

Jacek Juzwiszyn (Wrocław)
Andrzej Krzywicki (Wrocław)

TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI W PRACACH WŁADYSŁAWA GOSIEWSKIEGO

W artykule przedstawione są wyniki W. Gosiewskiego z lat 1872–76. Przy założeniu ciągłej struktury ośrodka sprężystego, autor wyprowadza równania klasycznej teorii sprężystości, rozpatruje postać zależności tensora naprężeń od tensora deformacji, jak również pokazuje, że lokalny ruch ośrodka sprężystego opisuje – podobnie jak ruch ciała sztywnego w znanym twierdzeniu Poincota – toczenie jednego stożka po drugim. W pracach z lat 1875 i 1876 autor, w oparciu o mechanikę newtonowską, wyznacza siły międzyatomowe molekuły.

1. W latach 1820–1850 i później panowało duże zamieszanie i toczyły się gorące spory, szczególnie żywe we Francji, wokół podstaw mechaniki ośrodków ciągłych – zarówno ciał sprężystych jak i cieczy. *Pierwsi mężowie nauki jak Navier, Cauchy, Green, Poisson postawili jej główne zasady, a Cauchy wzbogacił ją jeszcze nowymi odkryciami.* [...] *Pomimo to wszyscy prawie wymienieni geometrowie jak i ich następcy wyszli od odmiennych wypadków* pisze Gosiewski w [1]. Wszyscy byli zgodni w jednym, że znane własności ośrodka wymagają przyjęcia, iż składa się on z nie stykających się ze sobą i oddziałujących na siebie molekuł. Cauchy, Poisson i Saint-Venant podali dowody, w ich mniemaniu poprawne, niemożliwości istnienia ośrodka ciągłego (Cauchy sięgnął nawet do argumentów teologicznych). Przyjmowano, że wzajemne oddziaływanie molekuł ma charakter newtonowski – zależny od ich odległości i mający kierunek łączącej je prostej, kolektywne ich oddziaływanie wyrażało się sumą nieskończoną, którą na różne sposoby aproksymowano całką – i tu pojawiły się spory i niezgodności wyników. Sam Cauchy, który wyraził siły wewnętrzne z pomocą tensora naprężeń, nie zrezygnował z prób ich

obliczenia w oparciu o oddziaływanie molekularne. Ciekawy opis ówczesnej sytuacji można znaleźć w pracy O. Darrigola [5]. Dodajmy, że ściśle wyniki dotyczące wspomnianej wyżej aproksymacji, i to jedynie w szczególnych przypadkach, np. struktur okresowych, pojawiły się dopiero w ostatnich latach, por. np. [6].

W dwóch obszernych pracach ([1], [2]) zamieszczonych w I tomie *Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych*, Władysław Gosiewski pokazuje, że podstawowe równania teorii sprężystości można wyprowadzić w oparciu o założenie, że ośrodek jest ciągły i że jego własności mechaniczne w pełni opisane są tensorem naprężeń bez uciekania się do molekularnej struktury ośrodka. Późniejsze prace Gosiewskiego ([3], [4]) zamieszczone w siódmym tomie *Pamiętnika*, zawierają pewne wnioski o strukturze i wielkości wzajemnego oddziaływania cząstek ośrodka sprężystego. Wnioski te, choć całkowicie zdezaktualizowane, są ciekawą ilustracją ówczesnego stanu poglądów na „mikrostrukturę” materii.

2. Do opisu chwilowego odkształcenia ośrodka sprężystego służy tensor deformacji $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{x})$. Jego składowe $D_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$, $i, j = 1, 2, 3$ są składowymi części symetrycznej macierzy pochodnych I-rzędu $\nabla \mathbf{u}$ funkcji $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ wyrażającej lokalne przemieszczenie punktu $\mathbf{x}$ ośrodka: $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$ pod wpływem działających sił. Część antysymetryczna $\mathbf{\Omega} = (\Omega_{ij})$ macierzy $\nabla \mathbf{u}$, ma postać $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i)$. Zdefiniowany przez nią jednoznacznie w oparciu o równość $\mathbf{\Omega x} = \boldsymbol{\omega x}$ wektor $\boldsymbol{\omega}$ opisuje lokalny, sztywny ruch obrotowy otoczenia punktu $\mathbf{x}$; Gosiewski wykorzystuje go w swoim opisie ruchu; klasyczna teoria sprężystości pomija wektor $\boldsymbol{\omega}$.

