

ANALIZA WPLYWU WSPÓŁCZYNNIKÓW SPRĘŻYSTEGO PODŁOŻA DWUPARAMETROWEGO NA UGIĘCIA PODKŁADU KOLEJOWEGO

Włodzimierz Bednarek

Dr inż., Politechnika Poznańska, Zakład Budowy Mostów i Dróg Kolejowych, ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań, e-mail: Wlodzimierz.Bednarek@put.poznan.pl

Streszczenie. *Głównym zadaniem podkładów kolejowych jest przejęcie nacisków przekazywanych z szyn od kół taboru kolejowego i przekazanie ich na podsypkę. W analizie pracy podkładów kolejowych uwzględnia się przede wszystkim następujące podstawowe parametry: zmienna na długości sztywność podkładu, kontakt pomiędzy podsypką a podkładem (np. tarcie), sprężyste podłoże jedno- lub dwu-parametrowe podłoża podkładów, zmienną wartość współczynników podłoża, nacisk przekazywany z szyny na podkład, zmienny podczas eksploatacji toru kolejowego oraz charakter przekazywanego nacisku z szyny na podkład (np. skupiony lub ciągły). W artykule podjęto zagadnienie pracy podkładu kolejowego o zmiennej sztywności po jego długości. Podkład traktowany jest jako belka BE (Bernoulli-Euler's beam) spoczywająca na podłożu dwuparametrowym. Obliczenia przeprowadzono metodą elementów skończonych, korzystając z macierzy sztywności analizowanego elementu. Przeanalizowano wpływ wybranych parametrów podłoża i toru na pracę podkładu kolejowego (ugięcia i momenty zginające). Wyniki obliczeń porównano z podkładem kolejowym o zastępczej, stałej sztywności. Określono również wartości parametrów podłoża dwuparametrowego na podstawie ugięcia podkładu ze szczególnym uwzględnieniem współczynników podłoża E_1 i ν_1 (moduł i współczynnika Poissona gruntu).*

Słowa kluczowe: *podłoże dwuparametrowe; ugięcie podkładu betonowego; współczynniki sprężystego podłoża dwuparametrowego*

1. Wprowadzenie

Zasadniczym zadaniem podkładów kolejowych jest przejmowanie nacisków przekazywanych przez szyny i przenoszenie ich na podłoże podsypkowe [5, 6, 20]. Umożliwiają one przytwierdzenie szyn z odpowiednim rozstawem oraz zapewniają dokładne utrzymanie szyn w ustalonej odległości odpowiadającej przepisowej szerokości toru kolejowego. Przesunięciom podkładów pod działaniem sił podłużnych i poprzecznych stawia opór podsypka oraz tarcie powstające między podsypką, a podkładami. Pionowe obciążenia przekazywane na podkłady powodują oddziaływanie podsypki.

W Polsce do najpopularniejszych podkładów należą podkłady betonowe lub drewniane, których typy i rozstaw określają standardy konstrukcyjne nawierzchni dla odpowiedniej klasy torów [16]. Stosowane są również podkłady stalowe, na-

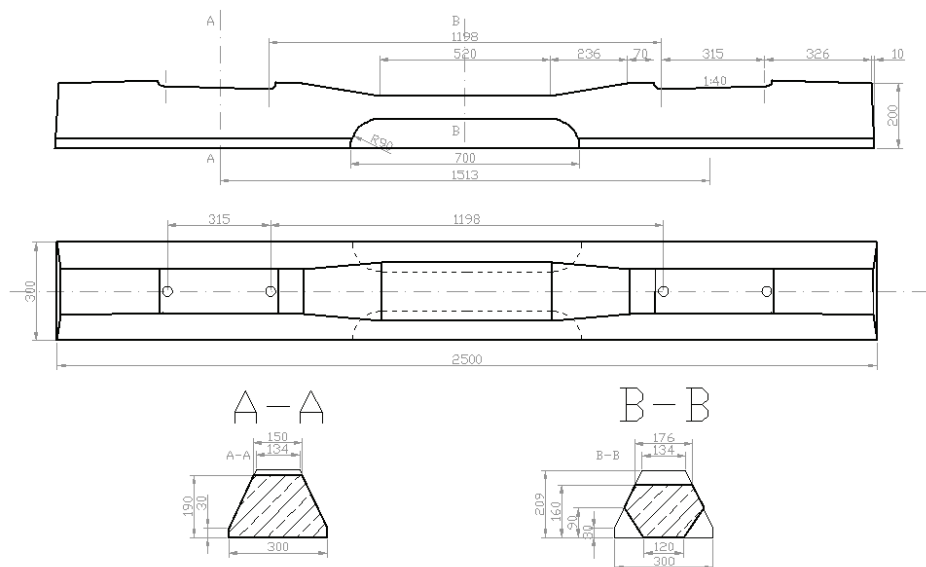
wierzchnie bezpodsypkowe, podkłady blokowe, itp. Ze względu na ilość potrzebną do ułożenia 1 km toru najkorzystniejsze są podkłady stalowe typu Y. Ich dodatkową zaletą jest zmniejszone zapotrzebowanie na podsypkę, zarówno bezpośrednio pod podkładem, jak i do jego obsypania. Podkłady drewniane były stosowane jako pierwsze do budowy nowych linii kolejowych. Ze względu na wielkie zapotrzebowanie na nowe podkłady podczas budowy/modernizacji (np. 1666 szt./km przy rozstawie wynoszącym 0,60 m), jak i wymiany spowodowanej dość krótkim okresem żywotności (dzięki zabiegowi impregnacji, np. olejem kreozotowym do 25 lat) i wytrzymałością podkładów drewnianych, odchodzi się od ich masowego stosowania na liniach kolejowych. Podkłady betonowe (strunobetonowe) są tanie w wykonaniu, cechują się jednorodnością wymiarów, dodatkowo są wytrzymałe na ściskanie i o większej sztywności niż podkłady drewniane. Ich okres trwałości dochodzi do 40 lat. Korzystnie wpływają na współczynnik podparcia szyny. Ich głównymi wadami jest znaczny ciężar, kruchość oraz wielokrotnie mniejsze własności tłumiące drgania. Przewodzą również elektryczność, przez co wymagane jest ich izolowanie. Również sztywność wiąże się ze zwiększeniem ilości podsypki (przy jej złym stanie utrzymania lub zanieczyszczenia może dochodzić do pęknięcia podkładu, zwłaszcza w części środkowej i podszykowej [8, 9]). Najbardziej popularne strunobetonowe podkłady stosowane w Polsce, wraz z najważniejszymi wymiarami są przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1. Charakterystyka wybranych typów podkładów betonowych

