



## Topologiczna struktura modeli skończenie elementowych mechaniki ośrodków ciągłych

KRYSPIN MIROTA

Akademia Techniczno-Humanistyczna, Katedra Podstaw Budowy Maszyn,  
43-309 Bielsko-Biała, ul. Willowa 2

**Streszczenie.** Jednym z krytycznych etapów dla sformułowania problemu symulacyjnego jest dyskretyzacja dziedziny. W pracy zaprezentowano pewne ogólne analogie i związki, jakie występują między dyskretyzacjami skończenie elementowymi a obiektami i formalizmami topologii. Dostarczają one efektywnej metody analizy struktury przyległości, które mogą być użyte w celu modyfikacji i przebudowy siatek.

**Słowa kluczowe:** sympleks, łańcuch, kołańcuch, incydencja, sąsiedztwo, remeshing, mechanika ośrodków ciągłych

**Symbole UKD:** 531.111.4

### 1. Wprowadzenie

Modele fenomenologiczne zjawisk rozpatrywanych na gruncie mechaniki ośrodków ciągłych mają najczęściej postać równania bądź układów równań różniczkowych cząstkowych, nierzadko nieliniowych, których rozwiązania są raczej trudne do osiągnięcia na drodze analitycznej. Z konieczności, regułą stanowi tutaj zastosowanie metod komputerowych, z czym wiąże się nieodłącznie zarówno aproksymacja związków fenomenologicznych zadania, jak i dyskretyzacja geometrii dziedziny.

Sam etap transformacji z reprezentacji ciągłej do dyskretnej ma kluczowe znaczenie dla stabilności i zbieżności procesu iteracyjnego, a w ogólności również jakości uzyskanych finalnie wyników. Równocześnie, praca z modelami dyskretnymi geometrii jest co najmniej trudna i uciążliwa, a możliwości modyfikacji i korekty modeli już istniejących bardzo ograniczone.

Celem niniejszej pracy jest prezentacja bezpośrednich związków i analogii, jakie występują między dyskretyzacjami wprowadzanymi w metodach numerycznych

a pewnymi obiektami abstrakcyjnymi rozpatrywanymi na gruncie topologii algebraicznej. Całość przedstawiono na przykładzie dość ogólnego problemu w postaci zagadnienia brzegowego, dla którego sformułowano aproksymację skończenie elementową, w sensie ważonych residuów.

## 2. Aproksymacje modeli fenomenologicznych

W obrębie każdej teorii fizycznej wprowadza się wielkości definiowane w relacji do obiektów geometrycznych i chronometrycznych. Gdyby rozpatrzeć pewien obszar  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ , w postaci domknięcia  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  o brzegu gładkim bądź kawałkami gładkim i interwał czasowy  $T \subset \mathbb{R}$ , to zasadą dla budowy ogółu związków modelowych jest wprowadzenie definicji pól tensorowych opisujących [2, 4, 5]:

- konfigurację  $\bar{\Omega} \times T \xrightarrow{u} \mathbb{R}^{m_1}$ , w szczególności mogą to być współrzędne czasoprzestrzeni, a także definiowane za ich pośrednictwem — jak w mechanice ośrodków ciągłych — przemieszczenia, gradienty deformacji, prędkości,
- przyczynę zmiany konfiguracji  $\bar{\Omega} \times T \xrightarrow{s} \mathbb{R}^{m_2}$ , w mechanice ośrodków ciągłych będą to przede wszystkim pola sił masowych.

Wielkości konfiguracyjne  $\mathbf{u}$  i źródłowe  $\mathbf{s}$  zespaja zwykle równanie bądź układ równań (odpowiednio do walencji  $m_1$  i  $m_2$  pól tensorowych) różniczkowych postaci [4, 5]

$$\mathbf{s} \xrightarrow{L} \mathbf{u}, \quad (1)$$

tworząc strukturę modelu fenomenologicznego, gdzie  $L$  jest operatorem różniczkowym. W mechanice ośrodków ciągłych rolę taką pełni równanie Cauchy'ego

$$\rho(\mathbf{a} - \mathbf{f}) = \nabla \boldsymbol{\sigma}, \quad (2)$$

wiążące efekty oddziaływań pól sił masowych  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$  oraz zewnętrznych  $\mathbf{f}$  z tensorem lokalnego stanu naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$  stanowiącym odzwierciedlenie zmiany konfiguracji. Co interesujące, postać tej relacji nie jest specyficzna dla mechaniki i można ją odnaleźć nawet w dość odległych dyscyplinach. Przykładowo, w termodynamice związek opisujący transport energii cieplnej na drodze przewodzenia ma formę