Drugim z tensorów stanowiących podstawę opisu ośrodków sprężystych jest tensor naprężeń, będący wielkim odkryciem Cauchy’ego. Z jego pomocą Cauchy w pełni rozwiązał problem sił wewnętrznych w ośrodkach ciągłych. Z problemem tym zmagał się cały wiek XVIII, a pierwszy krok uczynił Euler definiując pojęcie ciśnienia w cieczy. Wyraża ono wielkość siły z jaką działa (jednostronnie) na element płaski σ sąsiadująca z nim ciecz. Euler zakładał, że kierunek tej siły jest prostopadły do σ , co zawężyło jego stosowność do przypadku znikania sił wewnętrznych stycznych do σ , a których istnienie w ośrodkach sprężystych (i cieczach lepkich) było oczywiste. Do ich opisu nie wystarczał jeden wektor prostopadły do σ . Cauchy zastąpił go tensorem naprężeń $\mathbf{T}$ drugiego rzędu, którego składowa T_{ij} jest równa j -tej składowej siły działającej na element płaski prostopadły do i -tej osi. Istota odkrycia Cauchy’ego zawiera się w fakcie założenia jego tensorowego charakteru; umożliwiło to zapisanie jego postaci w dowolnym układzie odniesienia.

3. Punktem wyjścia rozważań Gosiewskiego jest szczegółowa analiza lokalna chwilowego ruchu ciała sprężystego. Wyraża ją w języku geometrycznym,

wzorując się na znanym w mechanice ciała sztywnego twierdzeniu Poinso-ta; pokazuje, że lokalnie ruch ten można opisać z pomocą dwóch stożków o tym samym wierzchołku. Jeden z nich ruchomy, związany z ciałem, toczy się bez poślizgu po drugim nieruchomym, ich wspólna tworząca w każdej chwili ma kierunek wektora ω określonego macierzą Ω , patrz p. 2. Tego rodzaju obrazowy opis ruchu ośrodka nie mógł stać się podstawą jego analizy, właściwym jego opisem są równania. Gosiewski nie szuka ich rozwiązań (dziś w większości robią to komputery), poprzestając na ogólnej uwadze o warunkach brzegowych.

4. Do wyprowadzenia (wcześniej znanych) równań ruchu Gosiewski stosuje metodę Lagrange’a *prac przygotowanych*. Punktem wyjścia jest wyrażenie energii potencjalnej E odkształconego ośrodka w postaci całki z formy kwadratowej składowych tensora naprężeń. Zaletą chętnie wówczas stosowanej metody Lagrange’a była możliwość znalezienia przy jej wykorzystaniu postaci sił powierzchniowych, które pojawiały się w wyniku całkowania przez części równania w wariacjach $\delta E = 0$.

5. Pytając o ogólną postać zależności $\mathbf{T} = f(\mathbf{D})$ tensora naprężeń od tensora deformacji Gosiewski jako jeden z pierwszych wkracza na teren nieliniowej teorii sprężystości. Dziś jest to jedna z najbujniej rozwijających się dziedzin z uwagi na praktyczne znaczenie różnego rodzaju tworzyw, o z góry określonych właściwościach mechanicznych. Klasyczna, liniowa teoria sprężystości, oparta jest na założeniu liniowości funkcji f :

$$T_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \alpha_{ijkl} D_{kl} \quad (*)$$

co stanowi uogólnioną postać prawa Hooke’a (współczynniki α_{ij} są stałe, jeśli ośrodek jest jednorodny). Różne rodzaje symetrii, z których najważniejszą jest niezmienniczość relacji (*) względem obrotów (przekształceń ortogonalnych) redukuje ilość współczynników α_{ijkl} do dwóch; wielkości ich wyznacza się eksperymentalnie. Zależność $\mathbf{T} = f(\mathbf{D})$ charakteryzuje własności sprężyste ośrodka. Jakie warunki musi spełniać funkcja f ? Przy tak ogólnie postawionym pytaniu jedynym ograniczeniem jest zachowanie postaci tej zależności w różnych układach prostokątnych, a więc jej niezmienniczość względem przekształceń ortogonalnych. Zaskakiwać musi fakt, że ogólne rozwiązanie tego pozornie prostego zagadnienia algebraicznego znaleźli dopiero T.L. Ericksen i R.S. Rivlin [7], w roku 1955. Pokazali oni, że przy założeniu wspomnianej wyżej niezmienniczości oraz spełnieniu dodatkowego warunku