Typ	Masa [kg]	Powierzchnia podparcia [m ²]	Zasadnicze wymiary [mm]				
			a	b	d	h	p
INBK-3	226	0,5335	285	1803	2500	202	265
INBK-4	210	0,4466	285	1803	2300	192	286
INBK-7	250	0,6310	315	1828	2500	190	300
INBK-8	240	0,5818	285	1795	2500	195	286
PBS-1	250	0,5400	285	1795	2500	193	300
PS-83	250	0,6843	173	1687	2500	210	300
PS-93	286	0,6805	173	1687	2600	227	300
PS-94	294	0,6805	173	1687	2600	229	300

a – prześwit kotew, *b* – szerokość między zewnętrznymi kotwami, *d* – długość, *h* – wysokość, *p* – szerokość dolnej powierzchni podkładu

Na rysunku 1 przedstawiono schemat podkładu INBK-7, którego charakterystykę wykorzystano m. in. do analizy w pracy. W szczególności wykonano obliczenia wpływu podłoża podsypkowego i stanu bezstykowego toru kolejowego na jego pracę w różnych warunkach obciążenia i jego podparcia.



Rys. 1. Podkład strunobetonowy INBK-7 [17, 19]

Jak widać na rysunku, podkład ten w części środkowej ma mniejszy przekrój poprzeczny (jego szerokość podparcia o podłoże podsypkowe jest mniejsza). Spowodowane jest to tendencją pierwszych modeli podkładów strunobetonowych do pękania na środku swojej długości. Dodatkową zaletą takiego kształtu jest zmniejszenie masy podkładu [5, 6].

W Polsce najczęściej tor kolejowy spoczywa na podłożu podsypkowym. Dzięki oporowi podsypki następuje zmniejszenie przemieszczeń po długości toru kolejowego. Do podstawowych czynników, które wpływają na opór zaliczyć można: rodzaj zastosowanego kruszywa, uziarnienie, grubość warstwy, stopień zagęszczenia, zanieczyszczenie, itp. [8, 9]. Podsypka pomaga zapewnić poziomą oraz pionową stateczność toru kolejowego. To ona najszybciej ulega degradacji i głównie od stanu podsypki zależy okres zużywania się innych elementów nawierzchni podczas eksploatacji toru. Zasadniczymi zadaniami podsypki są [5, 6, 8, 9]:

- przekazanie nacisków z podkładów na torowisko,
- zapewnienie stateczności poprzecznej i podłużnej podkładów,
- zapewnienie sprężystości toru – zmniejszenie odkształceń pionowych,
- odprowadzanie wody.

Grubość podsypki mierzona od spodu podkładu do końca warstwy powinna wynosić według standardów kolejowych od 0,16 m do 0,35 m. Dopuszczalna obecnie frakcja na kruszywo podsypkowe to 31,5 – 50,0 mm.

2. Wpływ czynników dynamicznych ze względu na prędkość i stan toru (współczynnik k_v^J)

Dynamiczny charakter oddziaływań pochodzących od przejeżdżającego pociągu na nawierzchnię kolejową uwzględniamy przez współczynnik dynamiczny k_v , który jest zależny od prędkości poruszania się pojazdu. Najczęściej wykorzystywany jest wzór w następującej postaci [4]:

$$k_v = 1 + 5 \cdot 10^{-4} \cdot V + 4 \cdot 10^{-5} \cdot V^2 - 1,3 \cdot 10^{-7} \cdot V^3 \quad (1)$$

gdzie: V – prędkość pociągu [km/h].

Wraz z pogarszającymi się parametrami toru zachodzi konieczność uwzględnienia wpływu stanu nawierzchni na działanie dynamiczne poruszającego się pojazdu [23]. Ruch staje się coraz mniej spokojny i dochodzi do częstszych kontaktowych uderzeń koła o szynę. Zatem wartość współczynnika dynamicznego nie zależy tylko od prędkości. W znacznym stopniu zależy od konstrukcji i stanu nawierzchni oraz rodzaju i stanu pojazdów szynowych [4, 18]. Zaleca się zatem, aby współczynnik dynamiczny uzależnić od syntetycznego wskaźnika jakości toru J , według wzoru:

$$k_v^J = 1 + \frac{J}{1,5} \cdot (k_v - 1), \quad (2)$$

gdzie:

k_v^J – współczynnik dynamiczny uwzględniający stan toru oraz prędkość ruchu,

k_v – współczynnik dynamiczny uwzględniający tylko prędkość ruchu,

J – syntetyczny wskaźnik jakości toru [3, 16],

t – wartość określająca poziom ufności.

Parametr t zależy od kategorii linii, dla której wyznaczany jest współczynnik dynamiczny. Im wyższa kategoria, tym większa niezawodność eksploatacyjna jest wymagana. Wartości jakie przyjmuje t przedstawia się następująco:

$t = 3,00$ dla klasy toru 0,

$t = 2,50$ dla klasy toru 1,

$t = 2,00$ dla klasy toru 2,

$t = 1,50$ dla klasy toru 3,

$t = 1,00$ dla klasy toru 4,

$t = 0,75$ dla klasy toru 5.

$$\Psi_J = k_v^J \cdot (1 + 0,2 \cdot J \cdot t), \quad (3)$$

3. Analiza pracy podkładu na podłożu podsypkowym jako belki na dwuparametrowym podłożu

3.1. Podłoże dwuparametrowe

Podstawowe zadanie nośne konstrukcji nawierzchni i podtorza kolejowego stosowane w drogach kolejowych polega na bezpiecznym przenoszeniu obciążeń działających na szyny i przekazaniu ich na fundament, którym jest podtorze (podłoże gruntowe).

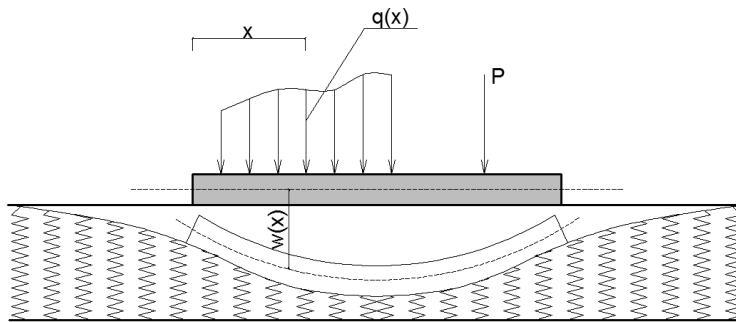
Podłoże gruntowe w drogach kolejowych odgrywa zasadnicze znaczenie głównie z następujących powodów:

- grunt jest materiałem budowlanym np. w nasypie,
- model podłoża sprężystego zastępujący rzeczywisty ośrodek gruntowy jest potrzebny np. na etapie projektowania, czy analizy pracy obciążonych elementów nawierzchni kolejowej podczas eksploatacji.

