

Sterowanie układem lewitacji magnetycznej w warunkach zakłóceń stochastycznych

Mikołaj Mrotek, Adrian Szymankiewicz, Jacek Michalski, Piotr Koziński

Politechnika Poznańska, Wydział Automatyki, Robotyki i Elektrotechniki, Instytut Robotyki i Inteligencji Maszynowej, Zakład Automatyki i Optymalizacji, ul. Piotrowo 3a, 60-965 Poznań

Streszczenie: W niniejszej pracy przedstawiono możliwość zredukowania wpływu zakłóceń stochastycznych na jakość regulacji dzięki estymacji stanu z wykorzystaniem algorytmu rozszerzonego filtru Kalmana. Przeprowadzono eksperymenty na laboratoryjnym układzie lewitacji magnetycznej firmy Inteco, którego model matematyczny jest nieliniowy. Przyjęto metodę sterowania z użyciem wektora stanu i algorytmem lokowania biegunów dla modelu zlinearyzowanego w wybranym punkcie pracy. Dla różnych poziomów zaszumienia sygnału pomiarowego zbadano działanie układu ze sprzężeniem zwrotnym od stanu mierzonego oraz estymowanego. W celu oceny regulacji, dla obu realizacji sprzężenia dokonano weryfikacji jakości działania algorytmu. Porównano otrzymane przebiegi czasowe każdej zmiennej stanu oraz obliczone, całkowite wskaźniki jakości bazujące na uchybie regulacji. Jakość estymacji oceniono na podstawie wskaźnika błędu średniokwadratowego oraz bazującego na błędach estymacji i pomiarów. Syntezy regulatora dokonano na podstawie modelu ciągłego, a następnie wyznaczono jego postać dyskretną w celu numerycznej implementacji algorytmu rozszerzonego filtru Kalmana. Dokonano synchronizacji bloków wykonawczych z wybranym okresem próbkowania. Wyniki przeprowadzonych badań pozwalają wnioskować o przewadze regulacji w układzie, w którym brana jest informacja o wektorze stanu z estymacji, w porównaniu z bezpośrednim sprzężeniem zwrotnym bez filtracji Kalmana.

Słowa kluczowe: układ lewitacji magnetycznej, modelowanie, rozszerzony filtr Kalmana, estymacja stanu, sprzężenie od stanu

1. Wprowadzenie

W starożytności wymyślano, jak dostarczyć rozrywkę publiczności lub gościom, a lewitująca kula bez wątpliwości miała potencjał zapewnienia jej. Ze względu na ówczesny brak powszechnej edukacji, unoszenie się kuli bez jej powierzchniowego kontaktu z innym ciałem mogłoby wydawać się zjawiskiem nadprzyrodzonym. Niewątpliwie spotkałoby się to z ogromnym zainteresowaniem. Obecnie zjawisko lewitacji używane jest na przykład w transporcie kolejną magnetyczną [13].

W dzisiejszej automatyce wciąż rozwijane są badania nad sterowaniem oraz estymacją stanu w obiektach nieliniowych, spotykanych często w praktyce. Przykładem takiego systemu może być układ lewitacji magnetycznej MLS (ang. *Magnetic Levitation System*). Umieszczoną między elektromagnesami

ferromagnetyczną kulą tak, aby lewitowała, można sterować na wiele sposobów. Eksperymenty na wspomnianym układzie, który został wykorzystany w tej pracy, są szeroko rozpropagowane. W pracy [1] wykorzystano klasyczny regulator PID. W literaturze można znaleźć również badania wykorzystujące kilka jego wariantów: regulator PD z aproksymacją bazującą na DIPDT (ang. *Double-Integrator Plus Dead-Time*) [4], regulator PID połączony z regulatorem kompensacji rozmytej [14], czy połączenie PID z regulatorem ślizgowym SMC (ang. *Sliding Mode Control*) [22]. Przy projektowaniu metod sterowania wykorzystywano również sieci neuronowe NN (ang. *Neural Networks*) [15, 6] oraz regulator TID (ang. *Tilt-Integral-Derivative*) zoptymalizowany za pomocą algorytmu genetycznego GA (ang. *Genetic Algorithm*) [20]. W pracy [10] porównano kilka metod regulacji, w tym sterowanie optymalne liniowo-kwadratowe LQR (ang. *Linear-Quadratic Regulator*) z użyciem wektora stanu.

Informację pomiarową można poprawić wykorzystując estymację stanu. Istnieje wiele algorytmów pozwalających na odfiltrowanie szumów pomiarowych i odtworzenie stanu wewnętrznego, począwszy od estymacji statycznej metodą ważonych najmniejszych kwadratów WLS (ang. *Weighted Least Squares*) [16]. Jest to metoda stosunkowo prosta w realizacji, ale mniej dokładna od algorytmów dynamicznych, np. jak filtr Kalmana [11] zaproponowany w 1960 r. dla układów liniowych.

Autor korespondujący:

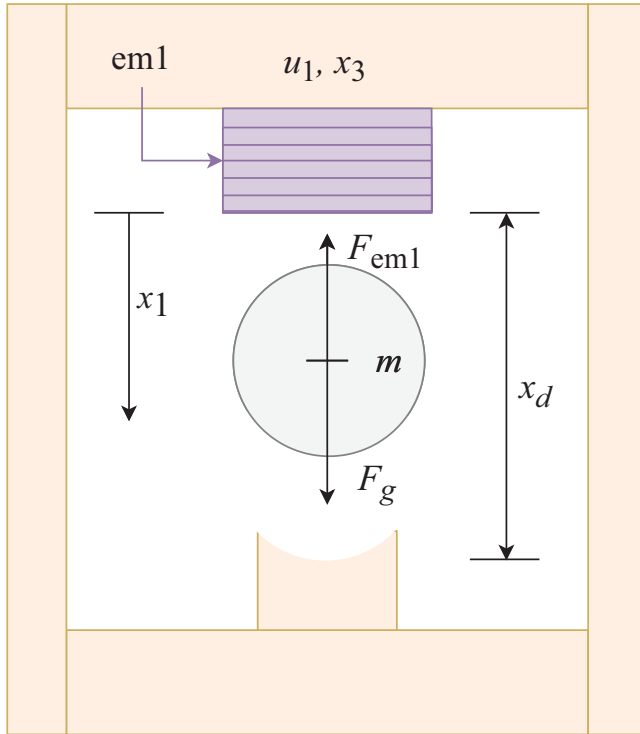
Mikołaj Mrotek, mikolaj.mrotek@interia.pl

Artykuł recenzowany

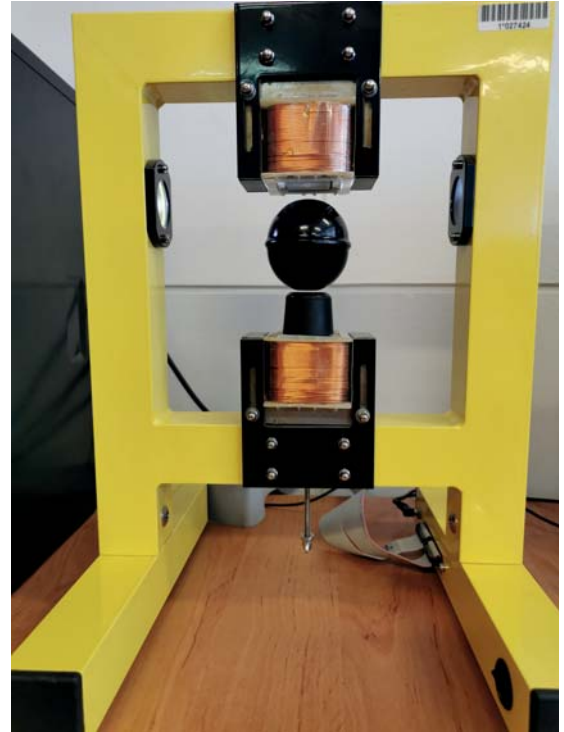
nadesłany 10.08.2022 r., przyjęty do druku 12.09.2022 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0



Rys. 1. Od lewej: rzut pionowy oraz zdjęcie stanowiska laboratoryjnego
Fig. 1. From the left: sectional section and photo of the laboratory stand



W problemach sterowania układami nieliniowymi można spotkać się z użyciem algorytmu rozszerzonego filtru Kalmana EKF (ang. *Extended Kalman Filter*). Jest to metoda przeznaczona dla obiektów nieliniowych, wykorzystująca ich aproksymację w punkcie pracy. W literaturze można znaleźć wiele odmian metod estymacji, które wciąż są powszechnie rozwijane do różnych zastosowań. W pracy [19], na obiekcie MLS, przy dostępie do pomiaru wyłącznie położenia, odtworzono pełny stan realizując algorytm EKF. Umożliwiło to zastosowanie regulatora bazującego na sprzężeniu od stanu. Inne algorytmy stosowane do estymacji stanu opisane zostały w pracach [17, 18, 21] – są to między innymi filtry hybrydowe, wykorzystujące jednocześnie w każdej iteracji różne rodzaje filtracji Kalmana, czy też filtry cząsteczkowe.

Estymacja stanu, poza wymienionymi zastosowaniami (możliwości odszumienia pomiarów, czy odtworzenia wektora stanu bazując na dostępie do pomiarów nie wszystkich jego składowych), stosowana jest także w sterowaniu systemem sieci elektroenergetycznej, w celu zmniejszenia kosztów pomiarów, telemetrii oraz poprawienia bezpieczeństwa systemu i dokładności danych [12]. W literaturze spotykana jest również aplikacja estymacji stanu w przewidywaniu trajektorii/śledzeniu celu m.in. za pomocą czujników pasywnych (pomiarów zawierają informacje jedynie o kątach w polu widzenia) [5] oraz zaawansowanemu zarządzaniu akumulatorami – maksymalizowaniu ich efektywności energetycznej, gdzie skuteczne szacowanie stanów wewnętrznych jest kluczowe [8].

