2}z^2+4z+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^3+\frac{9}{2}z^2+4z+1}} \right] dz \\ &= \frac{1}{4} \log \frac{\frac{1}{4}z^2+2z+1-\sqrt{z^3+\frac{9}{2}z^2+4z+1}}{\frac{1}{4}z^2+2z+1+\sqrt{z^3+\frac{9}{2}z^2+4z+1}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Königsberger twierdził, że powyższa całka nie wyraża się w logarytmach. Zauważmy, że z twierdzenia 7 Czebyszewa wynika iż całka $\int \frac{dz}{\sqrt{z^3+\frac{9}{2}z^2+4z+1}}$ nie całkuje się w logarytmach. Z wzoru (15) natychmiast wynika, że całka $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^3+\frac{9}{2}z^2+4z+1}}$ także nie całkuje się w logarytmach, a to nie wynika z twierdzenia Czebyszewa, gdyż w tym przypadku wielomian $R(x) = z^2(z^3+\frac{9}{2}z^2+4z+1)$ posiada pierwiastek podwójny $z = 0$. Dodajmy, że Maple 16 nie jest w stanie scałkować całki (15).

W pracy [P4] Ptaszycki podaje prostą metodę dowodzenia niektórych rozwinięć, podawanych przez Hermite'a w jego „Kursie Analizy" w l'École Polytechnique i praca [P5] to skrócona francuska wersja pracy [P4]. W [P13] zajmuje się sprowadzeniem do postaci normalnej całki

$$\int W(x, \sqrt[m]{R(x)})\, dx,$$

gdzie $W(x,t)$ jest funkcją wymierną x i t, tzn. do sumy całek postaci $\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt[m]{R(x)}}\, dx$, gdzie P, Q, R są wielomianami zmiennej x. Praca [P12] to skrócona wersja pracy [P13].

W pracach [P16] i [P18] Ptaszycki zajmował się problemami kiedy całki abelowe wyrażają się w postaci skończonej. Wykazuje, do jakich problemów natury algebraicznej to zadanie może być sprowadzone i identyfikuje te przypadki, w których może być ono całkowicie rozwiązane. Praca [P16] jest lekko przeredagowaną pracą [P18]. Praca [P17] jest poświęcona zagadnieniu, które dotyczy krzywych algebraicznych i które w 1894 roku postawił E. Goursat[19].

Ostatnia praca Ptaszyckiego [P21] to notatka z teorii liczb dotycząca dowodu twierdzenia wypowiedzianego bez dowodu przez Jacobiego. Niestety, jak zauważył Andrzej Schinzel [56, str. 93], twierdzenie sformułowane tak jak w [P21] jest trywialnie prawdziwe. Praca [P21]

[19]Édouard Jean-Baptiste Goursat (1858–1936), matematyk francuski.

jest cytowana na str. 130 i 174 w książce Franz Lemmermeyer, *Binary Quadratic Forms. An Elementary Approach to the Arithmetic of Elliptic and Hyperelliptic Curves*, 2010. Znaleźliśmy ją w internecie, ale brakuje w niej strony 130. Nie wiemy czy ta książka była opublikowana.

3.4. Praca doktorska i habilitacyjna Ptaszyckiego. Ze wszystkich prac Ptaszyckiego, bez żadnego wątpienia, najważniejszymi są jego praca doktorska [P3] i habilitacyjna [P6]. Praca [P6] jest szczytem jego dokonań matematycznych.

Praca [P3] jest poświęcona następującemu problemowi.

Kiedy $\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt[m]{R(x)}}\,dx$, gdzie $P, Q, R \in \mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$, $\deg R \geq 3$, R nie ma pierwiastków wielokrotnych, $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, całkuje się w logarytmach? Tzn. kiedy

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt[m]{R(x)}}\,dx = w_0(x) + \sum_{i=1}^{k} a_i \log w_i(x),$$

gdzie $\{w_i\}_{0\leq i\leq k}$ – funkcje algebraiczne, $w_i \in \mathbb{C}(x, y)$, $\{a_i\}_{1\leq i\leq k} \subset \mathbb{C}$.

Problemem tym zajmował się intensywnie Czebyszew, który rozpatrywał tylko przypadek $P, Q, R \in \mathbb{Q}[x]$. W 1874 roku Zołotariow ([69]) przeniósł, przynajmniej po części, rezultaty Czebyszewa z $\mathbb{Q}[x]$ na $\mathbb{C}[x]$.

Czebyszew jednak nie podał pełnych dowodów swoich rezultatów. Głównym celem [P3] jest ich podanie, czasami upraszczając podejście Czebyszewa. [P3] składa się z dwóch rozdziałów. Są one bardzo techniczne. Pewne pojęcie o rezultatach [P3] daje lektura wstępu (str. i–iv), szczegółowego spisu treści oraz stron 107–108.

Tematem [P6] są całki eliptyczne $\int \frac{P(x)}{Q(x)\sqrt{R(x)}}\,dx$, gdzie $P, Q, R \in \mathbb{C}[x]$, $\deg R = 4$, R nie ma pierwiastków wielokrotnych.

Z twierdzenia Abela wiemy, że jeżeli $\int \frac{P}{Q\sqrt{R}}$ całkuje się w logarytmach to wtedy zachodzi wzór (10). Powstaje zatem problem jawnego wypisania tej całki lub pokazania, że ta całka nie wyraża się w logarytmach. Ten problem był już rozpatrywany w [P3]. Jest on nadal szczegółowo badany w [P6]. Jednak głównym tematem [P6] jest (zob. [25]).

Problem Abela–Czebyszewa. Niech $a < b < c < d$ będą liczbami rzeczywistymi. Kiedy istnieje taka liczba rzeczywista A, że

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}\,dx \tag{16}$$

wyraża się w logarytmach. Problem ten był już badany przez Abela [4].

Zauważmy, że z twierdzenia 7 Czebyszewa wynika że o ile stała A istnieje to jest ona jedyna. Problem ten powstaje w sposób naturalny gdy próbujemy scharakteryzować całki *pseudo-eliptyczne*, tzn. takie całki eliptyczne które wyrażają się w logarytmach. Temat ten był bardzo popularny w XIX wieku (zob. [27, p. 65]).

Dwie trzecie pracy [P6] (str. 51–149) jest poświęcone problemowi Abela–Czebyszewa. Znajdują się tam dowody wielu rezultatów Czebyszewa i Zołotariowa [31], które dotyczą tego problemu. Dowody są częściowo uzupełnione i uproszczone. Pewne pojęcie o rezultatach [P6] daje lektura wstępu (str. iii–vi) oraz szczegółowego spisu treści. Osiągnięcia Zołotariowa związane z problemem Abela–Czebyszewa są opisane w [31].

Szczegółowe opisanie zawartości [P3] i [P6], niewątpliwie zasługuje na oddzielną pracę. Według opinii dwóch wyśmienitych rosyjskich matematyków i znawców analizy klasycznej praca [P6] jest dziełem bardzo udanym. Oto co piszą o [P6] N. G. Czebotariow (1932) i N. I. Achiezer (1946).

N. G. Czebotariow (zob. [70, str. 355]) w komentarzach do pracy Zołotariowa „Teoria liczb zespolonych całkowitych z zastosowaniami do rachunku całkowego"(1874), które znajdują się w drugim tomie dzieł Zołotariowa pisze:

> Z późniejszej literatury o całkach pseudoeliptycznych należy wyróżnić dysertację J. Ptaszyckiego *O całkowaniu w postaci skończonej różniczek eliptycznych* (Sankt-Petersburg, 1888), która zawiera znakomicie sporządzony wykład wszystkich rezultatów dotyczących tego tematu (Abel, Czebyszew, Zołotariow), korzystanie z której może znacznie ułatwić czytanie tego dzieła [tzn. dzieła Zołotariowa (uwaga autorów)].

N. I. Achiezer[20] ([5, str. 175]) pisze:

> Czytelnik znajdzie dobrą prezentację rezultatów Abela, Czebyszewa i Zołotariowa w rozprawie J. Ptaszyckiego *O całkowaniu w postaci skończonej różniczek eliptycznych* (Sankt-Petersburg, 1888).