Analiza belki na podłożu sprężystym czy sprężysto-plastycznym jest przedmiotem wielu prac [1, 7, 11, 12, 13, 19, 22]. Niektóre prace analizują belkę jako belkę BE (*Bernoulli-Euler's beam*) lub belkę Timoshenki na podłożu gruntowym. Do analizy pracy belki należy przyjąć model podłoża gruntowego. Uproszczone modele polegają na reakcji podłoża na zadane obciążenie. Podstawową zasadą jest założenie, że wielkość reakcji jest proporcjonalna do ugięcia w każdym punkcie. Charakterystyka pionowego osiadania podłoża jest wyrażona przy pomocy ciągłych, ściśle do siebie przylegających i równomiernie rozłożonych podpór sprężystych. Stała sprężystości tych podpór jest znana jako moduł reakcji podłoża (k_1). Na tym parametrze opiera się model jednoparametrowego podłoża Winklera [1, 2, 12, 20]. Jego główną wadą jest nieciągłość w osiadaniach pomiędzy częścią obciążoną, a nieobciążoną. W rzeczywistości osiadanie rozchodzi się poza zarys elementu. Kolejne modele próbowały rozwijać model Winklera poprzez dodawanie różnych rodzajów powiązań: ścinania warstw i belek wzdłuż winklerowskich podpór sprężystych. Wszystkie rozwiązania powinny być zarówno łatwe w zastosowaniu jak i dążyć do odzwierciedlenia rzeczywistej pracy podłoża. Model dwuparametrowy podłoża uwzględniający dwa parametry (k_1^2, k_2^2) jest znacznie dokładniejszy niż model Winklera. W przypadku pominięcia drugiego parametru, automatycznie uzyskujemy model podłoża jednoparametrowego (Winklera).

Założenia dla modelu dwuparametrowego są następujące (rys. 2):

- rozważana będzie belka o stałym przekroju,
- obciążona będzie ona równomiernie w sposób ciągły, prostopadle do płaszczyzny głównej bezwładności,
- podparcie stanowią podpory sprężyste na całej długości kontaktu belki z podłożem,
- belka wykonana jest z liniowo sprężystego materiału jednorodnego, izotropowego i ciągłego na swej długości,
- podłoże sprowadzone jest do środowiska liniowego, jednorodnego oraz izotropowego.



Rys. 2. Belka na sprężystym podłożu dwuparametrowym [21]

Równanie różniczkowe dla odkształconej postaci belki spoczywającej na dwuparametrowym podłożu ma postać [21]:

$$E_S \cdot I \cdot w(x)^{IV} + k_1^2(x) \cdot w(x) - k_2^2(x) \cdot w(x)'' = q(x) \quad (4)$$

gdzie:

$$k_1^2(x) = k_0(x) \cdot b \text{ [MPa]},$$

$$k_2^2(x) = \overline{k_2}(x) \cdot b \text{ [MN]};$$

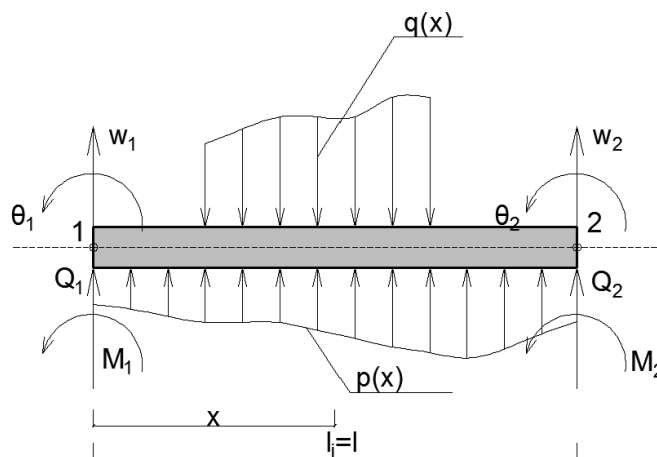
b – szerokość belki,

w – ugięcie belki,

k_1^2 – pierwszy parametr podłoża,

k_2^2 – drugi parametr podłoża,

$q(x)$ – rozłożone obciążenie na belce.



Rys. 3. Schemat pojedynczego elementu belki [21]

Równanie (4) może być także przedstawione przy pomocy macierzy [21] (dodatkowo z uwzględnieniem siły podłużnej):

$$k_{EI} = \frac{E_S \cdot I}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot l & -12 & 6 \cdot l \\ 6 \cdot l & 4 \cdot l^2 & -6 \cdot l & 2 \cdot l^2 \\ -12 & -6 \cdot l & 12 & -6 \cdot l \\ 6 \cdot l & 2 \cdot l^2 & -6 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$k_V = \frac{l}{840} \cdot \begin{bmatrix} 240 \cdot k_1^{2p} + 72 \cdot k_1^{2k} & 2 \cdot l \cdot (15 \cdot k_1^{2p} + 7 \cdot k_1^{2k}) & 54 \cdot (k_1^{2p} + k_1^{2k}) & -2 \cdot l \cdot (7 \cdot k_1^{2p} + 6 \cdot k_1^{2k}) \\ 2 \cdot l \cdot (15 \cdot k_1^{2p} + 7 \cdot k_1^{2k}) & l^2 \cdot (5 \cdot k_1^{2p} + 3 \cdot k_1^{2k}) & 2 \cdot l \cdot (6 \cdot k_1^{2p} + 7 \cdot k_1^{2k}) & -3 \cdot l^2 \cdot (k_1^{2p} + k_1^{2k}) \\ 54 \cdot (k_1^{2p} + k_1^{2k}) & 2 \cdot l \cdot (6 \cdot k_1^{2p} + 7 \cdot k_1^{2k}) & 24 \cdot (3 \cdot k_1^{2p} + 10 \cdot k_1^{2k}) & -2 \cdot l \cdot (7 \cdot k_1^{2p} + 15 \cdot k_1^{2k}) \\ -2 \cdot l \cdot (7 \cdot k_1^{2p} + 6 \cdot k_1^{2k}) & -3 \cdot l^2 \cdot (k_1^{2p} + k_1^{2k}) & -2 \cdot l \cdot (7 \cdot k_1^{2p} + 15 \cdot k_1^{2k}) & l^2 \cdot (3 \cdot k_1^{2p} + 5 \cdot k_1^{2k}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$k_H = \frac{1}{30 \cdot l} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot (11 \cdot k_2^{2p} + k_2^{2k}) & -3 \cdot l \cdot (k_2^{2p} - 2 \cdot k_2^{2k}) & -3 \cdot (11 \cdot k_2^{2p} + k_2^{2k}) & 3 \cdot l \cdot (2 \cdot k_2^{2p} - k_2^{2k}) \\ 3 \cdot l \cdot k_2^{2p} & l^2 \cdot (3 \cdot k_2^{2p} + k_2^{2k}) & -3 \cdot l \cdot k_2^{2p} & -l^2 \cdot k_2^{2k} \\ -3 \cdot (k_2^{2p} + 11 \cdot k_2^{2k}) & 3 \cdot l \cdot (k_2^{2p} - 2 \cdot k_2^{2k}) & 3 \cdot (k_2^{2p} + 11 \cdot k_2^{2k}) & -3 \cdot l \cdot (2 \cdot k_2^{2p} - k_2^{2k}) \\ 3 \cdot l \cdot k_2^{2k} & -l^2 \cdot k_2^{2p} & -3 \cdot l \cdot k_2^{2k} & l^2 \cdot (k_2^{2p} + 3 \cdot k_2^{2k}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$k_N = \frac{N}{30 \cdot l} \cdot \begin{bmatrix} 36 & -3 \cdot l & -36 & 3 \cdot l \\ -3 \cdot l & 4 \cdot l^2 & -3 \cdot l & -l^2 \\ -36 & -3 \cdot l & 36 & 3 \cdot l \\ 3 \cdot l & -l^2 & 3 \cdot l & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