$$\rho \frac{di}{dt} = \nabla \dot{\mathbf{q}}, \quad (3)$$

zaś w teorii elektromagnetyzmu mamy równanie Gaussa, określające natężenie pola elektrycznego ( $\mathbf{E}$ ) w funkcji gęstości ładunku ( $\rho$ )

$$\rho = \nabla(\varepsilon \mathbf{E}). \quad (4)$$

Oczywiście będą tu występować różnice w sensie szczególnych sformułowań samego równania fenomenologicznego. Już w samej mechanice ośrodków ciągłych istnieje wiele sformułowań związków konstytutywnych stosowanych w celu określenia stanu naprężenia a hipoteza o ciągłości ośrodka pozwala odnosić sam formalizm do pewnej infinytezymalnej objętości lub wyróżnionego punktu przestrzeni. Prowadzi to do opisu materialnego (Lagrange'a) albo — tak jak ma to miejsce w przypadku mechaniki płynów — przestrzennego (Eulera), kiedy

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad \text{albo} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \otimes \nabla \mathbf{v}. \quad (5)$$

Jednak w kontekście budowy aproksymacji skończenie elementowej, nie tracąc na ogólności rozważań, możemy przyjąć w sensie matematycznym postać modelową równania Poissona

$$s = -\nabla(\nabla u) \quad \text{na} \quad \bar{\Omega}. \quad (6)$$

Uzupełnić go muszą warunki brzegowe dla zmiennej konfiguracyjnej  $u$  w postaci warunku pierwszego rodzaju (Dirichleta)

$$u|_{\partial\Omega_D} = u_D \quad (7)$$

oraz drugiego rodzaju (von Neumanna)

$$\mathbf{n}\nabla u|_{\partial\Omega_N} = h. \quad (8)$$

Pierwszym krokiem na drodze budowy modelu dyskretnego metody elementów skończonych jest sformułowanie postaci wariacyjnej zagadnienia brzegowego.

Przestrzeń rozwiązań dostarczająca aproksymacji  $\tilde{u}$  pola  $u$  musi posiadać cechy przestrzeni Sobolewa

$$H_p^k(\Omega) = \left\{ u \in L_p(\Omega) \wedge \nabla(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) \leq k, \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \in L_p(\Omega) \right\}, \quad (9)$$

o normie

$$\|u\|_k = \left( \sum_{s=0}^k \sum_{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n)=s} \left\| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Dla potrzeb rozwiązania wyjściowego zagadnienia brzegowego, ze względów praktycznych zakłada się zwykle  $H_2^1(\Omega)$ , uzupełniając ją o zbiór  $\{u_D\}$  wynikający z warunku Dirichleta

$$S(\Omega) = \{\tilde{u} \in H_2^1(\Omega) \wedge \tilde{u} = u_D \text{ na } \partial\Omega_D\}. \quad (11)$$

Wprowadzenie rozwiązanie przybliżonego  $\tilde{u}$  powoduje powstanie niezerowego residuum

$$s - \nabla^2 \tilde{u} = r \neq 0. \quad (12)$$

Do jego minimalizacji dostępnych jest wiele strategii, wśród których dość uniwersalną stanowi metoda ważonych residuów. Według niej dla każdej funkcji próbnej dobieramy pewną funkcję wagową  $w$ , również stanowiącą element przestrzeni  $H_2^1(\Omega)$

$$W(\Omega) = \{w \in H_2^1(\Omega) \wedge w = 0 \text{ na } \partial\Omega_D\}, \quad (13)$$

minimalizując sumę ważoną

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 \tilde{u} d\Omega = \int_{\Omega} w s d\Omega. \quad (14)$$

Aby możliwy był wybór  $\tilde{u} \in H_2^1(\Omega)$ , wyraz znajdujący się po lewej stronie równości przekształcamy na mocy twierdzenia Gaussa-Greena-Ostrogradskiego, uzyskując

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla \tilde{u} d\Omega = \int_{\Omega} w s d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} w h d\partial\Omega. \quad (15)$$