Nie mniej znakomity W. I. Smirnow[21] ([59, str. 56] pisze:

> W naukowej spuściźnie wielkiego P. L. Czebyszewa (. . .) cykl prac o całkowaniu w postaci skończonej jest nieco wyizolowany. (. . .) Głębokie idee z tych jego prac były daleko rozwinięte przez (. . .) E. I. Zołotariowa, A. N. Korkina i I. L. Ptaszyckiego.

[20]Naum Ilicz Achiezer (1901–1980), matematyk radziecki.

[21]Władimir Iwanowicz Smirnow (1887–1974), matematyk rosyjski i radziecki.

Podziękowania

Dziękujemy Janowi Chojnackiemu[22] z Michałowa-Grabina k. Warszawy za udostępnienie zdjęć 5–6, 9–10 i 12–13 z prywatnego archiwum rodzinnego oraz za pozwolenie na ich opublikowanie, Andrejowi S. Osipowowi z Petersburga za skopiowanie i przesłanie dokumentów [Pt1] i nekrologów [Pt3], [Po12], Danucie Ciesielskiej z Warszawy za informacje o książce [P20] i o Janie Chojnackim, Walerianowi Piotrowskiemu z Warszawy za znalezienie i skopiowanie listu Ptaszyckiego do Dicksteina (skan 5) oraz Natalii Łokoć z Petersburga za list z 30 maja 2018 roku, w którym oprócz informacji o pracach [Lo15a], [Lo15b] i [Lo16], otrzymaliśmy z jej badań archiwalnych poprawne miejsce urodzenia Jana Ptaszyckiego. Dziękujemy także Siergejowi A. Dowbyszowi z Moskwy za dyskusje dotyczące dowodu twierdzenia Abela–Liouville'a. Christian Houzel z Paryża przekazał nam cenne informacje dotyczące prac Abela i Liouville'a, za co mu bardzo dziękujemy. Dziękujemy też Andrzejowi Schinzlowi z Warszawy za uważne przeczytanie naszej pracy. Zdjęcia 1–4, 6 i 8 pochodzą z domeny publicznej. Były one też umieszczone w następujących publikacjach: zdjęcie 1a – R. Bölling, *A Photo Album for Weierstrass*, Vieweg, Wiesbaden 1994, str. 5; zdjęcie 1b – Acta Math. [Pt5, str. 165]; zdjęcie 1c – Depman [De60, str. 53], Duda [Du12, str. 378], Juszkiewicz [Ju68, str. 385] oraz rosyjska Wikipedia i [Pt4]; zdjęcie 1d – Dickstein [Di12, str. 242], Dianni–Wachułka [DW63, str. 234] i Odyniec [Od14, str.14]; zdjęcie 2a – MyHeritage oraz książka [Ch16, str. 15]; zdjęcie 3b – MyHeritage. Zdjęcie 3a znaleźliśmy w książce [67, str. 252]; zdjęcia 6 i 7 są też w domenie publicznej.

4. Cytowane artykuły, odczyty i książki oraz informacje[23]

[1] N. H. Abel, *Über die Integration der Differential-Formel $\rho dx/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Funktionen sind*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik", 1 (1826), 185–221; Przedruk *Sur l'intégration de la formule différentielle $\rho dx/\sqrt{R}$, R et ρ étant des fonctions*

[22] Jan Chojnacki (ur. 24 sierpnia 1948), dziennikarz muzyczny, popularyzator i miłośnik bluesa, producent i wydawca. Jego pradziadkiem był Jan Ptaszycki. Prowadzi stronę w MyHeritage: od Zawadzkich do Chojnackich, gdzie znajdujemy wiele zdjęć Ptaszyckich.

[23] Nazwiska autorów prac napisanych po rosyjsku, są najpierw napisane w transkrypcji polskiej, następnie w nawiasie kwadratowym [·] w transkrypcji angielskiej (czasem francuskiej lub niemieckiej) o ile różni się ona od polskiej i w nawiasie zwykłym (·) w oryginalnej pisowni rosyjskiej. Transkrypcja podana w [·] jest taka, jaka jest używana w MatSciNet.

entières, [w:] „Oeuvres complètes de N. H. Abel", Tome 1, Christiania, 1839, Chapter VI, 33–65; „Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel", Tome 1, Christiania, 1881, 104–144. Cytowanie na str. 48, 49, 50, and 51.

[2] N. H. Abel, *Lettre à Legendre* (25 XI 1828) [w:] „Oeuvres complètes de N. H. Abel", Tome 2,Christiania, 1839, Chapter XXIV, 256–263; „Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel", Tome 2, Christiania, 1881, Chapter XXIII, 271–279. Cytowanie na str. 49.

[3] N. H. Abel, *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik", 4 (1829), 236–277; Przedruk [w:] „Oeuvres complètes de N. H. Abel", Tome 1, Christiania, 1839, Chapter XXI, 326–408; „Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel", Tome 1, Christiania, 1881, Chapter XXVIII, 104–144, 518–617. Cytowanie na str. 48 and 50.

[4] N. H. Abel, *Théorie des transcendentes elliptiques*, [w:] „Oeuvres complètes de N. H. Abel", Tome 2, Christiania, 1839, Chap. XIV, 93–184; „Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel", Tome 2, Christiania, 1881, Chapter XIII, 87–188. Cytowanie na str. 58.

[5] N. I. Achiezer [N. I. Akhiezer] (Н. И. Ахиезер), *Краткий обзор математических работ П. Л. Чебышева*, [в:] П. Л. Чебышев, ,,Избранные математические труды", Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва–Ленинград [*Krótki przegląd prac matematycznych P. L. Czebyszewa*, [w:] P. L. Chebyshev, „Wybrane prace matematyczne", Państwowe wydawnictwo literatury techniczno-teoretycznej, Moskwa–Leningrad] 1946, 171–188 [Ptaszycki, str. 175]. Cytowanie na str. 41 and 59.

[6] N. I. Achiezer [N. I. Akhiezer] (Н. И. Ахиезер), *П. Л. Чебышев и его научное наследие*, [в:] ,,П. Л. Чебышев, Избранные труды", Издательство Академии Наук СССР, Москва [*P. L. Czebyszew i jego spuścizna naukowa*, [w:] „P. L. Czebyszew, Prace wybrane", Wyd. Akademii Nauk ZSRR, Moskwa], 1955, 843–887 [Ptaszycki, str. 844, 885]. Cytowanie na str. 41, 42, and 44.

[7] A. Balk and E. Ferapontov, *Invariants of* 4*-wave interactions*, „Physica D", 65 (1993), 274–288 [Ptaszycki, str. 288]. MR 1222812 Cytowanie na str. 41.

[8] L. Birkenmajer, *O całkowaniu algebraicznem funkcyj algebraicznych* (fragment wyjęty z rozprawy „O ogólnych metodach całkowania" napisanej w celu uzyskania stopnia doktora filozofii), [w:] „Album uczącej się młodzieży polskiej poświęcone Józefowi Ignacemu Kraszewskienu z powodu jubileuszu jego pięćdziesięcioletniej działalności literackiej", Czytelna Akademicka Lwowska, Lwów, 1879, 129–181. Cytowanie na str. 71.

[9] C. Brezinski, *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1991, vi+551 str. [Ptaszycki, str. 269, 431]. MR 1083352 Cytowanie na str. 41 and 70.

[10] M. Bronstein, *Symbolic Integration I*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin-New York, 2005,xvi+325 str.; 1st Edition 1997, xiv+299 str. MR 1430096 Cytowanie na str. 43 and 51.

[11] P. Butzer and F. Jongmans, *P. L. Chebyshev (1821–1894). A guide to his life and work*, „Journal of Approximation Theory", 96 (1999), no. 1, 111–138 [Ptaszycki, str. 113]. MR 1659404 Cytowanie na str. 41, 42, and 44.

[12] R. C. Churchill, *Liouville's theorem on integration in terms of elementary functions*, Kolchin Seminar on Differential Algebra, Hunter College, New York, September 2006, 26 stron w: http://ksda.ccny.cuny.edu/PostedPapers/liouv06.pdf, data dostępu 08.09.2018. Cytowanie na str. 43.