gdzie:

$E_S \cdot I$ – sztywność elementu [MNm²],

l – długość elementu [m],

k_1^{2p} i k_1^{2k} – współczynnik podłoża na początku i końcu elementu dla pierwszego parametru podłoża [MPa],

k_2^{2p} i k_2^{2k} – współczynnik podłoża na początku i końcu elementu dla drugiego parametru podłoża [MN],

N – siła osiowa [MN].

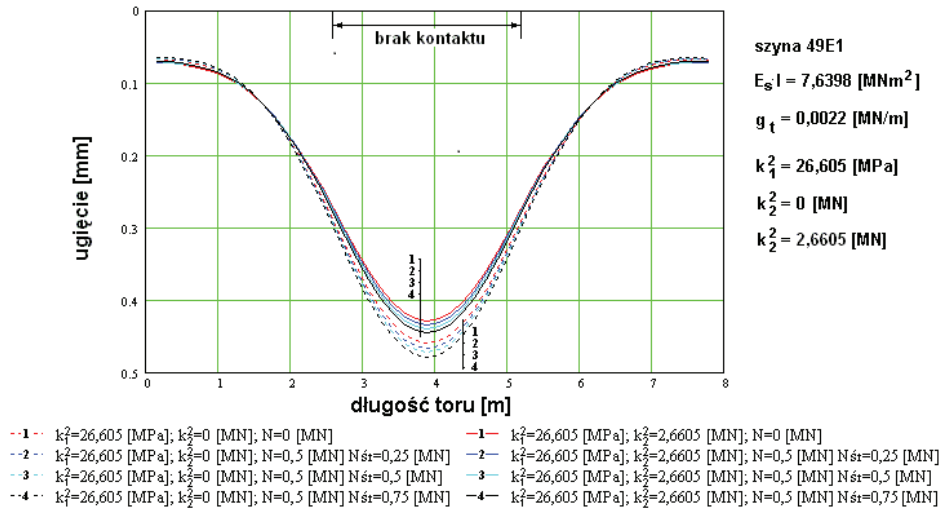
Powyższe macierze mogą być wykorzystane np. do analizy powstających w rzeczywistym torze kolejowym różnych postaci zmian warunków jego pracy dla różnych jego elementów. Zaliczamy do nich m.in.:

- tor jako belka przedziałami spoczywająca na podłożu,
- zmienna wartość ściskającej siły osiowej w torze kolejowym,
- zmienna sztywność elementu toru kolejowego na jego długości (np. podkładu) [8, 9],
- zmienne wartości parametrów podłoża.

3.2. Przykłady obliczeniowe

Na rys. 4 pokazano przykładowe ugięcie długiego, bezстыkowego toru kolejowego z szynami 49E1 spoczywającego na sprężystym podłożu jedno- i dwupara-

metrowym, obliczone metodą elementów skończonych. Założono brak kontaktu toru z podłożem w jego środkowej strefie na długości $4a$, gdzie a jest rozstawem podkładów (przyjęto $a = 0,65$ m).



Rys. 4. Ugięcie szyny dla wycinka nieskończenie długiego toru bezстыkowego z szynami 49E1 pod ciężarem własnym (model ciągły), spoczywającego na sprężystym podłożu jedno- i dwuparametrowym w przypadku braku jego kontaktu z podłożem w środkowej strefie na długości 2,6 m (analiza numeryczna)

Na rysunku brak kontaktu toru z podłożem występuje na odcinku pomiędzy odciętymi 2,6 m a 5,2 m na długości toru kolejowego. Uwzględniono również wpływ ściskającej siły osiowej w torze. Przyjęto cztery warianty zmiany siły ściskającej:

- 1) brak siły podłużnej w torze,
- 2) siła na początku rozpatrywanego odcinka toru ma wartość 0,5 MN maleje liniowo na środku toru do wartości 0,25 MN, po czym ponownie wzrasta liniowo osiągając na końcu toru wartość 0,5 MN,
- 3) stała siła podłużna w torze o wartości 0,5 MN,
- 4) siła na początku rozpatrywanego odcinka toru ma wartość 0,5 MN, wzrasta liniowo na środku toru do wartości 0,75 MN, po czym ponownie maleje liniowo na końcu toru do wartości 0,5 MN,

Jak widać na rys. 4 ugięcie toru jest większe w przypadku podłoża jednoparametrowego i wzrasta wraz ze zwiększaniem siły osiowej panującej w torze kolejowym. Największą wartość ugięcia uzyskano dla 4 wariantu zmiany siły podłużnej (przerwany kolor czarny). Podobnie dla toru na podłożu dwuparametrowym: największą wartość ugięcia uzyskano dla 4 wariantu zmiany siły podłużnej (ciągły kolor czarny), co można tłumaczyć największą wartością siły ściskającej dla tego przypadku.

W przypadku analizy zachowania belki o zmieniającym się przekroju poprzecznym (np. podkład betonowy), należy uwzględnić zmianę sztywności na jej długości. Sztywność elementu takiej belki należy liczyć jako średnią harmoniczną z równania w postaci [10]:

$$EI_{(H)} = \frac{2 \cdot E_1 I_1 \cdot E_2 I_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2}, \quad (9)$$

gdzie:

$E_1 I_1$ - sztywność elementu na jego początku;

$E_2 I_2$ - sztywność elementu na jego końcu.