Równanie to stanowi sformułowanie wariacyjne modelu numerycznego w reprezentacji ciągłej. *De facto* jednak, wyłącznie w przypadku bardzo ograniczonej klasy problemów, możliwe byłoby uzyskanie rozwiązania bezpośrednio tą drogą. W praktyce, w miejsce aproksymacji globalnych, wprowadza się

aproxymacje lokalne na pewnej siatce elementów skończonych  $\Omega^e$  takich że  $\bar{\Omega} = \bigcup_e \bar{\Omega}^e \neq \emptyset$ , oraz  $\Omega^{e_1} \cap \Omega^{e_2} = \emptyset$  gdy  $e_1 \neq e_2$ , definiując w ten sposób skończone aproxymacje przestrzeni  $S(\Omega)$  i  $W(\Omega)$ , jako:

$$S^h(\Omega) = \left\{ u^h \in H_2^1(\Omega) : u|_{\Omega^e} \in P_m(\Omega^e) \forall e \text{ oraz } u^h = u_D^h \text{ dla } \partial\Omega_D \right\}, \quad (16)$$

$$W^h(\Omega) = \left\{ w^h \in H_2^1(\Omega) : w|_{\Omega^e} \in P_m(\Omega^e) \forall e \text{ oraz } w^h = 0 \text{ dla } \partial\Omega_D \right\}, \quad (17)$$

gdzie  $h$  stanowi wymiar charakterystyczny siatki  $h \geq \text{diam}(\Omega^e)$ .  $P_m(\Omega^e)$  jest przestrzenią interpolacyjną elementu skończonego, zwykle rozpinaną poprzez zbiór lokalnych funkcji kształtu skojarzonych z węzłami  $I$  elementu  $\Omega^{(e)}$

$$u^h = \Psi_\alpha U_\alpha = (\Psi_I^e \Delta_{I\alpha}^e) U_\alpha = (\Psi_I^e U_I^e \Delta_{I\alpha}^e). \quad (18)$$

Stąd otrzymujemy aproxymację globalną i lokalną równania wyjściowego

$$\int_{\Omega} \nabla \Psi_\alpha \nabla \Psi_\beta d\Omega U_\beta = \int_{\Omega} \Psi_\alpha s d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \Psi_\alpha h d\Omega, \quad (19)$$

$$\bigcup_e \int_{\Omega^e} \nabla \Psi_I^e \nabla \Psi_J^e d\Omega U_J^e \Delta_{I\alpha}^e \Delta_{J\beta}^e = \bigcup_e \int_{\Omega^e} \Psi_I^e s d\Omega \Delta_{I\alpha}^e + \bigcup_e \int_{\partial\Omega_N^e} \Psi_I^e h d\partial\Omega \Delta_{I\alpha}^e, \quad (20)$$

stanowiące sformułowanie dyskretne wyjściowego zagadnienia brzegowego.

### 3. Pola fizyczne na kompleksach symplecjalnych

Niech dany będzie pewien zbiór punktów  $\{P^\alpha\}$  przestrzeni euklidesowej  $E^p$ , reprezentujących równocześnie zbiór położeń wektora wodzącego  $\{r^\alpha\}$ . Jeżeli punkty te będą liniowo niezależne, to każdy kolejny punkt  $A \in E^p$  będzie zależny od  $\{P^\alpha\}$ , jeżeli istnieje taki ciąg  $\{\lambda_\alpha\}$ , że  $\sum_\alpha \lambda_\alpha P^\alpha = A$  oraz  $\sum_\alpha \lambda_\alpha = 1$ , a odwzorowanie jest jednoznaczne. W ten sposób podzbiór punktów przestrzeni  $E^p$  zależnych od  $\{P^\alpha\}$  możemy określić za pośrednictwem ich współrzędnych barocentrycznych  $\{\lambda_\alpha\}$ , de-

finiując w  $p$ -sympleks  $c_p$  [1, 6] Zauważmy, że  $\forall (\Omega^{(e)}, c_p^e) \text{diam}(c_p^e) = \text{diam}(\Omega^{(e)})$ , co

więcej każde dwa sympleksy identycznego wymiaru są afinicznie izomorficzne

— przez to, sympleks należy rozumieć jako uogólnienie pojęcia elementu skończonego, stosowanego w metodach numerycznych [6].