[13] B. Conrad, *Impossibility theorems for elementary integration*, Clay Mathematics Institute: 2005 Academy Colloquium Series, 13 stron; dostępna na wielu stronach internetowych, np. w: http://www.claymath.org/library/academy/LectureNotes05/Conrad.pdf, data dostępu 08.09.2018 oraz http://www2.maths.ox.ac.uk/cmi/library/academy/LectureNotes05/Conrad.pdf, data dostępu 08.09.2018. Cytowanie na str. 43.

[14] A. L. Cykało [A. L. Tsykalo] (А. Л. Цыкало), *Александр Михайлович Ляпунов 1857–1918*, Издательство Наука, Москва [*Aleksandr Michajłowicz Liapunow 1857–1918*, Wydawnictwo Nauka, Moskwa], 1988, 248 str. [Ptaszycki, str. 39, 77]. Cytowanie na str. 41.

[15] N. G. Czebotariow [N. G. Tschebotarev] (Н. Г. Чеботарёв), *О выражении абелевых интегралов через элементарные функ-*

ции, ,,Успехи Математических Наук" [*O wyrażeniu całek abelowych przez funkcje elementarne*, „Uspechi Matematiczeskich Nauk", 2 (1947), no. 2 (18), 3–20 [Ptaszycki, str. 9, 20]; Przedruk [w:] Н. Г. Чеботарёв, Собрание сочинений, том 1, Издательство Академии Наук СССР, Москва–Ленинград [N. G. Czebotariow, Dzieła Zebrane, Tom 1, Wydawnictwo Akademii Nauk ZSRR, Moskwa–Leningrad], 1949 [Ptaszycki, str. 9, 20]. MR 0025520 Cytowanie na str. 41, 44, 48, 49, 51, and 53.

[16] N. G. Czebotariow [N. G. Tschebotarev] (Н. Г. Чеботарёв), *Теория алгебраических функций*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва–Ленинград [*Teoria funkcji algebraicznych*, Państwowe wydawnictwo literatury techniczno-teoretycznej, Moskwa–Leningrad], 1948, 396 str. [Ptaszycki, str. 361, 388; cytuje [P6]]. MR 0030003 Cytowanie na str. 41, 44, 48, 49, and 51.

[17] N. G. Czebotariow [N. G. Tschebotarev] (Н. Г. Чеботарёв), *Математическая автобиография*, ,,Успехи Математических Наук" [*Matematyczna autobiografia*, „Uspechi Matematiczeskich Nauk"] 3 (1948), no. 4 (26), 3–66 [Ptaszycki, str. 17]; Przedruk [w:] Н. Г. Чеботарёв, Собрание сочинений, том 3, Издательство Академии Наук СССР, Москва–Ленинград [N. G. Czebotariow, Dzieła Zebrane, Tom 3, Wydawnictwo Akademii Nauk ZSRR, Moskwa–Leningrad], 1950. MR 0026596 Cytowanie na str. 41 and 51.

[18] P. L. Czebyszew [Chebyshev, Tchebychef], *Sur l'intégration des différentielles irrationnelles*, „Journal de mathématiques pures et appliquées"(1), 18 (1853), 87–111; Przedruk [w:] *Oeuvres de P. L. Tchebychef, tome 1. Publiées par A. Markoff et N. Sonin*, Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences, St.-Petersbourg, 1899, 147–168. Wznowienie: Chelsea Publishing Company, New York, 1961. Cytowanie na str. 49, 51, and 53.

[19] P. L. Czebyszew [Chebyshev, Tchebychef], *Sur l'intégration de la différentielle* $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}dx$, Bull. Acad. Imp. Sci. St.-Pétersbourg 3 (1861), 1–12; „Journal de mathématiques pures et appliquées"(2), 9 (1864), 225–241; Przedruk [w:] *Oeuvres de P. L. Tchebychef, tome 1. Publiées par A. Markoff et N. Sonin*, Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences, St.-Petersbourg, 1899, 517–530. Wznowienie: Chelsea Publishing Company, New York, 1961. Cytowanie na str. 50.

[20] P. L. Czebyszew [Chebyshev, Tchebychef] (П. Л. Чебышёв), *Об интегрировании диффернциалов содержащих кубический корень*, Приложение к VII тому Записок Императорской академии наук [*O całkowaniu różniczek zawierających pierwiastek trzeciego stopnia*, Dodatek do VII tomu Komunikatów Cesarskiej Akademii Nauk], 7 (1865), no. 5; Przekład francuski[24] *Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine cubique* [w:] *Oeuvres de P. L. Tchebychef, tome 1. Publiées par A. Markoff et N. Sonin*, Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences, St.-Petersbourg, 1899, 563–608. Wznowienie: Chelsea Publishing Company, New York, 1961. Cytowanie na str. 53.

[21] P. L. Czebyszew [Chebyshev, Tchebychef] (П. Л. Чебышёв), *Об интегрировании простейших диффернциалов содержащих кубический корень*, ,,Математический Сборник" [*O całkowaniu najprostszych różniczek zawierających pierwiastek trzeciego stopnia*, Matematiczeskij Sbornik], 2 (1867), nr 2, 71–78; Przekład francuski *Sur l'intégration des différentielles les plus simples parmi celles qui contiennent une racine cubique* [w:] *Oeuvres de P. L. Tchebychef, tome 2. Publiées par A. Markoff et N. Sonin*, Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences, St.-Petersbourg, 1907, 43–47. Wznowienie: Chelsea Publishing Company, New York, 1961. Cytowanie na str. 53.

[22] J. H. Davenport, *On the Integration of Algebraic Functions*, Lecture Notes in Computer Science 102, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981, 197 str. MR 0617377 Cytowanie na str. 42, 43, 45, 47, and 51.

[23] J. H. Davenport, Y. Siret and E. Tournier, *Computer Algebra. Systems and Algorithms for Algebraic Computation*, Academic Press, London, 1988, xx+267 stron. MR 0975254 Cytowanie na str. 42 and 51.

[24] G. M. Fichtenholz, *Rachunek Różniczkowy i Całkowy*, Tom II, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1964, 696 str. Cytowanie na str. 46, 47, and 53.

[25] W. W. Gołubiew [V. V. Golubiev] (В. В. Голубев), *Работы П. Л. Чебышева по интегрированию алгебраических функций*, [в:] ,,Научное наследие П. Л. Чебышева", Издательство

[24] Tłumaczem był I. L. Ptaschitzky (Oeuvres de P. L. Tchebychef, tome 1, str. 561).

Академии Наук СССР, Москва–Ленинград [*Prace P. L. Czebyszewa o całkowaniu funkcji algebraicznych*, [w:] „Naukowa spuścizna P. L. Czebyszewa", Wydawnictwo Akademii Nauk ZSRR, Moskwa–Leningrad], 1945, 88–121. Cytowanie na str. 44, 49, 50, 51, 52, 53, and 58.

[26] S. Ja. Grodzieński [S. Ya. Grodzenskii] (С. Я. Гродзенский), *Андрей Андреевич Марков, 1856–1922*, Издательство Наука, Москва [*Andrej Andrejewicz Markov, 1856–1922*, Wydawnictwo Nauka, Moskwa], 1987, 257 str. [Ptaszycki, str. 46]. Cytowanie na str. 41.

[27] G. H. Hardy, *The Integration of Functions of a Single Variable*, Cambridge University Press, London, 1905, viii+53 str. [Ptaszycki, str. 29, 53]; 2nd Ed., Cambridge University Press, London, 1916, 1928, 1958, 1966 and Hafner Publishing Co., New York, 1971 [Ptaszycki, str. 34, 65]. MR 0349924 Cytowanie na str. 41, 55, and 59.

[28] C. Houzel, *The Work of Niels Henrik Abel*, [w:] "The Legacy of Niels Henrik Abel", O. A. Laudal and R. Piene (eds.) (The Abel Bicentennial Conference, Oslo 2002), Springer-Verlag, Berlin, 2004, 21–177. MR 2077572 Cytowanie na str. 51.