W niniejszej pracy zaimplementowano sterowanie rzeczywistym obiektem oparte na wektorze stanu z algorytmem lokowania biegunów. Wykorzystano nieliniowy model obiektu dla wyznaczonych parametrów stanowiska. Ze względu na nieliniowość oraz strukturalną niestabilność uzyskanie dopasowanego modelu nie było łatwym zadaniem, a testy przeprowadzono tylko w układzie zamkniętym. Uzyskano wystarczającą dokładność modelu matematycznego, co uwarunkowało możliwość zastosowania tej metody sterowania. Zbadany został wpływ wariacji stochastycznych zakłóceń pomiarowych na działanie regulatora, przy odfiltrowaniu szumów za pomocą EKF. Według najlepszej wiedzy autorów, w pracach nie rozpa-

trzone dotychczas takiego problemu. W praktyce przedstawiona w pracy estymacja stanu może okazać się użyteczna w przypadku uszkodzenia urządzeń pomiarowych układu lub wystąpienia zakłóceń zewnętrznych uwarunkowanych specyfiką usytuowania stanowiska laboratoryjnego.

W rozdziale drugim przedstawiono matematyczny opis obiektu w postaci nieliniowych równań stanu, zestaw parametrów i ograniczeń wynikających z jego budowy, oraz metodę linearyzacji statycznej modelu. W kolejnej części pracy (rozdział trzeci) został opisany algorytm rozszerzonego filtru Kal-

Tabela 1. Symbole użyte w artykule

Table 1. Symbols used in the article

Symbol	Wyjaśnienie
$\underline{x} = \underline{x}(t)$	wektor stanu w chwili t
x_i	i -ta zmienna stanu
$\dot{\underline{x}} = \frac{d\underline{x}}{dt}$	pochodna po czasie wektora stanu
\underline{x}^+	wektor stanu wartości wzorcowych
$\hat{\underline{x}}$	estymata wektora stanu
\underline{y}	wektor pomiarowy (zaszumiony)
u	sygnał sterujący
$\underline{x}(k)$	(opis dyskretny) wektor stanu w próbie k -tej
$f(\cdot), f_d(\cdot)$	funkcja przejścia (ciągła i dyskretna)
$h(\cdot), h_d(\cdot)$	funkcja pomiarowa (ciągła i dyskretna)
r	wartość zadana położenia
\underline{v}	wektor zakłóceń wewnętrznych
\underline{z}	wektor stochastycznych zakłóceń pomiarowych
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	rozkład normalny o wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2

mana, wraz z jego realizacją jako blok funkcyjny w środowisku Simulink. Dobrano również parametry macierzy kowariancji szumów dla badanego układu. W rozdziale czwartym opisano przyjętą metodę sterowania oraz wyprowadzono końcowe równanie na sygnał sterujący. W rozdziale piątym przedstawiono wybrane, w celu liczbowej oceny wyników eksperymentów, wskaźniki jakości dla regulacji oraz estymacji. Rozdział szósty zawiera wyniki badań – wartości wskaźników jakości oraz przebiegi czasowe zmiennych stanu i sygnału sterującego sporządzone na podstawie otrzymanych pomiarów eksperymentalnych. Zamieszczono w tym rozdziale także wnioski do wyników. W rozdziale siódmym praca została podsumowana i zredagowano uwagi końcowe.

Na rys. 1 przedstawiono rzut pionowy stanowiska, na którym zostały przeprowadzone badania, oraz jego zdjęcie. Na grafice po lewej stronie pominięto dolny elektromagnes ze zdjęcia, ponieważ przyjęto sterowanie z użyciem wyłącznie górnego – magnesu em1 (ang. *electromagnet*). Najważniejsze symbole stosowane w artykule wyjaśniono w tab. 1.

2. Opis układu w postaci modelu matematycznego

2.1. Nieliniowy model obiektu

Badany obiekt może zostać opisany przez nieliniowe równania stanu, wyprowadzone z podstawowych zasad oraz zależności fizycznych dla kuli poruszającej się w polu magnetycznym. Matematyczny opis obiektu bazuje na równaniach Lagrange'a i został podany przez producenta [23] oraz poprawiony w pracy [2] na podstawie [3]. Warto zaznaczyć, że oprócz silnej nieliniowości, obiekt regulacji jest też z natury niestabilny [2].

Równania stanu mają postać (przy zmiennych zależnych od czasu, w domyśle pominięto zapis (t)):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_3^2 \frac{1}{2m} \frac{F_{\text{emP1}}}{F_{\text{emP2}}} \exp\left(\frac{-x_1}{F_{\text{emP2}}}\right) + g \\ \dot{x}_3 = \frac{f_2}{f_1} \exp\left(\frac{x_1}{f_2}\right) (k_i u_1 + c_i - x_3) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

W celu dyskretnej realizacji rozszerzonego filtru Kalmana, równania stanu dane przez (1) zdyskretyzowano metodą eks-

trapolacyjną Eulera δ^+ (zakładając T_p jako okres próbkowania), w rezultacie czego otrzymano postać:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + T_p x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + T_p \left(g - x_3^2(k) \frac{1}{2m} \frac{F_{\text{emP1}}}{F_{\text{emP2}}} \exp\left(\frac{-x_1(k)}{F_{\text{emP2}}}\right) \right) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + T_p \frac{f_2}{f_1} \exp\left(\frac{x_1(k)}{f_2}\right) (k_i u_1(k) + c_i - x_3(k)) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases} \quad (2)$$

W równaniach (1) i (2) występują następujące zmienne stanu oraz sterowanie: x_1 – położenie kuli, $x_2 = \dot{x}_1$ – prędkość kuli, x_3 – prąd płynący przez górną cewkę, u_1 – sygnał sterujący górnego elektromagnesu.

W tab. 2 podano współczynniki występujące w równaniach (1) oraz (2). Dane z kol. 2. (wartość producenta) wynikają z dokumentacji Inteco [23]. W skład stanowiska wchodzi trzy kule o różnych masach oraz średnicach (duża, średnia, mała). Z racji, że eksperymenty przeprowadzono z użyciem średniej kuli, a w dokumentacji producenta zostały podane parametry (masa, średnica) dużej, pominięto te wartości. Wynikowo pominięto również pierwotną wartość parametru x_d , ponieważ zależy ona od średnicy średniej kuli, która nie została podana. Z kolei po dokonaniu pomiarów na stanowisku, zgodnie z metodyką zaproponowaną w [2], otrzymano poprawione wartości parametrów, które zestawiono w kol. 3. (po korekcie).

Model matematyczny cechujący ograniczenia wynikające z budowy obiektu:

$$\begin{cases} 0 & \leq x_1 \leq x_d & [\text{m}], \\ 3,8840 \cdot 10^{-2} & \leq x_3 \leq 2,3800 \cdot 10^0 & [\text{A}], \\ 0 & \leq u_1 \leq 1 & [/]. \end{cases} \quad (3)$$

Pełny opis obiektu zawiera również prąd płynący przez dolną cewkę (czwarta zmienna stanu) [9], który afektuje na drugie równanie stanu. Wynikałoby z tego obecność drugiego wymuszenia u_2 , sterującego cewką dolną. W przeprowadzonych badaniach nie używano jednak tego sygnału, dlatego pominięto wpływ wymienionego prądu. Bazowano na sterowaniu jedynie górnym elektromagnesem.

Tabela 2. Parametry modelu lewitacji

Table 2. Parameters of levitation model

Parametr	Wartość producenta	Po korekcie	Jednostka	Opis
m	—	$5,3000 \cdot 10^{-2}$	kg	masa średniej kuli
g	$9,8100 \cdot 10^0$	$9,8100 \cdot 10^0$	m/s ²	przyspieszenie ziemskie
F_{emP1}	$1,7521 \cdot 10^{-2}$	$3,5969 \cdot 10^{-2}$	H	indukcyjność cewki górnego magnesu
F_{emP2}	$5,8231 \cdot 10^{-3}$	$5,2356 \cdot 10^{-3}$	m	stała konstrukcyjna
f_1	$1,4142 \cdot 10^{-4}$	$1,4142 \cdot 10^{-4}$	ms	stała konstrukcyjna
f_2	$4,5626 \cdot 10^{-3}$	$4,5626 \cdot 10^{-3}$	m	stała konstrukcyjna
k_i	$2,5165 \cdot 10^0$	$2,6000 \cdot 10^0$	A	stała konstrukcyjna
c_i	$2,4300 \cdot 10^{-2}$	$-4,4400 \cdot 10^{-2}$	A	stała konstrukcyjna
d	$7,5000 \cdot 10^{-2}$	$6,6000 \cdot 10^{-2}$	m	odległość między elektromagnesami
b_d	—	$5,5500 \cdot 10^{-2}$	m	średnica średniej kuli
x_d	—	$1,0500 \cdot 10^{-2}$	m	$d - b_d$

2.2. Linearyzacja statyczna modelu

W celu implementacji algorytmu EKF oraz zaprojektowania sterowania z lokowaniem biegunów, dokonano linearyzacji statycznej modelu danego równaniem, odpowiednio (1) przy realizacji ciągłej lub (2) w przypadku realizacji dyskretnej. Linearyzacji w punkcie pracy dokonano przy użyciu Jakobianu.

Zapisano prawą stronę równania (1) jako wektor funkcji przejść oraz funkcję wyjściową:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, u) \\ y = h(\underline{x}) \end{cases}, \quad (4)$$

gdzie $\underline{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $\underline{f}(\underline{x}, u) = [f_1(\underline{x}, u) \ f_2(\underline{x}, u) \ f_3(\underline{x}, u)]^T$.

Dokonano linearyzacji zgodnie z zależnościami (5). Jest ona liniową aproksymacją zachowania nieliniowego obiektu w zdefiniowanym punkcie pracy $\underline{x}_0 = [x_{10}, x_{20}, x_{30}]^T$, zatem można zapisać macierze i wektory dla danego układu:

$$\mathbf{A} \approx \nabla \underline{f} \Big|_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{\underline{x}_0, u_0}, \quad \underline{b} \approx \nabla \underline{f} \Big|_{u_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} \end{bmatrix}_{\underline{x}_0, u_0},$$

$$\underline{c} \approx \nabla h \Big|_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{\underline{x}_0, u_0}, \quad (5)$$

gdzie: \mathbf{A} – macierz stanu, \underline{b} – wektor sterowań, \underline{c} – wektor pomiarowy, u_{10} – wartość sterowania w punkcie pracy.