Obliczenia siły sprężającej podkład dokonano na podstawie [5, 6, 17, 20] wykorzystując równanie:

$$S = n \cdot n_1 \cdot F_{ST} \cdot (\sigma_{zs} - \Delta\sigma_1) \quad (10)$$

gdzie:

S - siła sprężająca,

n - liczba cięgien,

n_1 - liczba strun w cięgnię,

F_{ST} - powierzchnia przekroju struny,

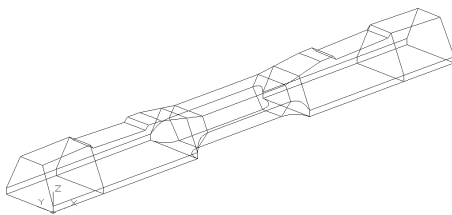
σ_{zs} - naprężenia rzeczywiste w strunach,

$\Delta\sigma_1$ - straty reologiczne wg wzoru: $\Delta\sigma_1 = \varepsilon_{SK} \cdot E_{ST}$

ε_{SK} - skurcz betonu w czasie dojrzewania,

E_{ST} - moduł sprężystości stali.

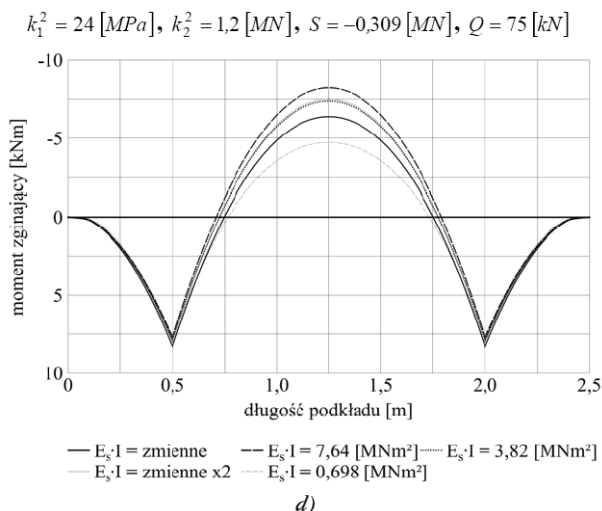
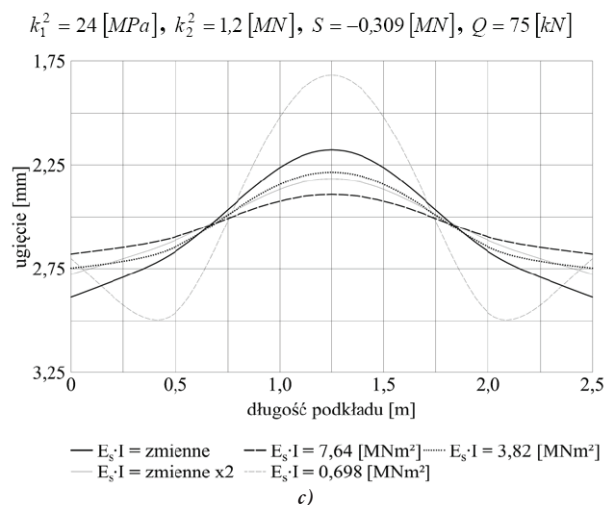
Obliczona wartość siły sprężającej podkład betonowy INBK-7 wynosi: $S = 0,31$ MN [8, 9, 20]. Na rys. 5 pokazano pracę podkładu betonowego na równym (płaskim) dwuparametrowym podłożu sprężystym oraz ugięcia i momenty zginające dla różnych typów podkładów na podłożu dwuparametrowym.



a)



b)



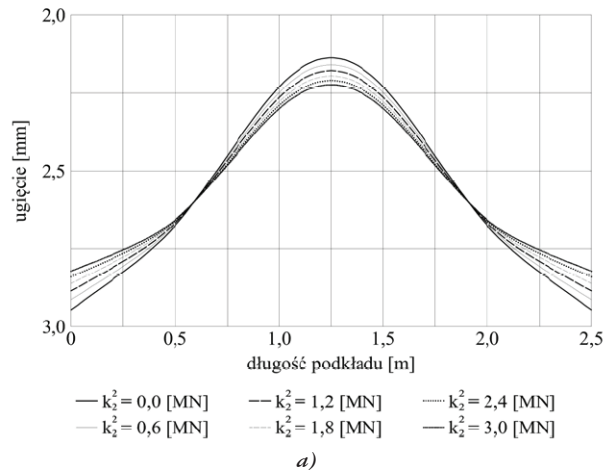
Rys. 5. Ugięcia i momenty zginające dla różnych typów podkładów na podłożu dwuparametrowym (podzielonych na 80 elementów)

a) widok podkładu, b) typowe ugięcie podkładu, c) wpływ sztywności oraz zmienności przekroju na ugięcie, d) wpływ sztywności oraz zmienności przekroju na moment zginający

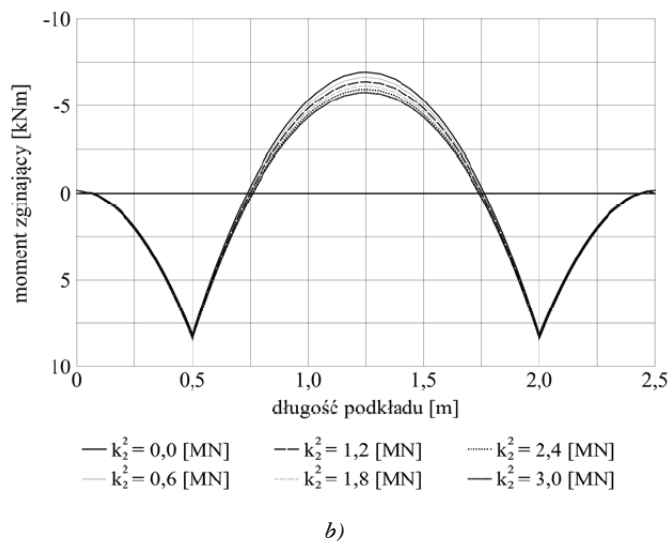
Jak widać przy takich samych wartościach sił przekazywanych na analizowane podkłady, teoretyczne dwukrotne „przesztywnienie” podkładu, nie daje „ewentualnych oczekiwanych efektów”. Zmniejsza się w takim przypadku wprawdzie jego ugięcie, ale ze względu na zwiększającą się sztywność podkładu, wzrasta moment zginający (szczególnie w jego środkowej części). Stała wartość sztywności podkładu również powoduje niekorzystną pracę jego środkowej części. Natomiast podkład o najmniejszej przyjętej sztywności (wykazujący zatem cechy „teoretycznego” podkładu drewnianego), uzyskuje najmniejsze wartości momentu zginającego w środku podkładu.