Jeżeli  $\{P^\alpha\}$  jest liniowo niezależny, to dowolny jego podzbiór, różny od zbioru pustego, również będzie liniowo niezależny, czyli będzie definiował pewien  $k$ -sympleks  $\mathbf{c}_k$   $k \leq p$ , tworząc ścianę  $\mathbf{c}_p$  (dla  $k < p$  uzyskujemy ściany właściwe). W ten sposób, przykładowo element skończony  $\bar{\Omega}^{(e)} \subset E^3$  można interpretować jako 3-sympleks  $\mathbf{c}_3^e$ , jego ściany boczne jako 2-sympleksy  $\mathbf{c}_2^i$ , krawędzie jako 1-sympleksy  $\mathbf{c}_1^j$ , a wierzchołki jako 0-sympleksy  $\mathbf{c}_0^k$ . Rodzinę sympleksów  $\{\mathbf{c}_p\}$  nazywamy kompleksem sympleksyjnym, jeżeli zawiera wszystkie sympleksy  $\mathbf{c}_i$ ,  $i \in [0, p]$  a  $\mathbf{c}_n^i \cap \mathbf{c}_n^j = \mathbf{c}_{n-1}^k$  i jest ścianą wspólną (lub zbiorem pustym  $\emptyset = \mathbf{c}_{-1}^k$ ).

Ponieważ zbiór punktów  $p$ -sympleksu możemy uporządkować na  $(p+1)!$  sposobów, daje nam to możliwość wprowadzenia orientacji sympleksów oraz zbudowanych na nich kompleksów i dyskretyzacji. Każdej parze sympleksów  $(\mathbf{c}_p^i, \mathbf{c}_{p-1}^j)$  przyporządkujemy liczbę  $\Delta_p^{i,j}$ , odpowiednio do orientacji  $\mathbf{c}_p^i$  i jego ściany właściwej  $\mathbf{c}_{p-1}^j$  [1, 6]

$$\Delta_p^{i,j} = \begin{cases} \mp 1, \text{orientacja (nie)zgodna} \\ 0, \text{w przeciwnym razie,} \end{cases} \quad (21)$$

a tablicę prostokątną  $\Delta_p$  utworzoną z liczb  $\Delta_p^{i,j}$  nazywać będziemy tablicą incydencji.

W kontekście zastosowań praktycznych niejednokrotnie zachodzi potrzeba wyróżnienia w obrębie kompleksu pewnej zbiorowości sympleksów. Jeżeli utworzymy sumę (formalną) postaci

$$n_i \mathbf{c}_p^i = \mathbf{C}_p, \quad (22)$$

w obrębie której dany  $p$ -sympleks  $\mathbf{c}_p^i$  występuje  $n_i$ -krotnie, to mówimy, że zdefiniowany został pewien  $p$ -łańcuch  $\mathbf{C}_p$ . Zauważmy, że sama idea łańcucha nawiązuje bezpośrednio do intuicyjnego określenia dziedziny poprzez sumę jej części składowych.

Szczególnym łańcuchem, o fundamentalnym znaczeniu dla sformułowań praw fizyki i modeli dyskretnych jest łańcuch brzegowy, określony operatorem [2]:

$$\{\mathbf{C}_p\} \xrightarrow{\partial} \{\mathbf{C}_{p-1}\}, \quad (23)$$

$$\partial(n_i \mathbf{c}_p^i) = n_i \partial \mathbf{c}_p^i. \quad (24)$$

Korzystając z pojęcia incydencji, łańcuch brzegowy względem  $C_p^i$  można wyznaczyć jako sumę formalną (bez sumowania względem  $p$ )

$$\partial C_p^i = \Delta_p^{i,j} c_{p-1}^j \quad (25)$$

$(n-1)$ -sympleksów  $c_{p-1}^j$  brzegowych.

O ile sympleks i definiowane za jego pośrednictwem obiekty topologiczne odzwierciedlają operacje dekompozycji dziedziny, o tyle nie dostarczają dyskretyzacji związków fenomenologicznych. Jeżeli w takim razie mamy pewien łańcuch  $C_p$ , to każdemu jego elementowi  $c_p^i$  powinna być przyporządkowana pewna wartość  $\xi^i$  pola fizycznego

$$C_p = n_i c_p^i \xrightarrow{\Xi} n_i \xi^i = \Xi, \quad (26)$$

co określa kołańcuch  $\Xi$  względem łańcucha  $C_p$  [1, 2, 6]. W takim razie można powiedzieć, że sumy całek obliczane na poszczególnych elementach skończonych w rów-

naniu (20)  $\int_{\Omega^e} \nabla \Psi_I^e \nabla \Psi_J^e d\Omega$  i  $\int_{\Omega^e} \Psi_I^e s d\Omega$  (bez sumowania względem  $e$ ) określają

wartości kołańcucha względem kolejnych sympleksów łańcucha  $C_p$  zbudowanego na elementach danej dyskretyzacji obszaru  $\Omega^p \subset E^p$ , [2, 6]. Natomiast ostatnia całka  $\int_{\partial\Omega_N^e} \Psi_I^e h d\partial\Omega$  stanowi kołańcuch względem  $\partial C_{pN} = C_{(p-1)N}$ , dla którego zadano warunek von Neumanna. Stąd równanie (20) możemy zapisać jako