Mając wyznaczone \mathbf{A} , \underline{b} oraz \underline{c} można zapisać równania stanu w postaci:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \mathbf{A}\underline{x} + \underline{b}u_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{31} \end{bmatrix} u_1 \\ y = \underline{c}^T \underline{x} = [1 \ 0 \ 0] \underline{x} \end{cases}, \quad (6)$$

gdzie:

$$a_{21} = \frac{1}{2m} x_{30}^2 \frac{F_{\text{emP1}}}{F_{\text{emP2}}^2} \exp\left(\frac{-x_{10}}{F_{\text{emP2}}}\right),$$

$$a_{23} = -\frac{1}{m} x_{30} \frac{F_{\text{emP1}}}{F_{\text{emP2}}} \exp\left(\frac{-x_{10}}{F_{\text{emP2}}}\right),$$

$$a_{31} = \frac{1}{f_1} \exp\left(\frac{x_{10}}{f_2}\right) (k_i u_{10} + c_i - x_{30}),$$

$$a_{33} = -\frac{f_2}{f_1} \exp\left(\frac{x_{10}}{f_2}\right),$$

$$b_{31} = k_i \frac{f_2}{f_1} \exp\left(\frac{x_{10}}{f_2}\right).$$

Na etapie równań i linearyzacji statycznej modelu jako wyjście podano jedynie pomiar położenia, ponieważ jest ono wielkością sterowaną. W algorytmie EKF wzięto natomiast pod uwagę pełną informację pomiarową, co ukazuje równanie (7) z kolejnego rozdziału – funkcja wyjściowa $h(\cdot)$ z (4) została zastąpiona wektorem funkcji wyjściowych.

3. Rozszerzony filtr Kalmana

3.1. Opis algorytmu

Rozszerzony filtr Kalmana jest algorytmem estymacji stanu przeznaczonym do obiektów danych nieliniowymi, dyskretnymi równaniami stanu. Podczas eksperymentu na obiekcie, możliwe jest odtworzenie informacji o stanie, a zarazem odszumienie pomiarów. Zakłada się znajomość modelu matematycznego obiektu, w tym przypadku danego równaniem (2). Wyznaczono analogiczny zapis równania modelu dyskretnego do (4) z uwzględnieniem szumów wewnętrznych $\underline{v}(k)$ oraz pomiarowych $\underline{z}(k)$. Zakłada się również, że zakłócenia pomiarowe opisuje rozkład normalny. Przy pracy na obiekcie korzystano z pełnej informacji pomiarowej, więc jego wyjście stanowi wektor \underline{y} zawierający pomiar każdej zmiennej stanu, czyli $h_{di}(\underline{x}(k)) = x_i(k)$. Otrzymano zatem:

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{f}_d(\underline{x}(k), u(k)) + \underline{v}(k) \\ \underline{y}(k) = \underline{h}_d(\underline{x}(k)) + \underline{z}(k) \end{cases}. \quad (7)$$

Algorytm EKF dzieli się na etap aktualizacji czasu, w którym dokonywana jest predykcja stanu w kroku k -tym aktualizowana na podstawie modelu oraz estymaty z kroku poprzedniego. Drugim etapem jest aktualizacja pomiarów (filtracja), która służy do poprawy wartości zmiennych stanu na podstawie danych pomiarowych. Obliczana jest macierz wzmocnień Kalmana \mathbf{K} , która określa zaufanie wobec estymaty lub wobec pomiarów. W kolejnym etapie wyznaczana jest estymata, czyli predykcja stanu skorygowana o iloczyn wzmocnienia Kalmana i błędów pomiarów. Równania (8)–(12) przedstawiają działanie algorytmu EKF [18].

Równania etapu predykcji (aktualizacji czasu):

$$\hat{\underline{x}}(k | k-1) = \underline{f}_d(\hat{\underline{x}}(k-1 | k-1), \underline{u}(k-1)), \quad (8)$$

$$\mathbf{P}(k | k-1) = \mathbf{F}(k-1) \mathbf{P}(k-1 | k-1) \mathbf{F}^T(k-1) + \mathbf{Q}. \quad (9)$$

Równania etapu filtracji (aktualizacji pomiarów):

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k | k-1) \mathbf{H}^T(k) (\mathbf{H}(k) \mathbf{P}(k | k-1) \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R})^{-1}, \quad (10)$$

$$\hat{\underline{x}}(k | k) = \hat{\underline{x}}(k | k-1) + \mathbf{K}(k) (\underline{y}(k) - \underline{h}_d(\hat{\underline{x}}(k | k-1))), \quad (11)$$

$$\mathbf{P}(k | k) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k)) \mathbf{P}(k | k-1), \quad (12)$$

gdzie:

$\hat{\underline{x}}(k | k-1)$ – wektor stanu znany *a priori* (na podstawie modelu),
 $\hat{\underline{x}}(k | k)$ – estymowana wartość wektora stanu z aktualnego kroku,
 $\mathbf{P}(k | k-1)$ – macierz kowariancji wektora $\hat{\underline{x}}(k | k-1)$,
 $\mathbf{P}(k | k)$ – macierz kowariancji wektora $\hat{\underline{x}}(k | k)$,
 $\mathbf{F}(k-1) \approx \nabla \underline{f}_d \Big|_{\hat{\underline{x}}(k-1|k-1)}$ – Jakobian wyznaczony na podstawie dyskretnych równań stanu,
 $\mathbf{K}(k)$ – macierz wzmocnień Kalmana,
 $\mathbf{H}(k) \approx \nabla \underline{h}_d \Big|_{\hat{\underline{x}}(k|k-1)}$ – macierz wyjść,
 \mathbf{R} – macierz kowariancji szumów pomiarowych,
 \mathbf{Q} – macierz kowariancji szumów wewnętrznych,
 \mathbf{I} – macierz jednostkowa.

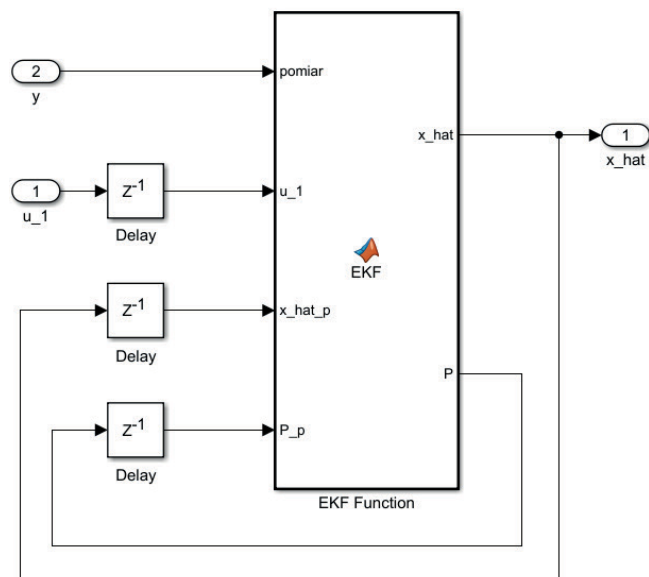
3.2. Implementacja algorytmu

Pomiar wszystkich zmiennych stanu implikuje wymiar 3×3 macierzy \mathbf{I} , \mathbf{R} oraz \mathbf{Q} . Ze względu na liniowość funkcji wyjściowych h_i , gdzie funkcje pomiarowe są kolejnymi zmiennymi stanu, $\mathbf{H} = \mathbf{I}$. Macierze kowariancji \mathbf{R} i \mathbf{Q} są macierzami diagonalnymi. Na ich przekątnych należy zdefiniować wariancje szumów odpowiednio pomiarowych oraz wewnętrznych dla poszczególnych zmiennych stanu. Wartości wariancji szumów dobrano eksperymentalnie, na podstawie obserwacji zbieżności śladu macierzy kowariancji \mathbf{P} do zera. Przyjęto ostatecznie:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5,0000 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 2,0000 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 5,0000 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1,2000 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 1,2000 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 1,2000 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

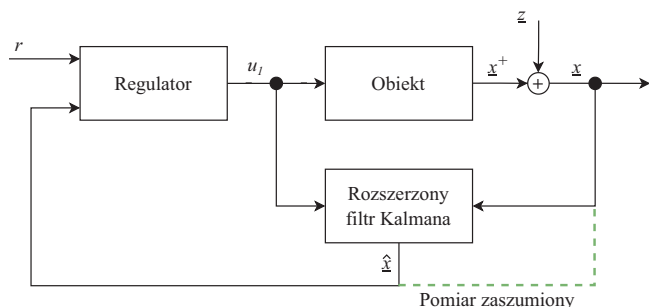
Zmniejszając wartości na wybranym miejscu diagonal \mathbf{R} , zwiększa się zaufanie względem odpowiedniego pomiaru. Analogicznie zmniejszając wartości na wybranym miejscu diagonal macierzy \mathbf{Q} , zwiększa się zaufanie do odpowiadającej mu zmiennej stanu z modelu obiektu. Jeżeli model matematyczny obiektu jest wystarczająco dokładny, istnieje możliwość otrzymania estymaty pomiarów o mniejszej amplitudzie przenoszonych szumów przez zmniejszenie śladu macierzy \mathbf{Q} oraz zwiększenie śladu macierzy \mathbf{R} . Zwykle należy wybrać pewien kompromis między zaufaniem do modelu oraz pomiarów.

W układzie sterowania obiektem zrealizowano blok pełniący funkcję EKF (rys. 2). Zaimplementowano dyskretne równania



Rys. 2. Schemat realizacji bloku EKF w środowisku Simulink

Fig. 2. EKF block diagram realized in the Simulink



Rys. 3. Schemat blokowy rozpatrywanego układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym od EKF (zielonym kolorem zaznaczono alternatywną drogę sprzężenia w realizacji od pomiaru, z pominięciem EKF)

Fig. 3. Block diagram of the considered control system with feedback from EKF (green colour indicates other way of feedback – directly from measurement)

modelu (2) oraz algorytm dany równaniami (8)–(12) z uwzględnionymi rozmiarami i wartościami macierzy \mathbf{H} , \mathbf{R} i \mathbf{Q} . Wykorzystano w tym celu blok MATLAB Function. Przez y oznaczono wektor pomiarowy, natomiast u_1 to sygnał sterujący z bieżącego kroku. Jako x_hat oznaczono estymatę wektora stanu, przetwarzaną przez EKF, a zmienna P to macierz kowariancji wektora estymowanego z bieżącego kroku. W celu oznaczenia sygnałów lub macierzy z poprzedniego kroku, dodano sufix $_p$ do ich nazwy z wyjścia. Opóźnienie sygnałów zrealizowane zostało przez bloki Delay.

4. Sterowanie obiektem

4.1. Sterowanie ze sprzężeniem od stanu oraz lokowaniem biegunów

Celem projektowanego sterowania było wygenerowanie takiego współczynnika wypełnienia sygnału napięcia podawanego górnej cewce PWM (ang. *Pulse Width Modulation*), aby wskutek płynącego przez nią prądu wywołać siłę przyciągania F_{em1} równoważącą ciężar kuli w zadanym położeniu (rys. 1).