$$f(\mathbf{0}) = \alpha \mathbf{E}$$

gdzie α jest skalar, a $\mathbf{E}$ macierzą jednostkową, w przypadku ośrodka jednorodnego funkcja f musi być postaci

$$T = f(\mathbf{D}) = \alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{D} + \gamma \mathbf{D}^2$$

gdzie α, β, γ są funkcjami skalarnymi trzech głównych niezmienników I_1, I_2, I_3 macierzy $\mathbf{D}$, tj. współczynnikami wielomianu charakterystycznego

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{D}) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3.$$

Jest oczywiste, że pytanie o niezmienniczość funkcji f względem obrotów związane jest z badaniem formy kwadratowej $(\mathbf{D}\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Nie mając do dyspozycji dostatecznie rozwiniętego aparatu algebry macierzowej, niezmienniki przekształceń ortogonalnych Gosiewski znajduje przez jawne przekształcenie równania *elipsoidy odkształcenia* $(\mathbf{D}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = c$ (z odpowiednio dobraną stałą c) do postaci kanonicznej, a następnie pokazuje, że można je wyznaczyć z równania $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{D}) = 0$. To komplikuje rachunki i prowadzi do nieprzejrzytych wyników. Ale mogłoby się wydawać, że Gosiewski miał wszelkie dane, aby uzyskać wynik Ericksena–Rivlina, i może tak by się stało, gdyby Gosiewski rozważał zależności funkcji f nie od wszystkich pochodnych $\partial u_i / \partial x_j$, a tylko od składowych tensora deformacji. Złożona postać funkcji f uzyskana przez Gosiewskiego wynika z faktu, że dodanie części antysymetrycznej $\mathbf{\Omega}$ jest równoważne z uzupełnieniem tensora deformacji liniowymi kombinacjami pochodnych $\partial^2 u_i / \partial x_j \partial x_k$, a co jest wynikiem uwzględnienia dodatkowej deformacji ośrodka spowodowanej różnicą wartości wektora $\boldsymbol{\omega}$ w sąsiednich punktach.

Nie znajdując pełnego rozwiązania zagadnienia postaci funkcji f , (oprócz przypadku liniowego). Gosiewski rozważa przypadek *ciał jednorodnych rzędów wyższych*, gdy f jest funkcją liniową pochodnych odkształceń u_i wyższych rzędów. Podaje też przykład rozwiązań, gdy na postać funkcji f nałożony jest niejawni warunek w postaci pewnych związków drugiego stopnia, między pochodnymi $\partial u_i / \partial x_j$.

6. W krótkiej (w porównaniu z poprzednimi, bo zaledwie ośmiostronicowej) pracy [3] Gosiewski odpowiada na pytanie: *jakim warunkom ma zadość czynić ciało uważane jako układ punktów merytalnych, ażeby przy ustanawianiu równań jego równowagi lub ruchu wolno było po jego przestrzeni różniczkować i całkować, t.j. aby go wolno było zastąpić materią ciągłą?*

Przyjmując, że ciało jest *ciągłe i sztywne* i stosując metodę prac przygotowanych Lagrange’a, Gosiewski znajduje warunek równowagi wyrażający stałość odległości par *nieskończenie sąsiednich punktów*. Ma on postać zanikania tensora deformacji

$$\partial \delta u_i / \partial x_j + \partial \delta u_j / \partial x_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (**)$$

na wszystkich *przesunięciach* przygotowanych δx_i , czyli sześć warunków spełnionych w każdym punkcie ciała *sztynnego*.

Z drugiej strony sześć warunków określa sztywność układu złożonego z n punktów wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 4$, gdyż dla $n = 3$ są 3 warunki (co jest równe ilości boków trójkąta z nich utworzonego i dodanie każdego kolejnego punktu wymaga dodatkowych trzech warunków), więc dla n punktów warunków tych jest $3n - 6$, co dla $n = 4$ daje liczbę sześć równą ilości warunków (**).