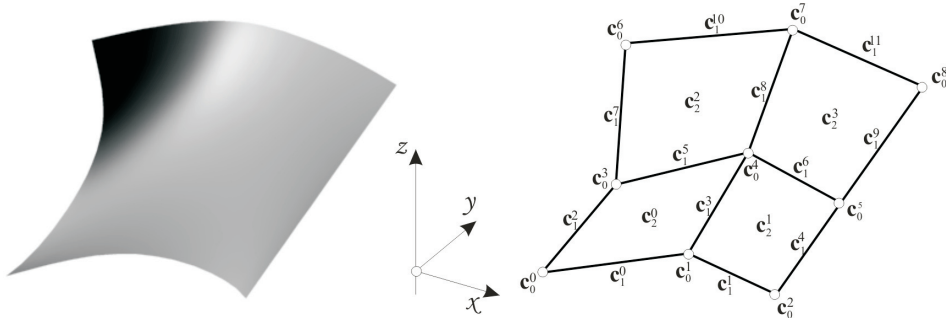
$$\langle C_p, \nabla \Psi_I^e \nabla \Psi_J^e U_J^e \rangle = \langle C_p, \Psi_I^e s \rangle + \langle \partial C_{pN}, \Psi_I^e h \rangle, \quad (27)$$

przy czym występujący po lewej stronie równania czynnik  $U_J^e$  wprowadzono tutaj wyłącznie w celu uzyskania zgodności formalnej zapisu. W sensie implementacji komputerowej będzie on stanowił odrębną macierz kolumnową niewiadomych, a pozostałe czynniki będą tworzyć macierz współczynników układu.

#### 4. Praktyczna analiza topologii siatki dyskretyzacyjnej

Wynikiem pracy każdego preprocesora jest, wśród wielu innych danych przygotowywanych dla potrzeb solwera, także informacja o topologii siatki. Informacja ta zapisywana jest zawsze w postaci tabeli określającej incydencję między elementami a węzłami. Jest to w takim razie tabela incydencji między sympleksami  $c_3^i$ ,  $c_2^i$  lub  $c_1^i$  a budującymi je  $c_0^j$ , czyli zawsze w relacji do 0-sympleksów. Na jej podstawie

możemy jednak z łatwością zrekonstruować macierze incydencji w sensie topologicznym. Rozpatrzmy elementarny przykład dyskretyzacji wycinka powierzchni poprzez 2-sympleksy, przedstawiony na rysunku.



Rys. 1. Siatka elementów powierzchniowych jako kompleks symplecjalny

Mamy tutaj 2-sympleksy  $\mathbf{c}_2^0 = (\mathbf{c}_0^0 \mathbf{c}_0^1 \mathbf{c}_0^4 \mathbf{c}_0^3)$ ,  $\mathbf{c}_2^1 = (\mathbf{c}_0^1 \mathbf{c}_0^2 \mathbf{c}_0^5 \mathbf{c}_0^4)$ ,  $\mathbf{c}_2^2 = (\mathbf{c}_0^3 \mathbf{c}_0^4 \mathbf{c}_0^7 \mathbf{c}_0^6)$ ,  $\mathbf{c}_2^3 = (\mathbf{c}_0^4 \mathbf{c}_0^5 \mathbf{c}_0^8 \mathbf{c}_0^7)$ . Bezpośrednio dostępna jest zatem macierz opisująca incydencję  $\mathbf{c}_2^i$  a  $\mathbf{c}_0^j$ , postaci

$$\Delta_2' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Jest ona o tyle nietypowa, że nie odpowiada żadnej z definicji topologicznych macierzy incydencji a dodatkowo brak tutaj informacji o orientacji sympleksów (jest to o tyle typowe dla wyniku pracy preprocessora, że orientacja nie stanowi informacji istotnej dla pracy solvera). Macierz  $\Delta_2$  incydencji kompleksów  $\mathbf{c}_2^i$  oraz  $\mathbf{c}_0^j$ , może być jednak łatwo zrekonstruowana. W tym przypadku przedstawia się następująco

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$



W podobny sposób tworzymy macierz  $\Delta_1$  incydencji sympleksów  $(\mathbf{c}_1^i, \mathbf{c}_0^j)$ .