W badaniach przyjęto sterowanie oparte na sprzężeniu od stanu z algorytmem lokowania biegunów. Porównano zachowanie układu dla dwóch sposobów realizacji sprzężenia zwrotnego. Na rys. 3 przedstawiono realizację z estymowanym stanem przez algorytm EKF oraz od zaszumionych pomiarów (oznaczone linią przerywaną). Ze względu na dostęp pomiarowy do wszystkich zmiennych stanu, na rysunku wykorzystano symbol \underline{x} według konwencji oznaczeń z tab. 2.

4.2. Prawo sterowania

Przyjęto ogólne prawo sterowania dane równaniem:

$$u = -\underline{k}^T \underline{x} + \mu, \quad (14)$$

które implikuje powstanie nowej macierzy stanu. Założono powyższe prawo (14) ze względu na wykorzystanie pełnej informacji o stanie do stałowartościowej regulacji obiektem lewitacji magnetycznej z redukcją szumów, zważywszy na dostęp do dokładnego modelu matematycznego obiektu. Po podstawieniu wyrażenia (14) do wzoru (6) otrzymano:

$$\dot{\underline{x}} = (\mathbf{A} - \underline{b} \underline{k}^T) \underline{x} + \underline{b} \mu, \quad (15)$$

gdzie:

$(\mathbf{A} - \underline{b} \underline{k}^T) = \mathbf{A}_1$ – macierz procesu dla układu zamkniętego, \underline{k} – wektor wzmocnień sprzężenia od stanu, μ – składowa sygnału sterującego zapewniająca jednostkowe wzmocnienie statyczne układu zamkniętego.

W celu obliczenia wektora wzmocnień sprzężenia od stanu przyjęto algorytm lokowania biegunów. Potrzebny jest wielomian charakterystyczny macierzy procesu oraz zestaw zadanych wartości własnych (biegunów). Wielomian charakterystyczny macierzy procesu wyznaczono z zależności $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) = 0$ i otrzymano:

$$s^3 + (b_{31}k_3 - a_{33})s^2 + (a_{23}b_{31}k_2 - a_{21})s + (a_{23}(b_{31}k_1 - a_{31}) - a_{21}(b_{31}k_3 - a_{33})) = 0. \quad (16)$$

Wartości parametrów a_{ij} (gdzie i jest numerem wiersza, a j numerem kolumny) z równania (6) zależą od zdefinio-

wanego punktu pracy. Przyjęto zadane położenie x_{10} , w celu wyznaczenia wektora stanu dla punktu równowagi przyrównano pochodne zmiennych stanu z (1) do zera. Następnie, po rozwiązaniu układu równań wyznaczono analityczną zależność na wektor stanu w punkcie równowagi zdefiniowany zadany położeniem $r = x_{10}$:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{2mgF_{\text{emP2}}}{F_{\text{emP1}} \exp\left(\frac{x_{10}}{F_{\text{emP2}}}\right)}} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Na podstawie wektora stanu w punkcie równowagi (17) oraz przyrównanych pochodnych zmiennych stanu do zera, wyznaczono wartość sygnału sterującego podtrzymania u_{10} z zależności:

$$u_{10} = \frac{x_{30} - c_i}{k_i}. \quad (18)$$

Dla wszystkich eksperymentów przyjęto jednakowe wartości składowych wektora własnych macierzy procesu: $s_1 = -41$, $s_2 = -50$, $s_3 = -220$. Wartości biegunów dobrano kierując się pożądanym brakiem oscylacji oraz uzyskaniem zadowalającego czasu regulacji. Na ich podstawie otrzymano wielomian charakterystyczny pożądanej macierzy stanu:

$$s^3 + 311s^2 + 22\,070s + 451\,000 = 0. \quad (19)$$

W każdym z przeprowadzonych eksperymentów zadano tę samą wartość położenia kuli w stanie ustalonym, tj. $r = x_{10} = 7,5000 \cdot 10^{-3}$ [m]. Zadane położenie implikuje wektor stanu w punkcie równowagi o składowych $\underline{x}_0 = [7,5000 \cdot 10^{-3} \ 0 \ 8,0160 \cdot 10^{-1}]^T$ oraz wartość sygnału sterującego podtrzymania $u_{10} = 3,2540 \cdot 10^{-1}$.

Po przyrównaniu współczynników wielomianów charakterystycznych danych równaniami (16) oraz (19) wyznaczono wartości składowych wektora $\underline{k} = [k_1 \ k_2 \ k_3]^T$. Wektor wzmocnień sprzężenia od stanu wynika z zadanego położenia oraz biegunów i ostatecznie wynosi $\underline{k} = [-9,7290 \cdot 10^1 \ -2,2535 \cdot 10^0 \ 3,3180 \cdot 10^{-1}]^T$.

Do ostatecznego prawa sterowania należy wyznaczyć zależność na sygnał μ , zapewniający stabilizację zmiennych stanu na założonych wartościach. W tym celu skorzystano z uchybów zmiennych: $u_1 - u_{10} = -\underline{k}^T(\underline{x} - \underline{x}_0)$. Otrzymano ostateczne równanie sygnału sterującego:

$$u_1 = -\underline{k}^T \underline{x} + \underbrace{\underline{k}^T \underline{x}_0}_{\mu} + u_{10}. \quad (20)$$

5. Wskaźniki jakości

Podstawowym kryterium interpretacji otrzymanych wyników eksperymentów pod kątem jakości regulacji oraz estymacji jest ocena przebiegów czasowych zmiennych stanu. W celu oceny jakości regulacji i estymacji bazujących na obiektywnym kryterium (liczbowym), dla przeprowadzonych eksperymentów wyznaczono wskaźniki jakości.

Jakość regulacji oceniono wskaźnikami bazującymi na uchybie położeniowym, tj. $e = r - x_1$. Zależnie od typu sprzężenia do regulatora w danym eksperymencie mogły być doprowadzone zaszumione pomiary y lub ich estymaty \hat{y} , gdzie do obliczeń jako x_1 brano ich pierwszą składową – położenie. Dla sprzężenia od pomiarów wskaźniki obliczane były na podstawie sygnału zaszumionego, a dla sprzężenia od EKF – na podstawie estymaty pierwszej składowej wektora \hat{x} . Sygnałem r było

zadane położenie x_{10} , było ono stałe. Wskaźniki jakości regulacji prezentują się następująco:

$$\text{ISE} = \int_0^t (r - x_1(\tau))^2 d\tau, \quad (21)$$

$$\text{IAE} = \int_0^t |r - x_1(\tau)| d\tau. \quad (22)$$

W równaniach (21) i (22) symbolem t występującym w górnej granicy całkowania oznaczono czas przeprowadzanego eksperymentu.

Jakość estymacji oceniono wskaźnikami: RMSE (ang. *Root Mean Squared Error*), który obliczono na podstawie pierwiastka z kwadratu błędu estymacji, osobno dla każdej zmiennej stanu. Ponadto użyto wskaźnik ε_y , będący ilorazem sum błędów bezwzględnych estymacji i pomiaru z każdego kroku. Tym wskaźnikiem można łatwo ocenić poprawność estymacji, ponieważ dla $\varepsilon_y \leq 1$ estymaty z danych kroków będą obciążone mniejszym błędem względem rzeczywistego pomiaru niż jego zaszumione wartości. Przy obliczaniu ε_y bazowano jedynie na położeniu, czyli sterowanej wielkości, aby dokonać jak najdokładniejszej oceny estymacji pod jej kątem. Przyjęte wskaźniki jakości estymacji prezentują się następująco:

$$\text{MSE}_i = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (\hat{x}_i(k) - x_i^+(k))^2, \quad (23)$$

$$\text{RMSE}_i = \sqrt{\text{MSE}_i}, \quad (24)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sum_{k=1}^M |\hat{y}_1(k) - y_1^+(k)|}{\sum_{k=1}^M |y_1(k) - y_1^+(k)|}, \quad (25)$$

gdzie M oznacza liczbę próbek zebranych danych pomiarowych. Horyzont czasowy dla przeprowadzanego eksperymentu wynosi w takim wypadku $t = MT_p$, gdzie T_p to okres pozyskiwania danych pomiarowych.

6. Wyniki eksperymentów

6.1. Metodyka przeprowadzonych eksperymentów

W przeprowadzonych na obiekcie testach porównano jego zachowanie przy pobudzeniu go zadany sygnałem położenia kuli x_{10} przy sprzężeniu od pomiarów oraz od estymatora EKF.