[29] A. Khovanskii, *Topological Galois Theory: Solvability and Unsolvability of Equations in Finite Terms*, Springer, Heidelberg, 2014, xviii+307 stron. MR 3289210; oryginał rosyjski: Moskwa, 2008 jest dostępny na stronie: https://www.mccme.ru/free-books/hov-galois/khovansky-galois.pdf, data dostępu 07.09.2018. Cytowanie na str. 43.

[30] Z. Kołoszewska, *Krwawa matura 1925*, „Tygodnik Wileńszczyzny", nr 21 z 21–27 maja 2015. http://www.tygodnik.lt/201521/bliska5.html, data dostępu 24.03.2018. Cytowanie na str. 41.

[31] R. O. Kuźmin [R. O. Kuz'min] (Р. О. Кузмин), *Жизнь и научная деятельность Егора Ивановича Золотарёва*, ,,Успехи Математических Наук" [*Życie i działalność naukowa Jegora Iwanowicza Zołotariowa*, „Uspechi Matematiczeskich Nauk"], 2 (1947), no. 6 (22), 21–51 [Ptaszycki, str. 48]. MR 0028249 Cytowanie na str. 41 and 59.

[32] P. S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Courcier, Paris 1812; 2 wyd. 1814, 3 wyd. 1820 oraz *Oeuvres*, Tom 7 (1886). Cytowanie na str. 43.

[33] J. Liouville, *Premier mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébraique*, „Journal de l'École polytechnique", 14 (22.cahier) (1833), 124–148. Cytowanie na str. 43 and 46.

[34] J. Liouville, *Second mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébraique*, „Journal de l'École polytechnique", 14 (22.cahier) (1833), 149–193. Cytowanie na str. 43.

[35] J. Liouville, *Sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur amplitude*, „Journal de l'École polytechnique", 14 (23.cahier) (1834), 37–83. Cytowanie na str. 43 and 48.

[36] J. Liouville, *Mèmoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes*, „Journal für die reine und angewandte Mathematik", 13 (1835), 93–118. Cytowanie na str. 43.

[37] J. Lützen, *Joseph Liouville 1809–1882: Master of Pure and Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1990, xx+884 str. MR 1066463 Cytowanie na str. 43.

[38] O. A. Ładyżeńska (red.) [O. A. Ladyzhenskaya (ed.)] (О. А. Ладыженская (ред.)), *Владимир Иванович Смирнов 1887–1974*, Издательство Наука, Санкт-Петербург [*Władimir Iwanowicz Smirnow 1887–1974*, Wydawnictwo Nauka, St. Petersburg] 1994, 288 str.; wyd. II, Moskwa 2016, 328 str. [Ptaszycki, str. 8, 11]. Cytowanie na str. 41.

[39] N. W. Łokoć [N. V. Lokot'] (Н. В. Локоть), *Развитие теории интегрируемости в конечном виде до середины XX века*, Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена) [*Rozwój teorii całkowania w postaci skończonej do połowy XX wieku*, Państwowy Leningradzki Instytut Pedagogiczny im. A. I. Hercena], 1989, 204 str., praca kandydacka (polska praca doktorska) [Ptaszycki, str. 94, 137, 143, 144, 190]. Cytowanie na str. 41 and 42.

[40] L. Maligranda, *Eustachy Żyliński (1889–1954)*, „Antiquitates Mathematicae", 3 (2009), 171–211. Cytowanie na str. 35.

[41] D. G. Mead, *Integration*, „American Mathematical Monthly”, 68 (1961), no. 2, 152–156. MR 1531103 Cytowanie na str. 43 and 46.

[42] D. D. Morduchaj-Bołtowski [D. D. Mordukhaj-Boltovskoj] (Д. Д. Мордухай-Болтовской), *Об определении в конечном виде абелевых интегралов*, ,,Математический Сборник” [*O wyznaczeniu całek abelowych w postaci skończonej*, Matematiczeskij Sbornik] 26 (1906), nr 1, 51–94 [Ptaszycki, str. 51, 52]. Cytowanie na str. 38 and 41.

[43] D. D. Morduchaj-Bołtowski [D. D. Mordukhaj-Boltovskoj] (Д. Д. Мордухай-Болтовской), *Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений*, Типография Варшавского Ученого Округа, Варшава [*O całkowaniu w postaci skończonej liniowych równań różniczkowych*, Drukarnia Warszawskiego Okręgu Akademickiego, Warszawa], 1910, xl+344 str. [Ptaszycki, str. xiv, 6 prac]. Cytowanie na str. 41.

[44] Yu. Nałbandjan [Yu. Nalbandyan], *O działalności profesora D. D. Morduchaja-Bołtowskiego w Warszawie w latach 1898–1916*, [w:] „XII Szkoła Historii Matematyki”(Krynica 19-25 maja 1998), Wydawnictwo Wydziału Matematyki Stosowanej Akademii Górniczo-Hutniczej, Kraków, 1999, 162–168 [Ptaszycki, str. 162, 163]. Cytowanie na str. 38 and 41.

[45] W. Niemycki, M. Słudska, A. Czerkasow [V. Niemyckii, M. Sludskaja, A. Cherkasov (В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов), *Курс математического анализа, Том 1*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва–Ленинград [*Kurs analizy matematycznej*, Tom I, Państwowe wydawnictwo literatury techniczno-teoretycznej, Moskwa–Leningrad], 1940. Cytowanie na str. 44, 49, 50, and 53.

[46] A. Ostrowski, *Sur l'integrabilité élémentaire de quelques classes d'expressions*, „Commentarii Mathematici Helvetici”, 18 (1946), 283–308. MR 0016763 Cytowanie na str. 43 and 44.

[47] E. P. Ożigowa [E. P. Ozhigova] (Е. П. Ожигова), *Егор Иванович Золотарёв 1847–1878*, Издательство Наука, Москва–Ленинград [*Jegor Iwanowicz Zołotariow 1847–1878*, Wydawnictwo Nauka, Moskwa–Leningrad], 1966, 143 str. [Ptaszycki, str. 34, 37, 108, 132, 133, 141]. Cytowanie na str. 34 and 41.

[48] E. P. Ożigowa [E. P. Ozhigova] (Е. П. Ожигова), *Александр Николаевич Коркин*, Издательство Наука, Ленинград [*Aleksandr Nikołajewicz Korkin*, Wydawnictwo Nauka, Leningrad], 1968, 140 str. [Ptaszycki, str. 41, 115, 118–119, 123, 142]. Cytowanie na str. 41.

[49] E. P. Ożigowa [E. P. Ozhigova] (Е. П. Ожигова), *Шарль Эрмит: 1822–1901*, Издательство Наука, Ленинград [*Charles Hermite: 1822–1901*, Wydawnictwo Nauka, Leningrad], 1982, 289 str. [Ptaszycki, str. 154]. Cytowanie na str. 41.

[50] R. H. Risch, *The problem of integration in finite terms*, „Transactions of the American Mathematical Society", 139 (1969), 167–189. MR 0237477 Cytowanie na str. 45 and 51.

[51] R. H. Risch, *The solution of the problem of integration in finite terms*, „Bulletin of the American Mathematical Society", 76 (1970), 605–608. MR 0269635 Cytowanie na str. 45 and 51.

[52] J. F. Ritt, *Integration in Finite Terms. Liouville's Theory of Elementary Methods*, Columbia University Press, New York, 1948, ix+100 stron. MR 0024949 Cytowanie na str. 43 and 46.

[53] M. Rosenlicht, *Liouville's theorem on functions with elementary integrals*, „Pacific Journal of Mathematics", 24 (1968), no. 1, 153–161. MR 0223346 Cytowanie na str. 43.

[54] M. Rosenlicht, *Integration in finite terms*, „American Mathematical Monthly", 79 (1972), 963–972. MR 0321914 Cytowanie na str. 43 and 46.

[55] A. Schinzel, *Całki pseudoeliptyczne i równanie Pella dla wielomianów*, [w:] „Matematyka Abelowa", XVII Ogólnopolska Szkoła z Historii Matematyki, Nowy Sącz, 9–13 VI 2003, pod redakcją W. Więsława, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa, Nowy Sącz, 2004, 45–48. Cytowanie na str. 51.