Na tej podstawie możemy wyznaczyć — przykładowo — macierze przyległości, obliczając:

- $\Delta_2' \cdot \Delta_2'^T$ , której elementy określają przyległość między  $\mathbf{c}_3^i$  a  $\mathbf{c}_3^j$  ilością 0-sympleksów, bowiem kolejne elementy wynikowej macierzy wynoszą  $\Delta_2'^{i,k} \Delta_2'^{j,k}$ , czyli tutaj

$$\Delta_2' \cdot \Delta_2'^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

- $\Delta_2'^T \cdot \Delta_2'$  dostarcza analogicznej informacji, aczkolwiek wyraża przyległość 0-sympleksów poprzez 2-sympleksy,
- $\Delta_2 \cdot \Delta_2^T$  oraz  $\Delta_3^T \cdot \Delta_3$  opisują przyległość 2-kompleksów przez 1-kompleksy i odwrotnie,
- $\Delta_1 \cdot \Delta_1^T$  oraz  $\Delta_1^T \cdot \Delta_1$  dostarcza analogicznych informacji, aczkolwiek w odniesieniu do 1- oraz 0-kompleksów.

Praca z modelami dyskretnymi wiąże się zawsze z koniecznością selekcji pewnych podobszarów, w szczególności brzegowych, co w przypadku modeli o złożonej geometrii może być dość trudne. *De facto* jednak — przywołując podane uprzednio twierdzenie — identyfikacja łańcucha brzegowego może być przeprowadzona w sposób całkowicie automatyczny, bez konieczności jakiegokolwiek ingerencji. Gdyby rozpatrzyć ponownie przykład przedstawiony na rysunku, to brzeg obszaru tworzy łańcuch 1-kompleksów  $\Delta_2^{i,j} \mathbf{c}_1^i$ , pod warunkiem jednak, że  $\mathbf{c}_1^i$  będą zgodnie zorientowane, co niestety zwykle nie będzie miało miejsca (jeżeli będziemy wykorzystywać jako dane wyniki pracy standardowych pakietów preprocessingu). Gdyby jednak wyznaczyć iloczyn  $\mathbf{E} \cdot \Delta_2$ , to otrzymamy

$$\mathbf{E} \cdot \Delta_2 = [1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1],$$

a biorąc pod uwagę, że — w ogólności — brzeg dla  $C_p$  określa łańcuch sympleksów  $\mathbf{c}_{p-1}^i$  jednokrotnych, wynik jednoznacznie identyfikuje krawędzie brzegowe.

W równie prosty sposób możliwe do zrealizowania stają się wszelkiego rodzaju operacje remeshingu związanego z przebudową siatki czy zmiany klasy elementu skończonego. Praktyczny przykład tego rodzaju zastosowań prezentuje praca J. Stadnickiego i Z. Tokarza, dotycząca analizy odkształceń kompozytowego skrzydła samolotu [3]. Dla potrzeb symulacji materiału kompozytowego użyto tam siatki elementów belkowych (**\*BAR2**), powstałych w wyniku przebudowy elementów powierzchniowych (**\*QUAD4**). Sposób przebudowy siatki zakłada utworzenie

względem istniejącego 2-kompleksu całkowicie nowego 1-kompleksu, którego łańcuchy  $C'_1$ , mają taką orientację przestrzenną, że:

- pierwszy i ostatni sympleks  $c_0^i$  i  $c_0^n$  będzie równocześnie elementem  $c_1^j \in \partial C_2$  łańcucha brzegowego pierwotnego 2-kompleksu,
- każdy kolejny sympleks  $c_0^i$  jest wybierany wzdłuż kierunku przekątnej bieżącego  $c_2^j$ , co zapewnia zgodną orientacją wyjściowego 2-kompleksu (indukowana dowolnym  $c_2^k \in C_2$ ),
- kolejny sympleks  $c_2^j$  jest wybierany w taki sposób, że odpowiadający im element tablicy przyległości  $\Delta_2' \cdot \Delta_2'^T$  jest równy jedności.