W przypadku różnych wartości parametrów sprężystego podłoża obserwujemy zmianę warunków pracy obciążonych elementów toru kolejowego (np. podkładu). Jak pokazano na rys. 6, przy takich samych wartościach sił przekazywanych na analizowany podkład, wzrost wartości parametru k_2^2 podłoża powoduje zmniejszenie wartości ugięć podkładu, zarówno na jego początku jak i na jego środku. Ponadto w tym przypadku, uzyskuje się najmniejsze wartości momentu zginającego w środku podkładu. Zmniejszająca się wartość k_2^2 podłoża podkładu powoduje natomiast niekorzystną pracę w jego środkowej części (wzrasta moment zginający w tym przekroju).

$$k_1^2 = 24 \text{ [MPa]}, V = 100 \text{ [km/h]} J = 4,3 \text{ [mm]} \Rightarrow Q = 75 \text{ [kN]}$$



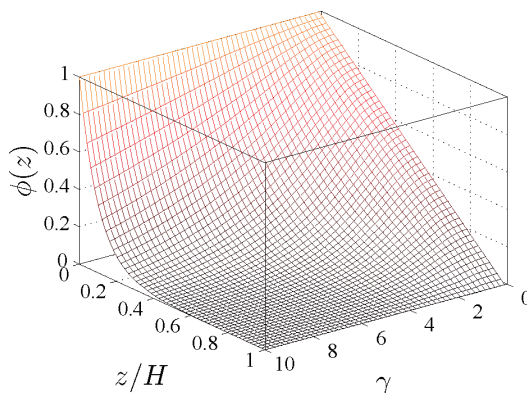
$$k_1^2 = 24 \text{ [MPa]}, V = 100 \text{ [km/h]} J = 4,3 \text{ [mm]} \Rightarrow Q = 75 \text{ [kN]}$$



Rys. 6. Wpływ parametru podłoża k_2^2 na ugięcia i momenty zginające podkładu INBK-7 (przy stałej wartości $k_1^2 = 24 \text{ [MPa]}$, prędkości V , stanie toru J i sile dynamicznej Q)
a) ugięcie podkładu, b) momenty zginające w podkładzie

4. Analiza współczynników sprężystego podłoża dwuparametrowego na podstawie ugięcia betonowego podkładu kolejowego

Do analizy parametrów podłoża dwuparametrowego dla podkładu jako belki spoczywającej na podłożu dwuparametrowym zastosowano zmodyfikowany model Własowa [14, 21]. Na rys. 7 pokazano przebieg funkcji $\phi(z)$ w zależności od parametrów γ i z/H . Odpowiednie wzory mają następującą postać [14, 21]:



Rys. 7. Postacie funkcji $\phi(z)$ względem parametrów γ i z/H [21]

$$\phi(z) = \frac{\sinh \gamma \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{H}\right)}{\sinh \gamma} \quad \gamma^2 = H \cdot \frac{1 - 2 \cdot \nu_s}{2 \cdot (1 - \nu_s)} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} v^2 dx} \quad (11)$$

$$k_1^2 = \frac{(1 - \nu_s) \cdot E_s \cdot b}{(1 + \nu_s) \cdot (1 - 2 \cdot \nu_s) \cdot H} \cdot \gamma \cdot \left(\frac{\sinh \gamma \cdot \cosh \gamma + \gamma}{2 \cdot \sinh^2 \gamma}\right), \quad (12)$$

$$k_2^2 = \frac{E_s \cdot b \cdot H}{2 \cdot (1 + \nu_s)} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{\sinh \gamma \cdot \cosh \gamma - \gamma}{2 \cdot \sinh^2 \gamma}\right), \quad (13)$$

$$\left(\frac{\gamma}{H}\right)^2 = \frac{(1 - 2 \cdot \nu_s) \cdot \int_0^L \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + 0,5 \cdot \sqrt{\frac{k_1^2}{k_2^2}} \cdot v^2(0) + v^2(L)}{\int_0^L v^2(x) dx + 0,5 \cdot \sqrt{\frac{k_2^2}{k_1^2}} \cdot v^2(0) + v^2(L)}. \quad (14)$$

gdzie:

γ – współczynnik do analizy parametrów k_1^2 i k_2^2 podłoża Własowa,

H – pionowy zasięg oddziaływania płyty statycznej,

b – szerokość analizowanego elementu (belki),

$v(x)$ – funkcja ugięcia elementu po jego długości,

E_s, ν_s – moduł odkształcenia i współczynnika Poissona podłoża.

Ponieważ parametr γ musi być znany jeszcze przed wzorem na $\phi(z)$ (11), dlatego może być rozwiązany metodą iteracji. Przyjęcie początkowej wartości γ pozwala wstępnie obliczyć parametry podłoża k_1^2 i k_2^2 z wykorzystaniem równań (12) i (13). Następnie otrzymujemy dzięki tym parametrom linie ugięcia w podłożu, którą opisujemy funkcją $z(x)$. Podstawiając nowe wartości do wzoru (14) otrzymujemy nowe γ i powtarzamy całą operację, aż uzyskamy parametry podłoża k_1^2 oraz k_2^2 , które nie zmieniają się przy przeprowadzaniu kolejnych kroków.

Obliczeniowo istotna zmiana naprężeń pionowych w podtorzu (wpływ na wartości odkształceń) wywołana obciążeniem podtorza równomiernie obciążoną płytą VSS, ma zasięg pionowy oddziaływania od 3,87 do 4,91 średnic D płyty [15]. Przyjęto zatem do dalszych obliczeń wartość głębokości: $H=1,0$ m. Jako główne parametry wpływające na współczynniki podłoża k_1^2 oraz k_2^2 rozpatruje się w dalszej części pracy przede wszystkim dwa parametry E_s i ν_s .