[56] A. Schinzel, *Teoria liczba w pracach matematyków polskich na obczyźnie*, „Antiquitates Mathematicae", 3 (2009), 89–97 [Ptaszycki, str. 89, 93, 95]. MR 2808796 Cytowanie na str. 41, 42, and 57.

[57] D. M. Sincow [D. M. Sintsov] (Д. М. Синцов), *К вопросу о рациональных интегралах линейных дифференциальных уравнений*, Казань Типо-литография Императорского Универ-

ситета [O problemie całek wymiernych liniowych równań różniczkowych, Kazań. Druk-litografia Cesarskiego Uniwersytetu]. 1897, 74 str. [Ptaszycki, str. 73]. Cytowanie na str. 41.

[58] D. M. Sincow [D. M. Sintsov] (Д. М. Синцов), *Рациональные интегралы линейных уравнений*, Казань. Типо-литография Императорского Университета [*Całki wymierne równań liniowych*, Kazań. Druk-litografia Cesarskiego Uniwersytetu], 1898, 187 str. [Ptaszycki, str. 171–172]. Cytowanie na str. 41.

[59] W. I. Smirnow (red.) [V. I. Smirnov (ed.)] (В. И. Смирнов (ред.)), *Математика в Петербургском – Ленинградском университете*, Издательство Ленинградского Университета, Ленинград [*Matematyka w Petersburskim – Leningradzkim Uniwersytecie*, Wydawnictwo Leningradzkiego Universyteta, Leningrad], 1970 [Ptaszycki, str. 56]. Cytowanie na str. 59.

[60] K.-G. Steffens, *The History of Approximation Theory. From Euler to Bernstein*, Birkhäuser, Boston, 2006, xx+219 stron [Ptashitski, str. 77, 105, 193–194, 197]. MR 2190312 Cytowanie na str. 36, 37, 41, and 70.

[61] J. Strelcyn, *O całkowaniu w postaci skończonej funkcji algebraicznych w pracach Jana Ptaszyckiego*, dwuczęściowy odczyt 28 maja 2015 na konferencji z historii matematyki, Będlewo 25–28 maja 2015, 22 strony. Cytowanie na str. 42.

[62] J. Strelcyn, *Całkowanie funkcji algebraicznych i przestępnych w doktoracie Ludwika Birkenmajera (1879) i w petersburskich pracach Jana Ptaszyckiego (1881, 1888)*, dwuczęściowy odczyt 26 maja 2017 na konferencji z historii matematyki, Będlewo 22–26 maja 2017, 23 strony. Cytowanie na str. 42.

[63] J. Strelcyn, *Jan Ptaszycki (1854–1912), Ludwik Birkenmajer (1855–1929) i całkowanie w postaci skończonej*, dwuczęściowy odczyt 26 kwietnia 2018 na konferencji z historii matematyki, Będlewo 23–26 kwietnia 2018, 23 strony. Cytowanie na str. 42.

[64] B. L. van der Waerden, *Algebra, Vol. 1*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1991, xiv+265 str. MR 1080172 Cytowanie na str. 45.

[65] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1922; 2 wyd. 1944 i 1995. MR 0010746 Cytowanie na str. 44.

[66] W. Wirtinger, *Algebraische Funktionen und ihre Integral*, [w:] „Encyklopaedie der Mathematischen Wissenschaften”, Zweiter Teil, Springer, 1901–1921 [$36. Die Integration durch algebraische Funktionen und Logarithmen, str. 152–153; cytuje prace Ptaszyckiego [P10] i [P2], str. 153]. Cytowanie na str. 41.

[67] *Z murów św. Katarzyny, Księga pamiątkowa b. wychowanek i wychowanków gimnazjów przy kościele św. Katarzyny w Petersburgu*, Tom I. „Kościół św. Katarzyny a życie polskie. Szkoły żeńskie. Szkoły męskie”, Warszawa 1933, 341 stron, w tym artykuły: S. Ptaszycki, *Z moich wspomnień z nad Newy*, 51–65, J. Ptaszycki, *Kościół św. Katarzyny jako twierdza polskiego życia kulturalno-oświatowego w Petersburgu w latach 1916-18*, 77–85, J. Ptaszycki, *Polonistyka w gimnazjum męskim*, str. 267–275 [Ptaszycki-matematyk, str. vi, 62, 332]. Cytowanie na str. 35 and 60.

[68] U. Zannier, *Elementary integration of differentials in families and conjectures of Pink*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Seoul 2014, Vol. II, 531–555. MR 3728626 Cytowanie na str. 42.

[69] J. I. Zołotariow [E. I. Zolotarev] (Е. И. Золотарёв), *Полное собрание сочинений Егора Ивановича Золотарёва*, Выпуск 1, Издательство Академии Наук СССР [*Dzieła zebrane Jegora Iwanowicza Zołotariowa*, Tom 1, Wydawnictwo Akademii Nauk ZSRR], 1931. Cytowanie na str. 58.

[70] J. I. Zołotariow [E. I. Zolotarev] (Е. И. Золотарёв), *Полное собрание сочинений Егора Ивановича Золотарёва*, Выпуск 2, Издательство Академии Наук СССР [*Dzieła zebrane Jegora Iwanowicza Zołotariowa*, Tom 2, Wydawnictwo Akademii Nauk ZSRR], 1932 [Ptaszycki, str. 355]. Cytowanie na str. 41 and 59.

A. Przypisy końcowe

A.1. Zwykle jako miejsce jego urodzenia podawane jest: Kuzowo, w powiecie medyńskim, w gubernii moskiewskiej [Di12, str. 241] lub Kuzowo w gubernii moskiewskiej [Do86, str. 292], [Ki00, str. 288]. Czasami jest tylko odnotowane, że urodził się w gubernii kałuskiej [Od14, str. 14] albo gubernii wileńskiej [Po12, str. 247], [Pt3, str. 10], [De60, str. 52] i podobnie w książce [60, str. 193], gdzie autor powołuje się na [Pt2] i [Po12]. Mamy również: w Kurowie, gub. kałuska w [Du12] i [SW03]. Ponadto w Acta Mathematica [Pt5, str. 102] i książce [9, str.

269] miejsce urodzenia to Wyszgorod. Jak pisze, na podstawie swoich badań archiwalnych, pani N. W. Łokoć w pracach [Lo15a], [Lo15b], [Lo16] i [Lo18], i co wyjaśniła szczegółowo w liście z 30 maja 2018 roku, obaj bracia Jan i Stanisław urodzili się we wsi Nabiereżna.

A.2. Docent prywatny (niem. Privatdozent) oznacza osobę, która otrzymała od wyższej uczelni prawo wykładania (*veniam legendi*) na niej pewnego określonego przedmiotu, nie jest jednak urzędnikiem państwowym czyli nie jest opłacany z jej funduszy, lecz z opłat studentów, którzy zapisywali się na jego wykłady i zajęcia. Docent prywatny mógł być wybrany i powołany na stanowisko profesora nadzwyczajnego lub zwyczajnego, bądź docenta etatowego. Ten system został przejęty, z niewielkimi zmianami, we wszystkich niemieckojęzycznych krajach, w Rosji, w krajach skandynawskich, częściowo we Włoszech i na Bałkanach oraz na polskich uniwersytetach.

A.3. Michajłowska Szkoła Artyleryjska: uczelnia wojskowa utworzona w 1820 roku, której jednym z celów, poczynając od 1855 roku, było przygotowanie elewów do studiowania w Michajłowskiej Akademii Artyleryjskiej, wyższej uczelni wojskowej utworzonej tego samego roku.

A.4. Jan Jankowski (1893–1925) zmarł 7 maja 1925 roku w Wilnie. Dzień wcześniej podczas egzaminu maturalnego z matematyki w gimnazjum imienia Joachima Lelewela była strzelanina oraz wybuchła bomba i Jan został ciężko ranny, a następnego dnia zmarł w szpitalu. Była to największa w polskiej historii strzelanina w szkole i jedna z pierwszych w Europie z tak dużą liczbą zabitych (pięciu zabitych i dziewięciu rannych).