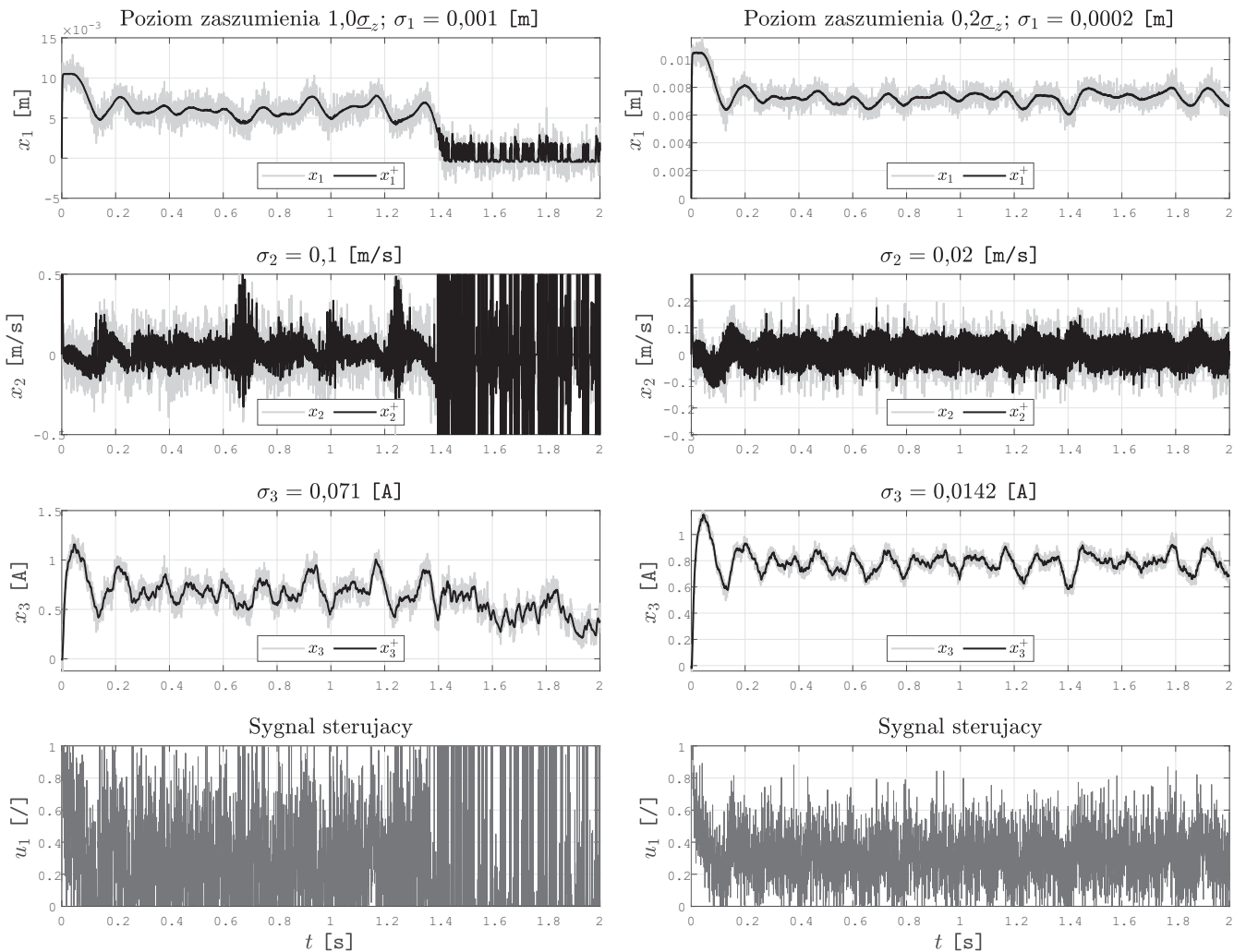
Do wzorcowego wektora pomiarowego \underline{y}^+ dodano w realizacji z rys. 3 stochastyczne zakłócenie z , zdefiniowane odchyleniem standardowym dla pomiarów poszczególnych zmiennych stanu. Otrzymano tym samym wektor y , przenoszony na regulator w eksperymencie ze sprzężeniem od pomiarów. Sygnały pomiarowe oznaczone jako \underline{y}^+ , \hat{y} charakteryzują odpowiednio ich wzorcową wartość oraz estymatę – zgodnie z tab. 1.

Przyjęto następujące odchylenia standardowe zakłóceń pomiarowych:

$$\underline{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1,0000 \cdot 10^{-3} & \text{m} \\ 1,0000 \cdot 10^{-1} & \text{m/s} \\ 7,2000 \cdot 10^{-2} & \text{A} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

stąd ich sygnał, dla i -tego pomiaru ($i = \{1, 2, 3\}$), opisuje zależność $z_i \sim N(0, \sigma_{z_i}^2)$.

W tab. 3 oraz 4 w drugim wierszu podano przyjmowane w danym teście wartości wektora $\underline{\sigma}_z$ – jego bazowe wartości z (26) przeskalowane przez współczynnik lub wyzerowane. Dla obu realizacji sprzężenia zwrotnego sprawdzono zachowanie obiektu przy różnych wartościach odchylenia standardowego szumów pomiaro-



Rys. 4. Przebiegi sygnałów uzyskane w trakcie eksperymentów (dla $1,0\sigma_z$ oraz $0,2\sigma_z$)
 Fig. 4. Signals time charts obtained during experiments (for $1.0\sigma_z$ and $0.2\sigma_z$)

Tabela 3. Zestawienie wskaźników jakości dla eksperymentów ze sprzężeniem od pomiarów
 Table 3. The values of quality indices for experiments with feedback from measurements

Wskaźniki jakości	Poziom zaszumienia			
	$1,0\sigma_z$	$0,2\sigma_z$	$0,1\sigma_z$	$0\sigma_z$
ISE	$3,8053 \cdot 10^{-5}$	$1,4120 \cdot 10^{-6}$	$1,0532 \cdot 10^{-6}$	$6,1768 \cdot 10^{-7}$
IAE	$6,7000 \cdot 10^{-3}$	$1,2000 \cdot 10^{-3}$	$9,5912 \cdot 10^{-4}$	$4,4573 \cdot 10^{-4}$

wych. Przyjęto odchylenia równe 100 %, 20 % i 10 % bazowej wartości, a także odchylenia zerowe, w warunkach braku szumów.

6.2. Sprzężenie od pomiarów

W przypadku sprzężenia od pomiarów nie obliczano wskaźników danych równaniami (23)–(25) oraz na przebiegach czasowych nie wyświetlano estymowanej zmiennej stanu, ponieważ w tym eksperymencie nie używano EKF. Przebiegi czasowe pomiarów zmiennych stanu (zszumionych oraz rzeczywistych) i sygnału sterującego zamieszczono na rys. 4. Obliczone wskaźniki jakości zestawiono w tab. 3. Wyświetlono przebiegi czasowe dla jedynie pierwszych dwóch krotności σ_z z tab. 3.

6.3. Sprzężenie od estymowanego stanu

Przebiegi czasowe pomiarów zmiennych stanu (zszumionych, rzeczywistych oraz estymowanych) i sygnału sterującego zamieszczono na rysunkach 5–8. Obliczone wskaźniki jako-

ści zestawiono w tab. 4. Na rysunkach 5–8 po prawej stronie przedstawiono przybliżenia przebiegów z lewej strony w danym przedziale czasu. Obszary przybliżeń oznaczono prostokątami.

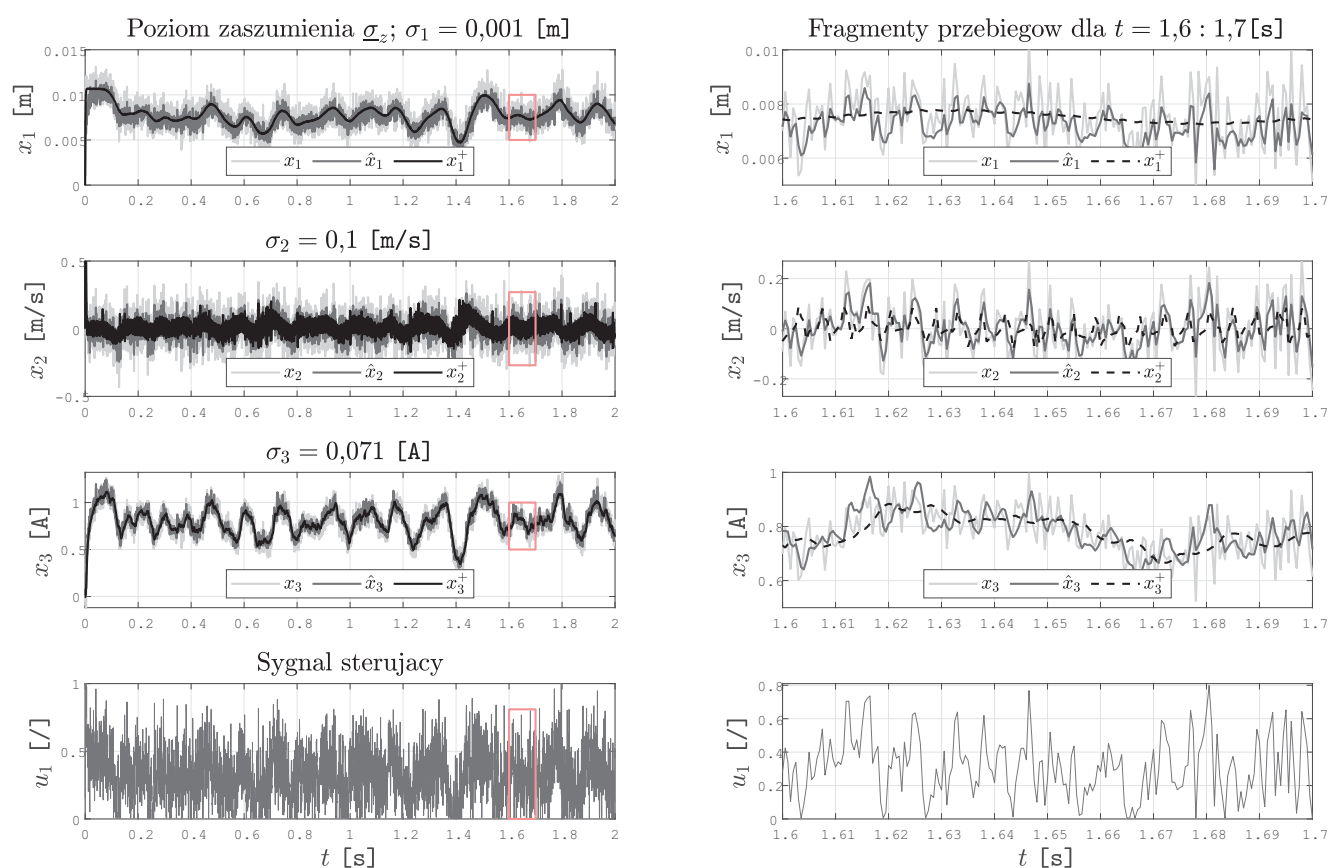
6.4. Omówienie wyników eksperymentów

Analizując otrzymane rezultaty, można wnioskować o powodzeniu implementacji sterowania – końcowe wartości wskaźników jakości, biorąc pod uwagę rzędy wielkości zmiennych stanu (dla obu realizacji sprzężenia zwrotnego), były niewielkie. Zauważalne są znacznie mniejsze wartości wskaźnika ISE od IAE. Różnice wynikają z faktu, iż przy obliczaniu ISE stosuje się kwadrat wartości uchybu, przez co większe błędy implikują bardziej dotkliwe kary, a bliskie zeru są praktycznie odrzucane. Natomiast w przypadku wskaźnika IAE bazującego na wartości bezwzględnej uchybu, występuje liniowy wzrost kary przy liniowym wzroście uchybu – błędy bliskie zeru nie mogą być pomijane [7]. Tę zależność przedstawiono na rys. 9.