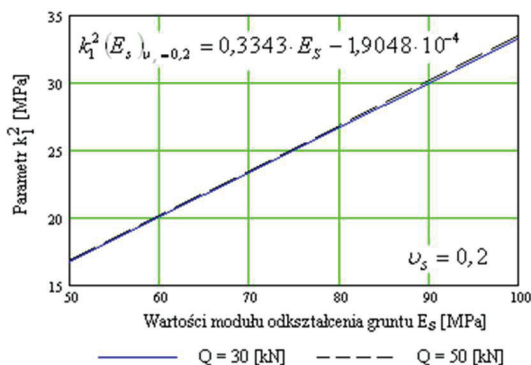
4.1. Wpływ modułu odkształcenia E_s na parametry podłoża dwuparametrowego

Jako główny parametr w tym punkcie przyjęto moduł odkształcenia podtorza E_s . Przyjęto do obliczeń wartości od 50 MPa do 100 MPa, co pozwoliło na opisanie zmian ugięcia podkładu oraz wpływ wartości modułu odkształcenia podtorza na parametry podłoża k_1^2 oraz k_2^2 . Dodatkowo wartości te przeliczono dla dwóch różnych wariantów sił pionowych $Q = 30$ kN oraz $Q = 50$ kN w celu poszerzenia analizy i sprawdzenia wpływu siły Q na otrzymywane wartości. Wyniki zaprezentowano w formie tabeli oraz wykresu. Przyjęto następujące dane do obliczeń:

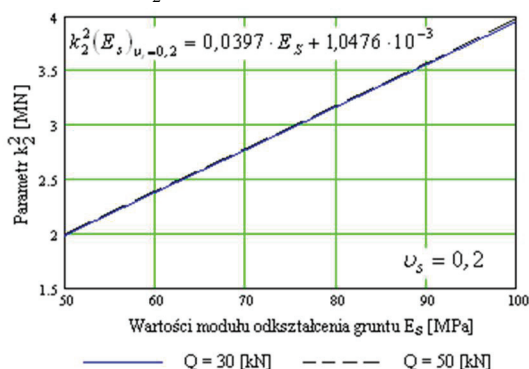
- długość podkładu PS-94: $L = 2,6$ m,
- ilość elementów (podział podkładu metodą MES): $le = 52$,
- moduł Young'a betonu: $E = 35000$ MN/m²,
- siła pionowa działająca na podkład: $Q = 30$ i $Q = 50$ kN,
- siła ściskająca podkład w poziomie: $N = 0,3$ MN,
- ciężar własny podkładu: $q = 0,00102$ MN/m,
- szerokość podparcia podkładu o podłoże: $b = 0,3$ m,
- moduł odkształcenia podtorza: $E_s = 50$ do 100 MPa,
- głębokość pod płytą VSS: $H = 1,0$ m,
- współczynnik Poissona: $\nu_s = 0,2$.

Otrzymano następujące wykresy:

Parametr k_1^2 dla siły $Q = 30$ [kN] i $Q = 50$ [kN]



Parametr k_2^2 dla siły $Q = 30$ [kN] i $Q = 50$ [kN]



Rys. 8. Zależność parametrów k_1^2 i k_2^2 od wartości modułu gruntu E_s przy $\nu_s = 0,2$

Jak widać z rys. 8, parametr podłoża E_s ma znaczący wpływ na wartości parametrów k_1^2 i k_2^2 (zależność $k_1^2(E_s)$ oraz $k_2^2(E_s)$ przy $\nu_s = 0,2$ opisano wzorami). Jak się należało spodziewać, wpływ siły przekazywanej z szyny na podkład na parametry k_1^2 i k_2^2 jest znikomym.

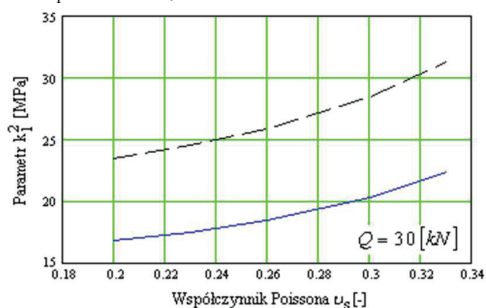
4.2. Wpływ współczynnika Poissona ν_s na parametry podłoża dwuparametrowego

Drugim ważnym parametrem wpływającym na współczynniki k_1^2 i k_2^2 jest współczynnik Poissona ν_s . W obliczeniach przyjmowano wartości w zakresie od 0,2 do 0,33. Analizowano zmiany ugięcia podkładu oraz zmiany parametrów k_1^2 i k_2^2 . Przyjęto również różne wartości modułu odkształcenia podtorza E_s przy tej samej wartości siły przekazywanej z szyny na podkład. Przyjęto następujące dane do obliczeń:

- długość podkładu PS-94: $L = 2,6$ [m],
- ilość elementów (podział podkładu metodą MES): $le = 52$,

- moduł Young'a betonu: $E = 35\,000\text{ MN/m}^2$,
- siła pionowa: $P = 30\text{ kN}$,
- siła ściskająca podkład w poziomie: $N = 0,3\text{ MN}$,
- ciężar własny podkładu: $q = 0,00102\text{ MN/m}$,
- szerokość podparcia podkładu o podłoże: $b = 0,3\text{ m}$,
- moduł odkształcenia podtorza: $E_s = 50\text{ i }70\text{ MPa}$,
- głębokość pod płytą VSS: $H = 1,0\text{ m}$,
- współczynnik Poissona: $\nu_s = 0,2\text{ do }0,33$.

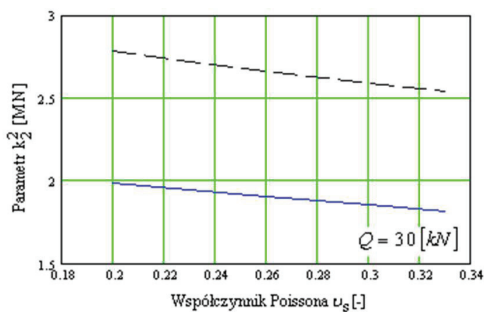
Parametr k_1^2 dla różnych wartości modułów odkształcenia E_s



$$\text{— } E_s = 50 [\text{MPa}] \quad k_1^2(\nu_s)_{E_s=50} = 454,02444 \cdot \nu_s^{383649} + 15,79299$$

$$\text{--- } E_s = 70 [\text{MPa}] \quad k_1^2(\nu_s)_{E_s=70} = 635,48039 \cdot \nu_s^{383627} + 22,10998$$

Parametr k_2^2 dla różnych wartości modułów odkształcenia E_s



$$\text{— } E_s = 50 [\text{MPa}] \quad k_2^2(\nu_s)_{E_s=50} = 3,38838 \cdot \nu_s^{-0,09065} - 1,9328$$

$$\text{--- } E_s = 70 [\text{MPa}] \quad k_2^2(\nu_s)_{E_s=70} = 4,75032 \cdot \nu_s^{-0,09033} - 2,71145$$

Rys. 9. Zależność parametrów k_1^2 i k_2^2 od wartości współczynnika Poissona ν_s przy $Q = 30\text{ kN}$

Jak widać z rys. 9, parametry podłoża E_s oraz ν_s mają znaczący wpływ na wartości parametrów k_1^2 i k_2^2 (zależność $k_1^2(\nu_s)$ oraz $k_2^2(\nu_s)$) opisano z wykorzystaniem funkcji w postaci $f(x) = a \cdot x^b + c$.