A.5. Odnotujmy, że w 1879 roku Ludwik Antoni Birkenmajer (1855–1929) opublikował pracę [8] *O całkowaniu algebraicznem funkcji algebraicznych* i jej tytuł jest prawie taki sam jak tytuły prac Ptaszyckiego [P7], [P8]. W tym samym roku Birkenmajer obronił doktorat na Uniwersytecie Lwowskim na podstawie pracy *O ogólnych metodach całkowania funkcyj algebraicznych i przestępnych.* Pomimo zbieżności tytułów, prace te są całkowicie odmienne. Praca Birkenmajera jest napisana w duchu Liouville'a i nie porusza tematów szkoły Czebyszewa.

B. Spis artykułów i książek Ptaszyckiego[25]

[P1] *Sur un problème de mécanique* [*O pewnym zadaniu z mechaniki*], „Nouvelles Annales de Mathématiques”(2), 18 (1879), 279–281. JFM 11.0649.01 Cytowanie na str. 42, 56, and 78.

[P2] *Extrait d'une lettre à M. C. Neumann* [*Z listu do C. Neumanna*], „Mathematische Annalen”, 16 (1880), no. 2, 264–266 [St.-Petersburg, 22 listopada 1879]. JFM 12.0372.01 Cytowanie na str. 38 and 56.

[P3] *Об интегрировании в конечном виде иррациональных дифференциалов*, Типография Императорской Академии Наук, Санкт-Петербург [*O całkowaniu w postaci skończonej różniczek niewymiernych*, Drukarnia Cesarskiej Akademii Nauk, St.-Petersburg] 1881, vi+108 str., rosyjskie magisterium [polski doktorat]. Cytowanie na str. 35, 43, 54, 56, 58, and 59.

[P4] *О разложении в ряд Маклорена некоторых функций со многими переменными*, ,,Сообщения и протоколы заседаний Математического общества при Императорском харьковском университете” [*O rozwinięciu w szereg Maclaurina pewnych funkcji wielu zmiennych*, „Komunikaty i Protokóły z Posiedzenia Towarzystwa Matematycznego przy Cesarskim Charkowskim Uniwersytecie”] 1 (1884), 73–79. Cytowanie na str. 37, 42, and 57.

[P5] *Sur quelques formules données dans le “Course d'Analyse de l'Ecole polytéchnique de M. Hermite”* [*O niektórych wzorach zawartych w „Wykładach z Analizy Hermite'a w Szkole Politechnicznej”*], „Bulletin des Sciences Mathématiques”(2), 10 (1886), no. 2, 30–32. Cytowanie na str. 42 and 57.

[P6] *Об интегрировании в конечном виде эллиптических дифференциалов*, Типография Императорской Академии Наук, Санкт-Петербург [*O całkowaniu w postaci skończonej różniczek eliptycznych*, Drukarnia Cesarskiej Akademii Nauk, Petersburg] 1888, viii+152 str., rosyjski doktorat [polska habilitacja]. Cytowanie na str. 36, 43, 54, 56, 58, and 59.

[25]Prace bądź książki oznaczone gwiazdką $*$ są to pozycje, których autorzy nie widzieli osobiście, a o których wiedzą bądź z katalogu Rosyjskiej Państwowej Biblioteki w Moskwie bądź z innych źródeł. Wiele pozycji z poniższej cytowanych w bibliografii na str. 60–79 jest swobodnie dostępnych w Internecie. W szczególności dotyczy to prawie wszystkich prac matematycznych Ptaszyckiego.

[P7] *O całkowaniu algebraicznem różniczek algebraicznych*, „Prace Matematyczno-Fizyczne", 1 (1888), 81–90 [wysłana: Żegiestów, w lipcu 1888]. JFM 20.0296.03 Cytowanie na str. 42, 55, 56, 71, and 78.

[P8] *Об алгебраическом интегрировании алгебраических дифференциалов*, ,,Сообщения Харьковского математического общества" [*O całkowaniu algebraicznym różniczek algebraicznych*, „Komunikaty Charkowskiego Towarzystwa Matematycznego"] (2), 1 (1888), 61–73. JFM 20.0296.03 Cytowanie na str. 36, 42, 55, 56, and 71.

[P9] *Об одной теореме относительно алгебраических интегралов*, ,,Сообщения Харьковского математического общества" [*O pewnym twierdzeniu dotyczącym całek algebraicznych*, „Komunikaty Charkowskiego Towarzystwa Matematycznego"] (2), 1 (1888), 74–77. Cytowanie na str. 36, 55, and 56.

[P10] *Sur l'intégration algébrique des différentielles algébriques* [*O algebraicznym całkowaniu różniczek algebraicznych*], „Acta Mathematica", 11 (1888), 395–400. JFM 20.0296.02 Cytowanie na str. 38, 42, 55, and 56.

[P11] *Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite* [*Z listu do Hermite'a*], „Bulletin des Sciences Mathématiques"(2), 12 (1888), 262–270. JFM 20.0295.02 Cytowanie na str. 38, 54, and 56.

[P12] *Sur la réduction de certaines intégrales abéliennes à la forme normale* [*O redukcji pewnych całek abelowych do postaci normalnej*], „Mathematische Annalen", 33 (1889), 600–604 [wysłana: Peterhof 10 lutego 1889]. Cytowanie na str. 38, 42, and 57.

[P13] *O sprowadzaniu pewnych całek abelowych do postaci normalnej*, „Prace Matematyczno-Fizyczne", 2 (1890), 57–74 [wysłana: Peterhof w marcu 1889]. JFM 22.0484.02 Cytowanie na str. 42, 54, 56, 57, and 78.

[P14]* *Курс аналитической геометрии. Лекции прив.-доц. И. Л. Пташицкого*, изд. студ. А. Р. Грассе, написано от руки. Литография, Санкт-Петербургский Государственный Университет [*Kurs geometrii analitycznej. Wykłady pryw.-doc. Ptaszyckiego*, wydane przez studenta A. R. Grasse, napisane ręcznie. Litografia, Petersburski Uniwersytet Państwowy], Petersburg, 1896, 480 str. Cytowanie na str. 36.

[P15]* *Курс аналитической геометрии. Лекции прив.-доц. И. Л. Пташицкого*, изд. студ. Я. Ф. Ротарского, литография, Санкт-Петербургский Государственный Университет [*Kurs geometrii analitycznej. Wykłady priw.-doc. Ptaszyckiego*, wydane przez studenta Ja. F. Rotarskiego, litografia, Petersburski Uniwersytet Państwowy], Petersburg, 1898, 352 str. Cytowanie na str. 36.

[P16] *Twierdzenia ogólne o całkowaniu różniczek abelowych w postaci skończonej*, „Prace Matematyczno-Fizyczne", 11 (1900), 23–31. JFM 31.0452.02 Cytowanie na str. 42, 57, and 78.

[P17] *Sur la réduction d'un problème algébrique* [*O redukcji pewnego problemu algebraicznego*], „Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences", 130 (1900), 105–107. JFM 31.0426.02 Cytowanie na str. 57 and 78.

[P18] *Общие предложения об интегрировании в конечном виде абелевых дифференциалов*, Математический Сборник [*Twierdzenia ogólne o całkowaniu różniczek abelowych w postaci skończonej*, „Matematiczeskij Sbornik"], 21 (1900), nr 3, 464–478. Cytowanie na str. 42 and 57.

[P19]* *Аналитическая геометрия: По лекциям проф. Пташицкого*, сост. студ. В. Комаров, литография Богданова, Санкт-Петербургский Государственный Университет [*Geometria Analityczna: według wykładów prof. Ptaszyckiego*, zebrał student W. Komarow, litografia Bogdanowa, Państwowy Uniwersytet Petersburski], Petersburg, 1906, 339 str. Cytowanie na str. 36 and 74.

[P20]* *Аналитическая геометрия: По лекциям проф. Пташицкого*, сост. студ. В. Комаров, литография Богданова, Санкт-Петербургский Государственный Университет, 2-издание [*Geometria Analityczna: według wykładów prof. Ptaszyckiego*, zebrał student W. Komarow, litografia Bogdanowa, Państwowy Uniwersytet Petersburski, 2 wydanie [P19]], Petersburg, 1908, 428 str. Cytowanie na str. 36 and 60.