Aby więc ciało – konkluduje Gosiewski – uważane jako układ punktów materialnych, można było zastępować materią ciągłą, to elementowi nieskończenie małemu téj materii powinien odpowiadać w ciele układ nieskończenie mały czterech punktów materialnych. Układ taki nazwiemy „cząsteczką (molekułą)”; każdy z czterech punktów go składających, „atomem”.

Założenie sztywności ciała i niezmienniczości odległości pomiędzy dwoma atomami pozwala Gosiewskiemu wyznaczyć wielkość działającej między nimi newtonowskiej siły (skierowanej wzdłuż łączącej je prostej); zależy ona od gęstości ośrodka, mas obu atomów, ich odległości i dowolnej funkcji jednoargumentowej. W pracy [4] Gosiewski pokazuje, że jeśli zażądamy niezależności znalezionej wyrażenia od gęstości ośrodka, siła między dwoma atomami tworzącymi sztywną cząsteczkę (o masach m, m^*) i odległymi o r wyraża się wzorem

$$\frac{m m^*}{m + m^*} \frac{1}{r} \varphi\left(\frac{r^3}{m + m^*}\right).$$

W oparciu o ten wynik Gosiewski wyprowadza prawo gazu doskonałego:

$$pV = \text{const.}$$

Krótką nota biograficzna

Władysław Gosiewski¹ (ur. 8 czerwca 1844 w Honiatynie koło Tomaszowa Lubelskiego), polski matematyk, fizyk i logik. Pochodził z rodziny ziemiańskiej, był synem Michała i Katarzyny z Borkowskich. Uczył się w tomaszowskiej szkole, potem w gimnazjum w Lublinie. W 1863 podjął w Szkole Głównej Warszawskiej studia na wydziale lekarskim, jednak zainteresowany wykładami Frąckiewiczza, rozpoczął studia matematyczne, fizyczne i filozoficzne. Od razu dał się poznać jako student o nieprzeciętnych zdolnościach. (Zdradzał aspiracje

¹ W notatce biograficznej dot. W. Gosiewskiego, autorzy wykorzystywali m.in. informacje umieszczone w „wyszukiwarkach internetowych” Google, Yahoo, oraz: www.tnw.waw.pl, www.bkpan.poznan.pl, portalwiedzy.onet.pl, forumakad.pl, portalwiedzy.onet.pl.

Fotografia W. Gosiewskiego, Źródło: http://pl.wikipedia.org/wiki/W%C5%82adys%C5%82aw_Gosiewski.



Władysław Gosiewski (1844–1911)

badawcze w dziedzinie algebry i fizyki teoretycznej). Za rozprawę z algebry wyższej otrzymał złoty medal w konkursie studenckim. Obroniwszy pracę magisterską *O analitycznym sposobie oznaczania współczynników sprężystości*, wyjechał na trzyletnie studia do Paryża. Znalazł się tam w kręgu mecenatu Jana hr. Działyńskiego. Był jednym z czterech młodych matematyków (o dużych ambicjach naukowych), którzy doprowadzili do powstania Towarzystwa Nauk Ścisłych. Owi matematycy to czterech Władysławów: Kretkowski, Folkierski, Gosiewski i Kluger. Mecenat Działyńskiego umożliwił Gosiewskiemu wydawanie podręczników matematyki, przy jego współpracy w latach 1871–1882 ukazało się 12 tomów *Pamiętnika Towarzystwa Nauk Ścisłych*. Po powrocie do kraju nie mogąc otrzymać katedry, pracował jako prywatny nauczyciel; uczył m.in. matematyki w III rosyjskim gimnazjum klasycznym w Warszawie i warszawskich szkołach realnych (1872–1898) oraz Szkole Handlowej Kronenberga (1878–1898). W latach 1872–1911 był jednocześnie urzędnikiem w Towarzystwie Kredytowym w Warszawie. W 1891 został członkiem korespondentem Akademii Umiejętności w Krakowie i poznańskiego Towarzystwa Naukowej Pomocy dla Młodzieży Wielkiego Księstwa Poznańskiego (TPN, zał. w 1841), a w 1907 stał się jednym z członków – założycieli Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Zajmował się teorią prawdopodobieństwa i metodami matematycznymi fizyki.