5. Podsumowanie i wnioski końcowe

Na podstawie przeprowadzonej analizy można sformułować następujące wnioski:

1. Przedstawiono macierze sztywności dla elementu belkowego spoczywającego na dwuparametrowym podłożu gruntowym, z uwzględnieniem ciężaru własnego oraz działającej siły ściskającej. Do analizy zmiennej sztywności podkładu po jego długości zastosowano wzór na sztywność harmoniczną.
2. Przeanalizowano ściskany siłą N podkład INBK-7, podzielony na 80 elementów, na który przekazywana jest siła Q , zmienna podczas eksploatacji toru. Uzależniono ją głównie od kategorii linii, prędkości i aktualnego stanu toru, określonego syntetycznym wskaźnikiem J .
3. Analiza wpływów parametrów k_1^2 oraz k_2^2 pokazuje, jak ważne znaczenie ma zagęszczenie podłoża podsypkowego zarówno po jego długości (k_2^2), jak i pod podkładem (k_1^2) (rys. 6). Decydujące znaczenie ma przede wszystkim parametr k_1^2 , znacznie mniejsze parametry k_2^2 .
4. Analiza zmiennej sztywności (rys. 5), pozwala stwierdzić, że ewentualne „przesztywnianie” podkładu nie przynosi „ewentualnych oczekiwanych efektów”. Ponadto analiza sztywności pokazuje, że podkład o mniejszej sztywności (kolor czarny) znacznie łatwiej przejmuje obciążenia przekazywane z szyny. Za taki podkład można uznać „teoretycznie podkład drewniany”, który znacznie lepiej pracuje w warunkach, gdy podłoże ma tendencję do odkształceń.
5. Zamieszczone w pracy macierze pozwalają na analizę zmiennego (na długości podkładu), zagęszczenia podłoża (k_1^2 i k_2^2), nacisków na toki szynowe czy rozkładu siły osiowej w podkładzie.
6. Na podstawie linii ugięcia podkładu, przedstawiono metodę określania współczynników podłoża dwuparametrowego: k_1^2 i k_2^2 w zależności od dwóch głównych parametrów: E_s i v_s . Wyniki przykładowych obliczeń przedstawiono na rys. 8 i 9.
7. W analizie pominięto zmienną - wytrzymałość podkładu podczas jego eksploatacji. Aspekt ten można uwzględnić np. poprzez uwzględnienie zmieniających się charakterystyk geometrycznych podkładu, czy w zależności od wieku podkładów – poprzez zastosowanie współczynnika γ_p (syntetyczny wyraz narastania uszkodzeń podkładu) [4].

Bibliografia

- [1] Al-Azzawi A.A., Shaker A.S., Finite difference analysis of curved deep beams on Winkler foundation. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences, Vol. 6, No. 3, 2011.
- [2] Bałuch H., Sposoby wyznaczania charakterystyk podłoża kolejowego. Problemy Kolejnictwa z. 39, Warszawa, WKiŁ 1967.

- [3] Bałuch M., Estymacja nierówności toru kolejowego. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 1989, nr 3-4.
- [4] Bałuch M., Ustalanie dopuszczalnych nacisków osi i maksymalnych prędkości na liniach PKP. *Prace Centrum Naukowo-Technicznego Kolejnictwa*, zeszyt 139, Warszawa, 2003,
- [5] Basiewicz T., Tor kolejowy na podkładach betonowych. *Wydawnictwa Komunikacji i Łączności*, Warszawa 1963.
- [6] Basiewicz T., Nawierzchnia kolejowa z podkładami betonowymi. *Wydawnictwa Komunikacji i Łączności*, Warszawa 1969.
- [7] Beaufait F. W., Hoadley P. W., Analysis of elastic beams on nonlinear foundation. *Computers&Structures*, Vol. 12, No. 5, 1980.
- [8] Bednarek W., The analysis of the influence of variable roadbed stiffness and support of railway sleeper on its work. *Foundations of Civil and Environmental Engineering (FCEE)*, Poznan University of Technology, No. 13, 2010.
- [9] Bednarek W., Analiza wpływu podłoża i sposobu podparcia na pracę podkładu kolejowego. *Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej (Archives of Institute of Civil Engineering)*, Poznań University of Technology, 9/2011.
- [10] Buczkowski W., Rozwiązywanie belek o zmiennej sztywności metodą różnic skończonych. *Architectura*, 8 (3-4), 2009.
- [11] Celep Z., Demir F., Symmetrically loaded beam on a two-parameter tensionless foundation. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 27, No. 5, 2007.
- [12] Eisenberger M., Yankelevsky D. Z., Exact stiffness matrix for beams on elastic foundation. *Computers&Structures*, Vol. 21, No. 6, 1985.
- [13] Ganowicz G., Lewandowski R., Świtka R., Ładzińska-Depko M., Analiza belki na podłożu sprężysto-plastycznym z więzami jednostronnymi, *Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej* Nr 31, Poznań 1988.
- [14] Mullapudi R., Ayoub A., Nonlinear finite element modeling of beams on two-parameter foundations. *Computers&Geotechnics*, 37, 2010.
- [15] Pawłowski M., Zależność wskaźnika zagęszczenia od wskaźnika odkształcenia kruszyw na podstawie próbnych obciążeń płytą statyczną. *Rozprawa doktorska*, Poznań, 2011.
- [16] PKP. Przepisy Id-1 (D-1) Warunki techniczne utrzymania nawierzchni na liniach kolejowych, Warszawa, 2005.
- [17] PN-B-03264,2002 Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie, Warszawa 2002.
- [18] Sancewicz S., Nawierzchnia kolejowa. *Wojskowa Akademia Techniczna*, Warszawa, 2010.
- [19] Szafrąński W., Pionowe odkształcenia dynamiczne rozjazdu kolejowego. VII Konferencja Naukowa „Drogi kolejowe’93”, Wrocław-Szklarska Poręba, 1993.
- [20] Szumierz W., Wpływ odkształceń podłoża górniczego na pracę podkładu betonowego. *Drogi Kolejowe* nr 4/91.

-
- [21] Teodoru I-B., Muşat V., Beam elements on linear variable two-parameter elastic foundation. Buletinul Institutului Politehnic Din Iaşi, Tomul LIV (LVIII), Fasc. 2, 2008.
 - [22] Ting B. Y., Finite beams on elastic foundation with restraints. J. Struct. Div. (Journal of Structural Engineering), Proc. ASCE (American Society of Civil Engineers), 108, 1982.
 - [23] Towpik K., Infrastruktura drogi kolejowej. Obciążenia i trwałość nawierzchni. Biblioteka Problemów Eksploatacji. Warszawa-Radom, 2006.