[P21] *Sur un théorème d'analyse indéterminée, énoncé par Jacobi* [*O pewnym twierdzeniu analizy diofantycznej sformułowanym przez Jacobiego*], „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", 18 (1909), 1–3 (po francusku). JFM 40.0476.01 Cytowanie na str. 42, 57, and 78.

[P22]* *Приложения интегрального исчисления к геометрии: По лекциям проф. И. Л. Пташицкого*, Издание Издательского Комитета при Физ.-Мат. Фак. Санкт-Петербургского Государственного Университета, литографи [*Zastosowania rachunku całkowego w geometrii: wykład prof. Ptaszyckiego*, Wydanie Komitetu Wydawniczego przy Wydziale Fiz.-Mat. Państwowego Uniwersytetu Petersburskiego, litografia], Petersburg, 1909, 139 str. Cytowanie na str. 36.

[P23]* *Аналитическая геометрия: По лекциям проф. Пташицкого*, сост. студ. В. Комаров, 3-издание, Издание Издательского Комитета при Физ.-Мат. Фак. Санкт-Петербургского Государственного Университета, литографи [*Geometria Analityczna: według wykładów prof. Ptaszyckiego*, zebrał student W. Komarow. 3 wydanie, Wydanie Komitetu Wydawniczego przy Wydziale Fiz.-Mat. Państwowego Uniwersytetu Petersburskiego, litografia], Petersburg, 1909, 386 str. Cytowanie na str. 36.

[P24] *Приложения интегрального исчисления к геометрии. По лекциям проф. И. Л. Пташицкого*, Издание Издательского Комитета при Физ.-Мат. Фак. Санкт-Петербургского Государственного Университета, литографи [*Zastosowania rachunku całkowego w geometrii.* Według wykładów prof. I. L. Ptaszyckiego, Wydanie Komitetu Wydawniczego przy Wydziale Fiz.-Mat. Państwowego Uniwersytetu Petersburskiego, litografia], Petersburg, 1910, 140 str. Cytowanie na str. 36.

[P25]* *Эллиптические функции. По лекциям проф. И. Л. Пташицкого*, Издание Издательского Комитета при Физ.-Мат. Фак. Санкт-Петербургского Государственного Университета, литографи [*Funkcje Eliptyczne: według wykładów prof. Ptaszyckiego*, Wydanie Komitetu Wydawniczego przy Wydziale Fiz.-Mat. Państwowego Uniwersytetu Petersburskiego, litografia], Sankt Petersburg, 1911, 243 str. Cytowanie na str. 36.

[P26]* *Аналитическая геометрия: По лекциям проф. Пташицкого*, сост. студ. В. Комаров, 4-издание., Издание Издательского Комитета при Физ.-Мат. Фак. Санкт-Петербургского Государственного Университета, литографи [*Geometria Analityczna: według wykładów prof. Ptaszyckiego*, zebrał student W. Komarow, 4 wydanie, Wydanie Komitetu Wydawniczego przy Wydziale Fiz.-Mat. Państwowego Uniwersytetu Petersburskiego, litografia], Petersburg, 1909, 408 str. Cytowanie na str. 36.

C. Informacje źródłowe o Janie Ptaszyckim

[Pt1] *Iwan Lwowicz Ptaszycki (Иван Львович Пташицкий)*, *Диплом магистра но. 463*, Физико-Математический Факультет Императорского С.-Петербургского Университета из 21 марта 1884 г. [*Dyplom magistra, nr 463*, Wydział Fizyczno-Matematyczny Cesarskiego S.-Petersburskiego Uniwersytetu z 21 marca 1884 roku] oraz *Положение о премии имени заслуженного ординарного профессора Императорского С.-Петербургского Университета Ивана Львовича Пташицкого* из 17 марта 1914 г. [*Przepisy dotyczące nagrody imienia zasłużonego profesora zwyczajnego S.-Petersburskiego Uniwersytetu Iwana Lwowicza Ptaszyckiego* z 17 marca 1914 roku], Центральный государственный исторический архив Санкт-Петербурга, Фонд 14, Опис 1, д. 8249 [Centralne Państwowe Archiwum Historyczne w S.-Petersburgu, Zapis archiwalny 14, Opis 1, sprawa 8249], list 4 oraz sprawa 10889, list 805. Cytowanie na str. 41 and 60.

[Pt2] *Ptaszycki Iwan Lwowicz (1854–1912) (Пташицкий Иван Львович (1854–1912))*, [в:] ,,Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Петербургского университета за истекшую третью чертверть века его существования. 1869–1894", Типографи и Литографи Б. М. Вольфа, С.-Петербург [[w:] „Biograficzny słownik profesorów i wykładowców Cesarskiego Uniwersytetu Petersburskiego za trzecie ćwierćwiecze jego istnienia. 1869–1894", Drukarnia i Litografia B. M. Wolfa, S.-Petersburg], 1896, I, 342–344 oraz 1898, II, 140. Cytowanie na str. 32 and 70.

[Pt3] *I. L. Ptaszycki (И. Л. Пташицкий)*, *Некролог* [в:] ,,Отчет о состоянии Императорского Санкт-Петербурского университета за 1912 г. [*Nekrolog*, [w:] Raport o stanie Cesarskiego Petersburskiego Uniwersytetu w Petersburgu za rok 1912], Petersburg, 1913, 9–17. Jest to artykuł Posse [Po12] (bez podania autora). Cytowanie na str. 32, 40, 52, 60, and 70.

[Pt4] *Ptaszycki Iwan Lwowicz (1854–1912) (Пташицкий Иван Львович (1854–1912))*, [в:] ,,Сетевой биографический словарь профессоров и преподавателей Санкт-Петерсбургского университета (1819–1917)", СПб, 2012 [w: „Sieciowy słownik biograficzny profesorów i nauczycieli Uniwersytetu w Petersburgu (1819–1917)", Petersburg, 2012] na stronach: http://bioslov-hist.spbu.ru/person/529-ptashitskiy-ivan-l-vovich.html, data dostępu 24.05.2018. Cytowanie na str. 32 and 60.

[Pt5] *Ptaszycki Jan*, [w:] „Acta Mathematica 1882–1912, Table Générale des Tomes 1–35", 1913, s. 102 i zdjęcie na stronie 165. Cytowanie na str. 37, 60, and 70.

[Ch16] J. Chojnacki, *Blues z kapustą*, Wydawnictwo Znak, Kraków, 2016, 256 stron [Ptaszycki Jan, str. 16, 248; Ptaszycki Adam, str. 15, 82, 248]. Cytowanie na str. 35 and 60.

[De60] I. Ja. Depman (И. Я. Депман), *С.-Петербургское математическое общество*, ,,Историко-математические исследования" [*Petersburskie Towarzystwo Matematyczne*, „Badania matematyczno-historyczne"], 13 (1960), 11–106 [Ptaszycki, str. 52–58; spis prac i podobizna Ptaszyckiego]. Cytowanie na str. 32, 34, 36, 39, 42, 60, and 70.

[DW63] J. Dianni i A. Wachułka, *Tysiąc Lat Polskiej Myśli Matematycznej*, PZWS, Warszawa, 1963 [Jan Ptaszycki, str. 234]. Cytowanie na str. 31 and 60.

[Di12] S. Dickstein, *Jan Ptaszycki (1854–1912)*, „Wiadomości Matematyczne", 16 (1912), 241–247; Nekrolog Dicksteina jest dostępny na stronie: https://polona.pl/item/jan-ptaszycki-1854-1912,Njc4NTk0NzY/4/#info:metadata, data dostępu 08.09.2018, a tom „Wiadomości Matematycznych" z nekrologiem Dicksteina jest dostępny na stronie: http://ebuw.uw.edu.pl/dlibra/docmetadata?id=97552&from=publication, str. 67–73 pliku, data dostępu 08.09.2018. Cytowanie na str. 32, 34, 39, 40, 42, 60, and 70.

[Di28] S. Dickstein, *Wspomnienie pośmiertne o profesorze Juljanie Sochockim*, „Wiadomości Matematyczne", 30 (1927/8), 101–108 [Ptaszycki, str. 105–107]. Cytowanie na str. 34.