Tabela 4. Zestawienie wskaźników jakości dla eksperymentów ze sprzężeniem od EKF

Table 4. The values of quality indices for experiments with feedback from EKF

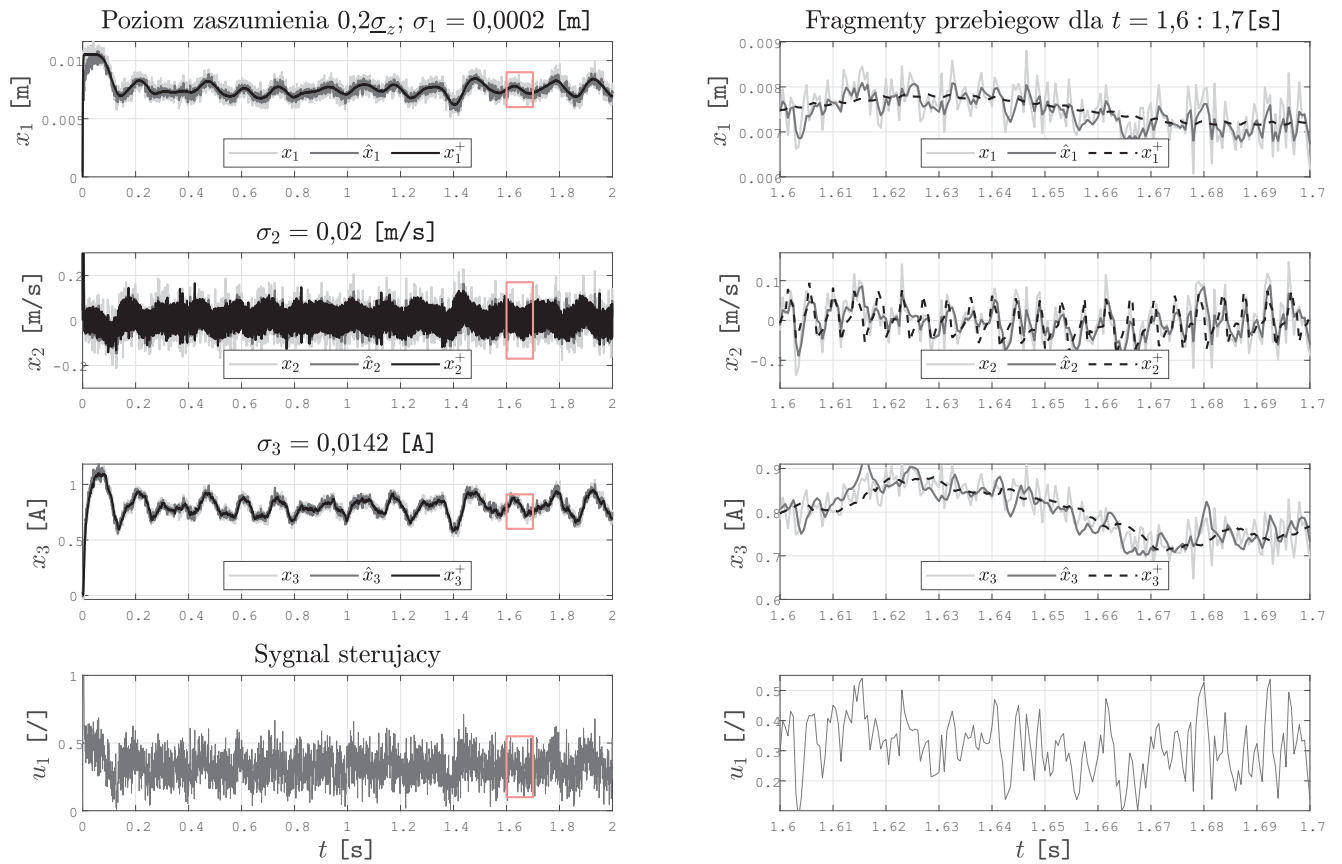
Wskaźniki jakości	Poziom zaszumienia			
	$1,0\sigma_z$	$0,2\sigma_z$	$0,1\sigma_z$	$0\sigma_z$
ISE	$2,5650 \cdot 10^{-6}$	$1,0400 \cdot 10^{-6}$	$1,0670 \cdot 10^{-6}$	$5,5520 \cdot 10^{-7}$
IAE	$1,7000 \cdot 10^{-3}$	$1,0000 \cdot 10^{-3}$	$1,0000 \cdot 10^{-3}$	$3,7560 \cdot 10^{-4}$
RMSE ₁	$6,8229 \cdot 10^{-4}$	$3,3513 \cdot 10^{-4}$	$2,7749 \cdot 10^{-4}$	$1,9743 \cdot 10^{-4}$
RMSE ₂	$8,5900 \cdot 10^{-2}$	$6,6700 \cdot 10^{-2}$	$6,4900 \cdot 10^{-2}$	$6,1200 \cdot 10^{-2}$
RMSE ₃	$6,0400 \cdot 10^{-2}$	$3,2800 \cdot 10^{-2}$	$2,6100 \cdot 10^{-2}$	$1,8300 \cdot 10^{-2}$
ε_y	$6,6960 \cdot 10^{-1}$	$6,5380 \cdot 10^{-1}$	$6,7310 \cdot 10^{-1}$	—

Rys. 5. Przebiegi sygnałów uzyskane w trakcie eksperymentów (dla $1,0\sigma_z$)Fig. 5. Signals time charts obtained during experiments (for $1,0\sigma_z$)

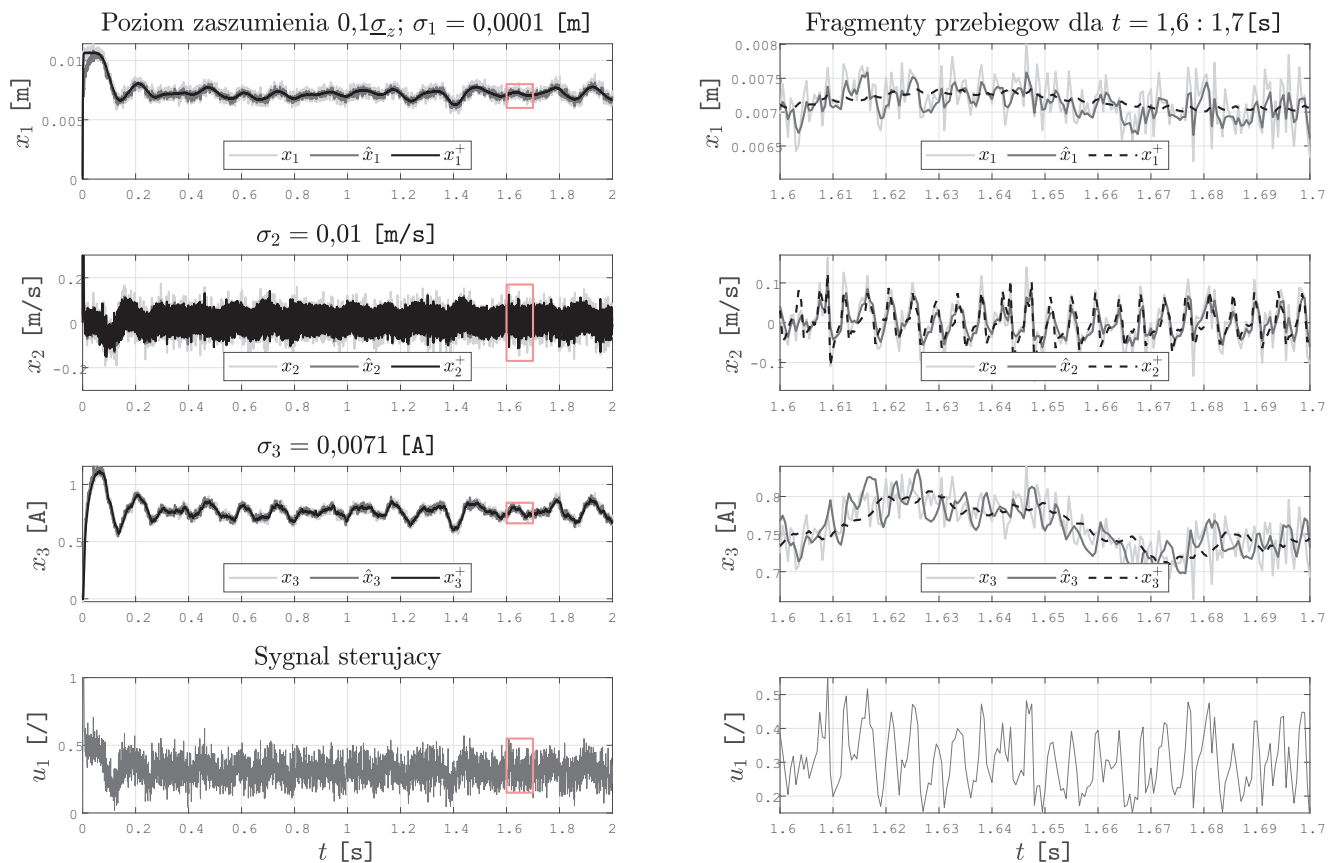
W przebiegu kar dla wskaźników jakości IAE oraz ISE (rys. 9), dla lepszej widoczności tendencji przebiegów funkcji kar, przyjęto rozdzielczość uchybu wynoszącą $2,0000 \cdot 10^{-2}$. W przeprowadzonych eksperymentach wartości uchybów były znacząco mniejsze, tj. ich wartość średnia była dwa rzędy wielkości mniejsza od rozdzielczości na osi odczytanych.

Kluczową obserwacją jest stałe wytrącenie kuli z otoczenia punktu równowagi widoczne na rys. 4 – przebieg czasowy położenia dla maksymalnego szumu pomiarowego, gdy do regulatora wchodził sygnał sprzężenia od pomiarów. Dobrane odchylenie standardowe szumu pomiarowego położenia okazało się na tyle duże, że lewitująca kula wypadła poza zakres, dla którego zostały wyznaczone parametry obiektu dane w tab. 2. Parametry obiektu wyznaczone zgodnie z procedurą podaną

w pracy [2]. Zaplanowano eksperymenty w przedziale wysokości $< 5,0000 \cdot 10^{-3} : x_d > [m]$, zatem w tym obszarze aproksymacja parametrów F_{emP1} , F_{emP2} , c_i , k_i jest poprawna. Dla położenia kuli znacznie mniejszych od $5,0000 \cdot 10^{-3} [m]$ wartości współczynników przestały być zgodne z wyznaczonymi, co skutkowało błędnym przeliczaniem wartości x_{30} , u_{10} w równaniu (17) oraz w rezultacie w (18). Niepoprawne wyznaczenie trzeciej składowej wektora stanu oraz sygnału sterującego w punkcie równowagi przekłada się na błędne przeliczanie sygnału sterującego z (20), którego wartości były za duże. W wyniku tego kula została na stałe przyciągnięta do elektromagnesu znajdującego się na górze. Wskazują na to pomiary położenia x_1 oscylujące wokół wartości zerowej, a z rys. 2 wynika, że zerowemu położeniu odpowiada przyleganie do górnego elektromagnesu.