Szkieletowy kod źródłowy w języku C generujący łańcuchy nowego kompleksu przedstawia zamieszczony listing. Przyjęto tutaj, że siatka zawiera  $E$  elementów,  $V$  węzłów,  $Ebf$  i  $Vbf$  są tablicami znaczników (1 jeżeli sympleks brzegowy, 0 w przeciwnym razie),  $EE$  jest tablicą przyległości  $\Delta_2' \cdot \Delta_2'^T$ .

```
for (eo=0; eo<E; eo++)
{
  if (!*(Ebf+eo)) {continue;}
  for (no=0; no<N; no++)
  {
    vo=(I+N*eo+no); if (!*(Vbf+vo)) {continue;}
    e1=eo; v1=vo; n1=no; printf(",%8lu",v1);
    do
    {
      n2=(n1+2)%N; v2=(I+N*e1+n2); printf("%8lu",v2);
      for (e2=0; e2<E; e2++) {if (*(EE+E*e1+e2)=
      =1&&*(EV+V*e2+v2)) {break;}}
      e1=e2; v1=v2;
      for (n1=0; n1<N; n1++) {if *(I+N*e1+n1)=v1) {break;}}
    }while (!*(Vbf+v2));
    printf("\n");
  }
}
```

Na podstawie nowoutworzonych łańcuchów  $C'_1$  można, w dalszej kolejności, zbudować struktury opisujące dyskretyzację belkową.

## 5. Podsumowanie

Użycie metod komputerowych dla zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych łączy się, praktycznie nierozzerwalnie, z koniecznością pracy z modelami dyskretnymi geometrii. O ile dostępne aktualnie narzędzia preprocessingu skutecznie generują same siatki, o tyle dalsze ich modyfikacje są raczej bardzo trudne, a przecież częstokroć niezbędne.

W pracy tej zaprezentowano bezpośrednie analogie, jakie występują między sformułowaniami modeli skończenie elementowych a pewnymi formalizmami i obiektami definiowanymi na gruncie topologii algebraicznej. Mają one dwojaki rodzaj aspekt: dyskretyzacji dziedziny oraz dyskretyzacji relacji określających model fenomenologiczny. Pierwszemu z nich można nadać interpretację i uogólnienie w postaci kompleksu symplecjoidalnego i definiowanych na nim łańcuchach. Natomiast drugi, stowarzyszony z nim, znajduje odzwierciedlenie w postaci kołańcucha względem łańcuchów kompleksu. Jako ilustrację, przytoczono tutaj elementarne przykłady, które prezentują pewne możliwości tkwiące w takiej właśnie interpretacji modelu dyskretnego, powstałego na gruncie metody elementów skończonych.

Artykuł wpłynął do redakcji 5.03.2008 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w maju 2008 r.

### LITERATURA

- [1] Y. ELIASHBERG, L. TRAYNOR (eds.), *Symplectic Geometry and Topology*, American Mathematical Society, New York, 2006.
- [2] C. MATTIUSI, *An Analysis of Finite Volume, Finite Element, and Finite Difference Methods Using Some Concepts from Algebraic Topology*, J. Comput. Phys., 133, 1997, 289-309.
- [3] J. STADNICKI, Z. TOKARZ, *Analiza odkształceń kompozytowego skrzydła samolotu*, XII Szkoła komputerowego wspomaganie projektowania, wytwarzania i eksploatacji, Jurata, 12-16 maja 2008, 105-112.
- [4] E. TONTI, *A Mathematical Model for Physical Theories. Nota I*, Rend. Accad. Lincei, Serie VIII, 52, 1972, 175-181.
- [5] E. TONTI, *A Direct Discrete Formulation of Field Laws: The Cell Method*, CMES, vol. 1, no. 1, 2001, 11-26.
- [6] A. H. WALLACE, *Algebraic Topology: Homology and Cohomology*, Dover Publications, New York, 2007.

K. MIROTA

### Topological structure of finite element models of continuum mechanics

**Abstract.** One of a most crucial stage in formulation of simulation task is domain discretisation. The main focus of this work lies in connections between discretisations and certain types of topological

formalism. They provide a robust method of mesh connectivity analysis, which may be applied in modification and remeshing.

**Keywords:** simplex, chain, cochain, incidence, adjacency, remeshing, mechanics of continuous media

**Universal Decimal Classification:** 531.111.4