[Do86] S. Dobrzycki, *Ptaszycki Jan (1854–1912)*, [w:] „Polski Słownik Biograficzny"29 (1986), 292 [brak informacji o rodzinie Ptaszyckiego]. Cytowanie na str. 31 and 70.

[Du12] R. Duda, *Ptaszycki Jan (1854–1912)*, [w:] „Matematycy XIX i XX wieku związani z Polską”, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław, 2012, 378–379. Cytowanie na str. 31, 60, and 70.

[Ju68] A. P. Juszkiewicz [A. P. Yushkevich] (А. П. Юшкевич), *История математики в России до 1917 года*, Издательство Наука, Москва [*Historia matematyki w Rosji do 1917 roku*, Wydawnictwo Nauka], Moskwa, 1968 [Ptaszycki, str. 313, 341 i 385 ze zdjęciem]. Cytowanie na str. 32, 41, and 60.

[Ki00] A. Kijas, *Ptaszycki Jan*, [w:] A. Kijas, „Polacy w Rosji od XVII wieku do 1917 roku. Słownik biograficzny”, Instytut Wydawniczy Pax, Wydawnictwo Poznańskie, Warszawa–Poznań, 2000, s. 288. Cytowanie na str. 70.

[Ko86] S. Konarski, *Ptaszycki Stanisław Ludwik (1853–1933)*, [w:] „Polski Słownik Biograficzny”, 29 (1986), 294–297. Cytowanie na str. 32.

[Lo15a] N. W. Łokoć [N. V. Lokot’] (Н. В. Локоть), *Забытые имена. Иван Пташыцкий (1854–1912)* [*Zapomniane postacie. Iwan Ptaszycki (1854–1912)*], [w:] ,,История в фактах и современный подход к безопастности”, KUPRIENKO SV, Odessa, 2015, 80–94; 20 stron pod adresem: http://www.sworld.com.ua/simpoz4/57.pdf (tutaj w spisie publikacji Ptaszyckiego brakuje jego prac [P1], [P7], [P13], [P16], [P17] i [P21]; praca wysłana 20.01.2015), data dostępu 24.05.2018. Cytowanie na str. 31, 32, 37, 41, 60, and 71.

[Lo15b] N. W. Łokoć [N. V. Lokot’] (Н. В. Локоть), *Математики первых Петергофских гимназий (1880–1917)*, [в:] ,,Сборник научных трудов SWorld”[*Matematycy pierwszych gimnazjow Peterhofu (1880–1917)*, [w:] Zbior prac naukowych SWorld], Vyp. 1 (38), Tom 21, KUPRIENKO SV, Odessa, 2015, 37–50; 20 stron pod adresem: http://www.sworld.com.ua/index.php/ru/physics-and-mathematics-115/history-of-physics-and-mathematic-sciences-115/24605-115-046 [Ptaszycki, str. 3–7; praca wysłana 15.02.2015], data dostępu 24.08.2018. Cytowanie na str. 31, 32, 41, 60, and 71.

[Lo16] N. W. Łokoć [N. V. Lokot’] (Н. В. Локоть), *Учителя-математики Петергофской прогимназии (1880–1900) гг.*, ,,История науки и техники”) [*Nauczyciele-matematycy z progimnazjum Peterhofu (1880–1900)*, „Historia Nauki i Techniki”], no. 3

(2016), 66–72 [Ptaszycki, str. 68–70]. Cytowanie na str. 41, 60, and 71.

[Lo18] N. W. Łokoć [N. V. Lokot'] (Н. В. Локоть), *Иван Львович Пташицкий (1854–1912)*, [w:] „ Г. И. Синкевич (ред.), А. И. Назаров (ред.), *Математический Петербург. История, наука, достопримечательности. Справочник-путеводитель*, Санкт-Петербург [G. I. Sinkiewicz (red.), A. I. Nazarow (red.), *Matematyczny Petersburg. Historia, nauka, miejsca pamiątkowe*], 2018, 336 str. [Ptaszycki, str. 189]. Cytowanie na str. 71.

[Od14] W. P. Odyniec [V. P. Odinets] (В. П. Одиниец), *Предтечи и первые творцы польской математической школы (1860–1922): учебное пособие*, Коми государственный педагогический институт, Сыктывкар [*Prekursorzy i pierwsi twórcy polskiej szkoły matematycznej (1860–1922): skrypt*, Komi Państwowy Instytut Pedagogiczny, Syktywkar], 2014, 60 str. [Ptaszycki, str. 14–15, 44]. Cytowanie na str. 32, 41, 60, and 70.

[Po12] K. A. Posse (К. А. Поссе), *И. Л. Пташицкий (21-го августа 1854 г. – 17-го апреля 1912) (некролог)*, „Журнал Министерства Народного Просвещения" [*I. L. Ptaszickij (21 VIII 1854–17 IV 1912) (nekrolog)*, „Dziennik Ministerstwa Edukacji Narodowej"] 6 (1912), 95–101; Przedruk [w:] Сообщения Харьковского математического общества [Komunikaty Charkowskiego Towarzystwa Matematycznego] (2) 13 (1913), nr 6, 247–252. http://www.mathnet.ru/links/42dd4b0c71009489c555023234d2573f/khmo94.pdf, data dostępu 24.08.2018. Cytowanie na str. 32, 39, 40, 42, 60, 70, and 76.

[SW03] M. Sękowska i D. Węglowska, *Ptaszycki Jan (1854–1912)*, [w:] „Słownik Biograficzny Matematyków Polskich", pod red. S. Domoradzkiego, Z. Pawlikowskiej-Brożek i D. Węglowskiej, Wydawnictwo Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej, Tarnobrzeg, 2003, 191. Cytowanie na str. 31 and 70.

[Sh46] I. Z. Sztokało (red.) [I. Z. Shtokalo (red.)] (И. З. Штокало (ред.)), *История отечественной математики, Том 2, 1801–1917*, Издательство Наукова Думка, Киев [*Historia matematyki ojczystej, Tom 2, 1801–1917*, Wydawnictwo Naukowa Dumka, Kijów], 1967 [Ptaszycki, str. 243, 258, 395, 399, 406, 410 i 592]. Cytowanie na str. 41.

Jan Ptaszycki (1854-1912)

Lech Maligranda and Jan Strelcyn

Abstract. Jan Ptaszycki was a Polish mathematician working in St. Petersburg in the period 1876–1912. In Poland, he is forgotten, and in Russia considered generally as a Russian mathematician, known there as Ivan Lvovich Ptaszycki. In Russian literature about history of mathematics, depending on the author, it is reported that Ptaszycki was a Russian mathematician or, more rarely, a Polish mathematician as, for example, in Lokot (2015, 2018). The important information about Ptaszycki comes from the obituaries of K. A. Posse (1912) and S. Dickstein (1912) and from the memoirs of I. Ja. Depman (1960), that is from people who knew him personally. We wanted to make known to the contemporary reader this forgotten Polish mathematician working in St. Petersburg. This article tries to reach his work and achievement in mathematics as well as information about his activity. After discussing his biography, we briefly discuss his mathematical work. At the end of this paper, we quote articles and books related to Ptaszycki scientific achievements and we present a full list of his published works and books, and also references where one can find information about him.

2010 Mathematics Subject Classification: 01A55; 01A60; 01A70; 01A73; 13N99.

Key words and phrases: Jan Ptaszycki, biographies, St. Petersburg University, history of mathematics in Russia, integration in finite terms, differentaial algebra.

Lech Maligranda
Luleå University of Technology
Department of Engineering Sciences and Mathematics
SE-971 87 Luleå, Sweden
ORCID https://orcid.org/0000-0002-9584-4083
E-mail: lech.maligranda@ltu.se

Jan Strelcyn
Université Paris 13
Sorbonne Paris Cité, CNRS UMR 7539
Laboratoire Analyse, Géometrie et Applications
99 Avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse, Francja
ORCID https://orcid.org/0000-0002-9334-4018
E-mail: strelcyn@math.univ-paris13.fr
Communicated by: Stanisław Domoradzki

(Zgłoszona: 4 września 2018; Wersja końcowa: 31 grudnia 2018)