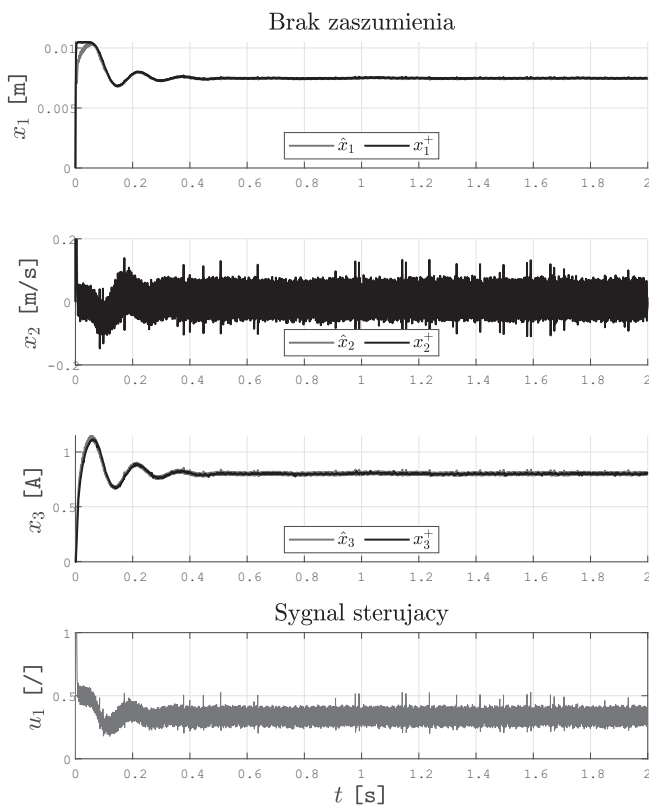
Rys. 6. Przebiegi sygnałów uzyskane w trakcie eksperymentów (dla $0,2\sigma_2$)
 Fig. 6. Signals time charts obtained during experiments (for $0.2\sigma_2$)



Rys. 7. Przebiegi sygnałów uzyskane w trakcie eksperymentów (dla $0,1\sigma_2$)
 Fig. 7. Signals time charts obtained during experiments (for $0.1\sigma_2$)

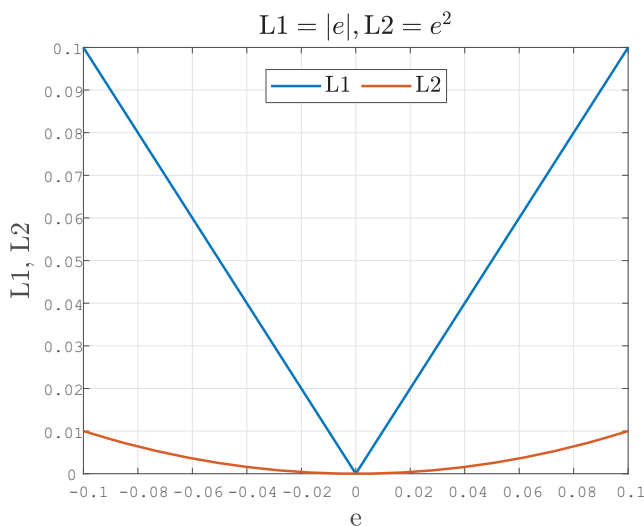
Początkowo przyjęto obliczanie jednej wartości wskaźnika MSE, wyrażonej jako średnia arytmetyczna błędów estymacji wszystkich zmiennych stanu. Ze względu na fakt, iż wartości x_1 – x_3 mają różne rzędy wielkości, wpływ błędów estymacji położenia na wartość wskaźników średniokwadratowych był praktycznie pomijany na rzecz prędkości kuli i prądu. Ostatecznie średniokwadratowe wskaźniki jakości estymacji obliczono osobno dla każdej zmiennej stanu.

W przypadku eksperymentów przy sprzężeniu od EKF, przebiegi czasowe zmiennych stanu przedstawiono na rys. 5–8. Na przebiegu położenia (x_1) dla maksymalnego szumu pomia-



Rys. 8. Przebiegi sygnałów uzyskane w trakcie eksperymentów (dla $0\sigma_z$)

Fig. 8. Signals time charts obtained during experiments (for $0\sigma_z$)



Rys. 9. Wykresy funkcji kar wskaźnika (a) IAE – L_1 oraz (b) ISE – L_2 w zależności od uchybu

Fig. 9. Graphs of the penalty functions of the (a) IAE – L_1 and (b) ISE – L_2 indices depending on the error

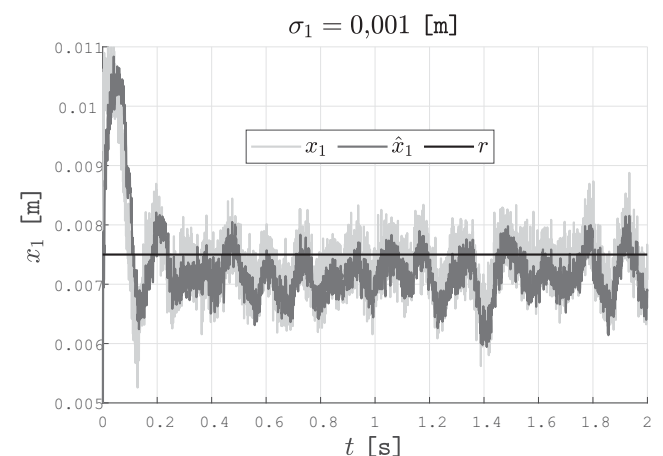
rowego ($1,0\sigma_z$), pomimo jego identycznej wartości jak przy sprzężeniu od pomiarów, sygnały wchodzące do regulatora zostały odszumione wystarczająco, aby kula nie została wytrącona z położenia równowagi do końca eksperymentu. Jest to ewidentna zaleta stosowania algorytmu EKF przy realizacji sprzężenia od stanu, w warunkach zakłóconych pomiarów. Mniejsze poziomy zakłóceń pomiarowych ($0,1\sigma_z$ oraz $0\sigma_z$) nie miały dużego wpływu na pominięte przebiegi czasowe zmiennych stanu i sterowania przy sprzężeniu od pomiarów. Były one bardzo zbliżone do przebiegów otrzymanych przy zastosowaniu estymacji stanu z rys. 8.

Kolejnym faktem wskazującym na przewagę sprzężenia od estymowanego stanu są znacząco odszumione pomiary dla pozostałych krotkości wektora odchyień standardowych szumów pomiarowych σ_z , co można zaobserwować na rys. 6–7. Kolorem jasnoszarym przedstawione zostały sygnały, które trafiłyby do regulatora w przypadku sprzężenia od pomiarów, a kolorem szarym – estymata zmiennych stanu. Wzorcowe sygnały pomiarowe przedstawione zostały kolorem czarnym. Zaszumienie sygnałów \hat{x} jest zauważalnie mniejsze niż w przypadku sygnału pomiarowego, co przekłada się na przebieg położenia kuli bliższy jego zadanej wartości oraz mniejszą amplitudą oscylacji względem przebiegów przedstawionych na rys. 4.

Zmniejszeniu wartości uchybów w danym kroku przy sprzężeniu od EKF dowodzą wskaźniki jakości regulacji zestawione w tab. 3 oraz tab. 4. Wyjątkiem od zauważonej tendencji są wskaźniki ISE oraz IAE, dla szumów pomiarowych o odchyleniach standardowych równym $0,1\sigma_z$, których wartości końcowe okazały się być mniejsze dla sprzężenia od pomiarów. W pozostałych przypadkach wskaźniki przemawiają na korzyść realizacji sprzężenia od estymowanego stanu.

Powstała niecisłość związana ze wskaźnikami jakości regulacji spowodowana została faktem, iż $0,1\sigma_z$ to na tyle małe wartości odchyżeń standardowych szumów, że nie wpływały one znacząco na regulację ze sprzężeniem od pomiarów. Dodatkowo, dzięki szumom o minimalnie większej amplitudzie oscylacji względem zastosowania EKF wartość położenia wchodząca na regulator była częściej bliższa wartości zadanej r niż odszumiona, której składowa stała była minimalnie niższa, co skutkowało przeliczaniem większych uchybów w każdym kolejnym kroku. W efekcie przełożyło się to na ich większą sumę końcową. Opisywane zjawisko przedstawione zostało na rys. 10.

Odnosząc się do obliczonych wskaźników jakości estymacji danych w tab. 4, najmniejszymi wartościami charakteryzuje się wskaźnik $RMSE_1$. Jest to spowodowane faktem, iż zakres położen osiągniętych przez kulę, a zarazem jego estymat oraz



Rys. 10. Przebieg czasowy położenia kuli przy zakłóceniach stochastycznych o wartości $0,1\sigma_z$

Fig. 10. Time plot of the ball position with stochastic disturbances of $0,1\sigma_z$

pomiarów jest znacznie mniejszy – różnica dwóch rzędów wielkości względem prędkości oraz prądu płynącego przez górną cewkę. Wskaźniki $RMSE_2$ oraz $RMSE_3$, ze względu na zbliżony przedział wartości, w jakich zmieniają się pomiary i estymaty drugiej oraz trzeciej zmiennej stanu, są do siebie zbliżone, tj. są tego samego rzędu wielkości. Dla każdego wskaźnika średniokwadratowego możliwa do zauważenia jest tendencja, iż zmniejszeniu szumów pomiarowych towarzyszy zmniejszanie się kwadratów różnicy estymat danej zmiennej stanu oraz ich wzorcowych pomiarów. Wartości wskaźnika ϵ_y wykazują poprawność implementacji algorytmu, ponieważ w przypadku położenia suma błędów bezwzględnych estymacji jest mniejsza niż suma błędów pomiarów (względem pomiarów niezaszumionych).

7. Podsumowanie

Przedstawiono możliwość zredukowania wpływu zakłóceń stochastycznych na jakość regulacji rzeczywistym obiektem dzięki zaimplementowaniu algorytmu rozszerzonego filtra Kalmana. W eksperymentach porównano działanie nieliniowego obiektu w układzie regulacji przy sterowaniu ze sprzężeniem od stanu oraz lokowaniem biegunów z zaszumionym oraz estymowanym wektorem pomiarowym.

Jednym z kluczowych czynników dla estymacji stanu algorytmem EKF jest dobór wariancji szumów pomiarowych oraz wewnętrznych leżących na diagonalach macierzy \mathbf{R} i \mathbf{Q} (13). Prawidłowy ich dobór zapewnia możliwość otrzymania estymaty wektora stanu bliższej wartościom prawdziwym niż zaszumiony pomiar. Przy doborze wariancji szumów pomiarowych dla każdej zmiennej stanu istotne jest zwrócenie uwagi na otrzymywane w pomiarach rzędy wielkości i różnice między nimi.

Otrzymane wyniki eksperymentów są podstawą do stwierdzenia, iż zastosowanie algorytmu EKF przy występowaniu stochastycznych zakłóceń pomiarowych pozwala zredukować ich wpływ na jakość regulacji. W skrajnych przypadkach podtrzymując obiekt w otoczeniu zadanej pozycji (w przeciwieństwie do sprzężenia od pomiarów).

W przyszłości planowana jest kontynuacja badań nad możliwością estymowania przez algorytm EKF wektora stanu na podstawie przetwarzania zaszumionego pomiaru jednej zmiennej. Planowane jest również rozszerzenie aproksymacji parametrów obiektu do całego zakresu położen lewitującej kuli w celu umożliwienia implementacji sterowania z użyciem dwóch elektromagnesów oraz zadawania różnorodnych trajektorii, a także implementacja bardziej zaawansowanych metod estymacji i sterowania.

Bibliografia

- Abdalahi A., Wahid H., *Control approaches for magnetic levitation systems and recent works on its controllers' optimization: A review*. „Applications of Modelling and Simulation”, Vol. 5, 2021, 173–183.
- Balko P., Rosinova D., *Modeling of magnetic levitation system*. [In:] 21st International Conference on Process Control (PC), IEEE, 2017, 252–257, DOI: 10.1109/PC.2017.7976222.
- Bania P., *Model i sterowanie magnetyczną lewitacją*. AGH, Wydział EAIiE, Katedra Automatyki, Kraków, 1999.
- Chamraz Š., Huba M., Žakova K., *Stabilization of the magnetic levitation system*. „Applied Sciences”, Vol. 11, No. 21, 2021, DOI: 10.3390/app112110369.
- Chang C.-B., Tabaczynski J., *Application of state estimation to target tracking*. „IEEE Transactions on automatic control”, Vol. 29, No. 2, 1984, 98–109, DOI: 10.1109/TAC.1984.1103466.
- Jose de Jesus Rubio, Zhang L., Lughofer E., Cruz P., Alsaedi A., Hayat T., *Modeling and control with neural networks for a magnetic levitation system*. „Neurocomputing”, Vol. 227, 2017, 113–121, DOI: 10.1016/j.neucom.2016.09.101.
- Horla D., *Experimental results on actuator/sensor failures in adaptive gpc position control*. „Actuators”, Vol. 10, No. 3, 2021, 2076–0825, DOI: 10.3390/act10030043.
- Hu X., Feng F., Liu K., Zhang L., Xie J., Liu B., *State estimation for advanced battery management: Key challenges and future trends*. „Renewable and Sustainable Energy Reviews”, Vol. 114, 2019, DOI: 10.1016/j.rser.2019.109334.
- Hypiusova M., Rosinova D., Kozakova A., *Comparison of state feedback controllers for the magnetic levitation system*. [In:] 2020 Cybernetics & Informatics (K&I), IEEE, 2020, DOI: 10.1109/KI48306.2020.9039889.
- Jaśk D., Wajnert D., *Badania porównawcze liniowych regulatorów dla lewitacji magnetycznej*. „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 22, Nr 3, 2018, 51–59, DOI: 10.14313/PAR_229/51.
- Kalman R.E., *A new approach to linear filtering and prediction problems*. „Journal of Basic Engineering”, Vol. 82, No. 1, 1960, 35–45, DOI: 10.1115/1.3662552.
- Larson R.E., Tinney W.F., Hajdu L.P., Piercy D.S., *State estimation in power systems Part II: Implementation and applications*. „IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems”, Vol. PAS-89, No. 3, 1970, 353–363, DOI: 10.1109/TPAS.1970.292712.
- Li S., Wang Y., Yang M., Sun Y., Wu F., Dai J., Wang P., Gao M., *Investigation on a broadband magnetic levitation energy harvester for railway scenarios*. „Journal of Intelligent Material Systems and Structures”, Vol. 33, No. 5, 2022, 653–668, DOI: 10.1177/1045389X211026383.
- Lin C.-M., Lin M.-H., Chen C.-W., *SoPC-based adaptive PID control system design for magnetic levitation system*. „IEEE Systems Journal”, Vol. 5, No. 2, 2011, 278–287, DOI: 10.1109/JSYST.2011.2134530.
- Lin F.-J., Shieh H.-J., Teng L.-T., Shieh P.-H., *Hybrid controller with recurrent neural network for magnetic levitation system*. „IEEE Transactions on Magnetics”, Vol. 41, No. 7, 2005, 2260–2269, DOI: 10.1109/TMAG.2005.848320.
- Meriem M., Bouhra C., Abdelaziz B., Sabri Omar Boukherouaa Jamal, Nazha C., et al. *Study of state estimation using weighted-least-squares method (WLS)*. [In:] International Conference on Electrical Sciences and Technologies in Maghreb (CISTEM), IEEE, 2016, DOI: 10.1109/CISTEM.2016.8066820.
- Michalski J., Koziński P., Ziętkiewicz J., *Comparison of particle filter and extended Kalman particle filter*, „Studia z Automatyki i Informatyki”, Vol. 42, 2017, 43–51.
- Michalski J., Koziński P., Ziętkiewicz J., *The new approach to hybrid Kalman filtering, based on the changed order of filters for state estimation of dynamical systems*. Poznań University of Technology Academic Journals. Electrical Engineering, Vol. 97, 2019, 181–190, DOI: 10.21008/j.1897-0737.2019.97.0016.
- Naz N., Malik M.B., Zaheer A., Salman M., *Sampled data sliding mode control of magnetic levitation system using extended Kalman filter estimator*. [In:] 8th EUROSIM Congress on Modelling and Simulation, IEEE, 2013, 208–213, DOI: 10.1109/EUROSIM.2013.47.
- Sain D., Swain S.K., Mishra S.K., *TID and I-TD controller design for magnetic levitation system using genetic algorithm*. „Perspectives in Science”, Vol. 8, 2016, 370–373, DOI: 10.1016/j.pisc.2016.04.078.

21. Shih K.-R., Huang S.-J., *Application of a robust algorithm for dynamic state estimation of a power system*. „IEEE Transactions on Power Systems”, Vol. 17, No. 1, 2002, 141–147, DOI: 10.1109/59.982205.
22. A Vimala Starbino and S Sathiyavathi. *Real-time implementation of SMC-PID for magnetic levitation system*. „Sādhanā”, Vol. 44, No. 5, 2019, 1–13, DOI: 10.1007/s12046-019-1074-4.

Inne źródła

23. Inteco Ltd. *Magnetic levitation system 2em – user’s manual*. 2008.

Control of the Magnetic Levitation System in Conditions of Stochastic Disturbances

Abstract: This paper presents the possibility of reducing impact of stochastic disturbances on the quality of control by implementation of state estimation using the extended Kalman filter algorithm. Experiments were carried out on the Inteco magnetic levitation laboratory system, which mathematical model is nonlinear. A control method with the use of a state vector and a pole placement algorithm was adopted for the model which was linearized at the selected working point. For different levels of noise in the measurement signal, the operation of the system with a feedback from the measured and estimated state was tested. In order to assess the regulation, the quality of the algorithm was verified for both implementations of the feedback. The obtained time plots of each state variable were compared and the calculated integral quality indices, based on the control error, were compared. The quality of the estimation was assessed on the basis of the following mean square error and based on the errors between estimation and measurements indices. The controller was synthesized on the basis of the continuous model, and then its discrete form was numerically implemented as the extended Kalman filter algorithm. The executive blocks were synchronized with the selected sampling period. The results of the performed research allow to conclude about the advantage of control in the system in which the information about the state vector from the estimation is taken, in comparison with the direct feedback without Kalman filtering.

Keywords: magnetic levitation system, modeling, extended Kalman filter, state estimation, state feedback

Mikołaj Mrotek

mikolaj.mrotek@interia.pl
ORCID: 0000-0002-5436-5676

Student Automatyki i Robotyki drugiego roku studiów I stopnia na Politechnice Poznańskiej. Zainteresowania naukowe obejmują estymację stanu obiektów (liniowych oraz nieliniowych) metodami filtru Kalmana, jak również zagadnienia związane z modelowaniem i sterowaniem robotów.



Adrian Szymankiewicz

adrian.szymankiewicz.0@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5191-0886

Student drugiego roku studiów I stopnia, kierunku Automatyka i Robotyka, na Politechnice Poznańskiej. Obszary zainteresowań naukowych obejmują estymację stanu obiektów, zarówno nieliniowych jak i liniowych, przede wszystkim przy użyciu filtru Kalmana oraz budowanie lokalnych map otoczenia do sterowania robotami mobilnymi.



mgr inż. Jacek Michalski

jacek.michalski@put.poznan.pl
ORCID: 0000-0002-1666-7331

Asystent badawczo-dydaktyczny na Politechnice Poznańskiej. Zainteresowania naukowe obejmują estymację stanu obiektów (liniowych oraz nieliniowych), przede wszystkim metodami filtru Kalmana oraz filtru cząsteczkowego, jak również szeroko pojętą sztuczną inteligencję. Obszarem zainteresowań są też zaawansowane metody sterowania adaptacyjnego i odpornego, z identyfikacją parametrów obiektu lub estymacją stanu.



mgr inż. Piotr Kozierski

piotr.kozierski@gmail.com
ORCID: 0000-0001-8777-6132

Asystent na Politechnice Poznańskiej. Główne obszary zainteresowań to odporna estymacja stanu obiektów (z naciskiem na metody filtru cząsteczkowego oraz obiekty typu sieciowego) oraz rozpoznawanie mowy ciągłej (w języku polskim, mowa zwykła i szeptana).