W książce *Wykład Mechaniki cząsteczkowej (molekularnej)* (1873) przedstawił próbę sprowadzenia fizyki do mechaniki układu punktów materialnych. Jako pierwszy w Polsce zastosował rachunek prawdopodobieństwa w termodynamice. Badał prawdopodobieństwo błędów przypadkowych. W książce *Zasady rachunku prawdopodobieństwa* (1906) podał dowód twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Bernoulliego. W dziedzinie logiki zajmował się teorią wnioskowania indukcyjnego. Władysław Gosiewski nie zdobył stopni naukowych. Wraz

z Samuelem Dicksteinem oraz Edwardem i Władysławem Natansonami założył w roku 1888 czasopismo naukowe *Prace Matematyczno-Fizyczne*. Uczniem Gosiewskiego był Władysław Natanson, późniejszy profesor UJ, uczony od którego zaczyna się historia fizyki teoretycznej w Polsce. Gosiewski był zasłużonym warszawskim działaczem społecznym. Zmarł 16 kwietnia 1911 w Wołominie i tam też został pochowany.

Na koniec zacytujmy jeszcze opinię Aleksandra Birkenmajera, którą przytacza Grzegorz Filip w *Forum Akademickim* (2) 1999 w artykule *Czterech z Paryża*. Pisze on o Gosiewskim m.in.

Był to niepowszedni talent matematyczny, wszechstronny znawca światowej literatury w swoich specjalnościach, a przy tym umysł głęboki i na wskroś oryginalny, zdążający własnymi drogami do rozwiązywania zagadnień mających według niego podstawowe dla wielkich obszarów nauki znaczenie.

Literatura

Cytowane prace Władysława Gosiewskiego

- [1] W. Gosiewski, *O sprężystości ciał stałych jednorodnych*, Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu 1 (1871), 1–56.
- [2] ———, *O funkcjach jednoczesnych i jednogatunkowych*, ibidem 1 (1871), 57–88.
- [3] ———, *O zasadniczej hipotezie mechaniki cząsteczkowej*, ibidem 7 (1875), 1–8.
- [4] ———, *Dwa twierdzenia z mechaniki cząsteczkowej*, ibidem 8 (1876), 1–7.

Inne prace

- [5] O. Darrigol, *Between hydrodynamic and elasticity theory – the first five births of the Navier–Stokes equation*, Arch. Hist. Exact Sci. 56 (2002), 95–150.
- [6] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, *From molecular models to continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal. 164 (2002), 341–381.
- [7] J. L. Ericksen, R. S. Rivlin, *Stress-deformation relations for isotropic materials*, J. Rational Mech. Anal. 4 (1955), 323–425.

Forum akademickie (2) 1999 – Ogólnopolski miesięcznik informacyjno-publicystyczny.

Grzegorz Filip „*Czterech z Paryża – Władysław Gosiewski – matematyk*.”

http://www.tnw.waw.pl/index.php?option=com_content&task=view&id=69&Itemid=34,

<http://www.bkpan.poznan.pl/biblioteka/wydawnictwa/mat-fiz-tech.html>,

<http://forumakad.pl/archiwum/99/2artykuly/25-czterech.html>,

http://portalwiedzy.onet.pl/72366,,,gosiewski_wladyslaw_haslo.html,

http://pl.wikipedia.org/wiki/W%C5%82adys%C5%82aw_Gosiewski.

Theory of elasticity in papers of Władysław Gosiewski

Summary

The results of W. Gosiewski published (in Polish) in 1872–1876 are presented. Assuming the continuous structure of matter, equations of classical elasticity theory are derived, the problem of the form of the stress tensor dependence on strain tensor is discussed, and the description of the local motion of an elastic medium is given in a geometric form of two cones rolling one on the other (as in the well-known theorem of Poinot). In two short articles (published in 1875 and 1876), the problem of interatomic forces on Newtonian basis is discussed.

Jacek Juzwiszyn
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Katedra Matematyki i Cybernetyki
ul. Komandorska 118/120
53-345 Wrocław
jacek.juzwiszyn@ue.wroc.pl

Andrzej Krzywicki
Uniwersytet Wrocławski
Instytut Matematyczny
Plac Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław