

Obliczanie i sprawdzanie liniowych obwodów elektrycznych prądu stałego

Tomasz Stoeck

W artykule omówiono wybrane metody rozwiązywania liniowych obwodów elektrycznych, które porównawczo przedstawiono na elementarnym przykładzie obliczeniowym. Uzyskane wyniki sprawdzono analitycznie sporządzając bilans mocy, jak również przy wykorzystaniu aplikacji do symulacji komputerowej.

Słowa kluczowe: obwody elektryczne, metody obliczeniowe, program komputerowy.

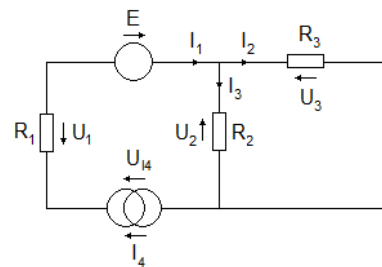
Wstęp

Celem analizy obwodów elektrycznych jest najczęściej wyznaczenie rozkładów napięć i rozplywu prądów płynących do odbiorników przy włączonych źródłach wymuszających [3]. Do obliczeń wykorzystuje się różne metody, w tym m.in.: równań Kirchhoffa, superpozycji (nakładania), prądów oczkowych oraz napięć węzłowych. Można je stosować w sytuacji, kiedy charakterystyki prądowo-napięciowe wszystkich elementów są liniowe [1, 2, 6]. Wybór uzależniony jest zazwyczaj od stopnia skomplikowania rozpatrywanego układu (liczby gałęzi, węzłów, źródeł), zakładanego efektu końcowego oraz indywidualnych preferencji. Stanowi to jednak kwestię drugorzędą, gdyż wszystkie techniki są sobie równoważne i prowadzą do identycznych wyników. Ponadto współcześnie obserwowany rozwój komputerów osobistych i dostępnego oprogramowania sprawił, iż część analiz prowadzi się przy zupełnym pominięciu rachunkowości ręcznej. Dotyczy to jednak przede wszystkim obwodów rozgałęzionych (złożonych), dla których klasyczne obliczenia byłyby zbyt czasochłonne i uciążliwe.

1. Zakres i metodyka

Obliczenia przeprowadzono na przykładzie przedstawionym na rys. 1. Ich celem było oszacowanie wartości wszystkich prądów gałęziowych (I_1, I_2, I_3) oraz spadku napięcia na źródle prądowym (U_{I4}). Przyjęto następujące dane: $R_1=10\Omega, R_2=20\Omega, R_3=30\Omega, E=5V, I_4=0,1A$.

Do analizy rachunkowej wybrano trzy metody, które sprawdzono sporządzając bilans mocy i przy wykorzystaniu narzędzia internetowego, umożliwiającego narysowanie oraz symulację badanego obwodu. Z uwagi na prostotę obsługi wybrano darmową aplikację *Circuit Simulator*, dostępną na platformach stacjonarnych oraz mobilnych [10].



Rys. 1. Schemat analizowanego przykładu obliczeniowego

2. Metoda równań Kirchhoffa (klasyczna)

W pierwszym kroku na rys. 1 oznaczono strzałkami: szukane prądy gałęziowe, napięcia na rezystorach (w kierunku przeciwnym) oraz źródła prądowe (w kierunku zgodnym). Dla węzła górnego ułożono równanie wg pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

Zastosowanie źródła wymuszającego na jednej z gałęzi sprawia, że prąd I_1 jest znany i wynosi:

$$I_1 = I_4 = 0,1A$$

Następnie dla obu oczek ułożono równania wg drugiego prawa Kirchhoffa:

$$E + U_{I4} - R_2 I_2 - R_1 I_1 = 0 \quad (2)$$

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \quad (3)$$

Powstały układ trzech równań rozwiązano klasyczną techniką podstawiania:

$$I_3 = \frac{R_2 I_2}{R_3} \quad (4)$$

stąd

$$I_1 - I_2 - \frac{R_2 I_2}{R_3} = 0 \quad (5)$$

Po przekształceniu i wykonaniu działań uzyskano:

$$I_2 = 0,06A$$

Z równania (1) obliczono również prąd gałęziowy I_3 :

$$I_1 - I_2 = I_3 = 0,04A$$

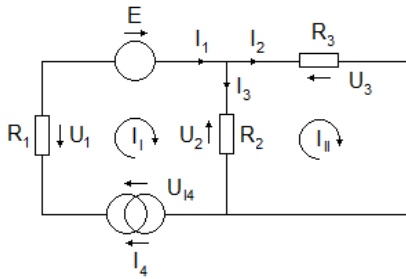
Spadek napięcia na źródle prądowym U_{I4} oszacowano z drugiego prawa Kirchhoffa dla pierwszego oczka:

$$U_{I4} = R_2 I_2 + R_1 I_1 - E = -2,8V \quad (6)$$

Podsumowując można stwierdzić, iż metoda klasyczna powinna być raczej stosowana do rozwiązywania prostych obwodów elektrycznych. Należy w niej bowiem ułożyć dokładnie tyle niezależnych równań matematycznych, ile jest szukanych prądów gałęziowych.

3. Metoda prądów oczkowych

W technice tej przyjmuje się założenie, że każdy prąd gałęziowy (indeksy arabskie) stanowi wypadkową domyślnych prądów oczkowych (indeksy rzymskie), które zamykają się w obrębie oczka. Ponieważ są one tworamı fikcyjnymi, ustala się jednolity kierunek strzałek (rys. 2).



Rys. 2. Zaznaczenie prądów oczkowych na schemacie

Następnie wszystkie prądy gałęziowe zastępujemy prądami oczkowymi:

$$I_1 = I_4 = I_I = 0,1A \quad (7)$$

$$I_2 = I_I - I_{II} \quad (8)$$

$$I_3 = I_{III} \quad (9)$$

Po ich podstawieniu do równań (2) i (3) otrzymamy zależności, które można uporządkować do postaci:

$$R_1 + R_2 I_I - R_2 I_{II} = E + U_{I4} \quad (10)$$

$$R_2 + R_3 I_{III} - R_2 I_I = 0 \quad (11)$$

Z równania (11) wyznaczamy prąd oczkowy I_{III} :

$$I_{III} = I_3 = 0,04A$$

stąd

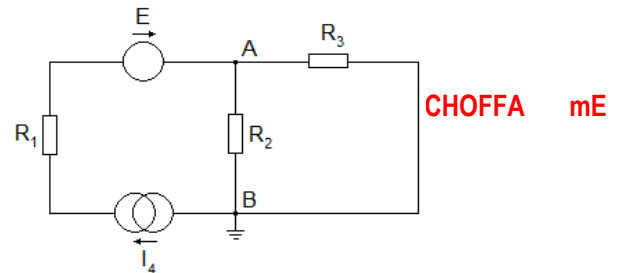
$$I_2 = I_I - I_{II} = 0,06A$$

W ostatnim etapie oszacować można spadek napięcia na źródle prądowym:

$$R_1 + R_2 I_I - R_2 I_{II} - E = U_{I4} = -2,8V$$

4. Metoda potencjałów węzłowych

Każdy węzeł w obwodzie ma pewien potencjał, który oznacza się literami łacińskimi. Rozpływ prądów i rozkład napięć nie zależy od ich bezwzględnej wartości, lecz jedynie od różnic między nimi. Stąd przyjmuje się jeden węzeł odniesienia o potencjałe równym 0V, który na schemacie oznaczany jest symbolem uziemienia, co wpływa na znaczne uproszczenie procedury obliczeń (rys. 3).



Rys. 3. Wybór i oznaczenie węzła odniesienia

Prądy wyrażane są przez napięcia, a te przez różnice potencjałów:

$$I_1 = \frac{U_{I4} + E + V_A}{R_1} \quad (12)$$

$$I_2 = \frac{V_A}{R_2} \quad (13)$$

$$I_3 = \frac{V_A}{R_3} \quad (14)$$

Z pierwszego równania Kirchhoffa (1) wynika:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

a po podstawieniu (12), (13) i (14) uzyskamy:

$$\frac{U_{I4} + E + V_A}{R_1} = \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_A}{R_3} \quad (15)$$

Korzystając z danych liczbowych obliczamy potencjał pierwszego węzła i pozostałe prądy:

$$V_A = 1,2V$$

$$I_2 = 0,06A$$

$$I_3 = 0,04A$$

W ostatnim kroku z równania (15) uzyskamy wartość U_{I4} :

$$U_{I4} = -2,8V$$

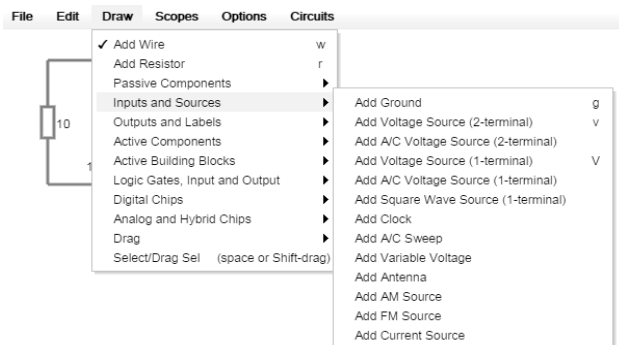
5. Sprawdzenie poprawności obliczeń

Analizowany przykład został rozwiązany trzema, różnymi metodami. W praktyce wybiera się jedną z nich, a dla sprawdzenia uzyskanych wyników sporządzany jest tzw. bilans mocy. Przy założonych wcześniej danych otrzymamy:

$$P_{zr} = EI_1 + U_{I4}I_1 = 0,22W \quad (16)$$

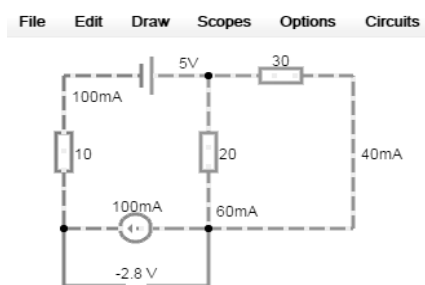
$$P_{odb} = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2 = 0,22W \quad (17)$$

Wykonane obliczenia wykazały, że suma mocy oddawanych przez źródła jest równa sumie mocy pobieranych przez odbiorniki. Proces ten można jednak uprościć, przenosząc omawiany schemat do środowiska cyfrowego. Do tego celu wybrano aplikację *Circuit Simulator*, która nie wymaga instalacji na dysku twardym komputera i jest dostępna z poziomu przeglądarki internetowej. To darmowe, wieloplatformowe narzędzie cechuje prostota i łatwość obsługi, jak również zasób bibliotek systemowych do tworzenia elementarnych obwodów elektrycznych (rys. 4).



Rys. 4. Przykładowe biblioteki aplikacji Circuit Simulator

Budowa układu przebiega w sposób intuicyjny, podobnie jak zmiana parametrów oraz przebiegów wejściowych. Dzięki dynamicznym animacjom symulacja obwodu pozwala na obserwację rozprywu prądów i bieżącą analizę zachodzących procesów (rys. 5).



Rys. 5. Symulacja obwodu ze wskazaniem wybranych danych

W chwili obecnej dostępnych jest wiele programów do tworzenia i symulacji obwodów elektrycznych, które różnią funkcjonalnością oraz zastosowaniem. Ich największą zaletą stanowi możliwość wielokrotnego powtarzania eksperymentu bez ponoszenia dodatkowych kosztów, co mogłoby być trudne do uzyskania w warunkach rzeczywistych [4, 5, 7, 8, 9].

Podsumowanie

Wybór określonej metody obliczeniowej związany jest z poniesionym nakładem pracy, a więc liczbą generowanych równań i przeprowadzonych działań matematycznych. W tym względzie najmniej korzystnie wypada technika klasyczna, której wykorzystanie staje się kłopotliwe w przypadku obwodów rozgałęzionych. Wybiera się więc inne rozwiązania ze szczególnym uwzględnieniem dedykowanych aplikacji i programów komputerowych, znacznie ułatwiających ich tworzenie oraz symulację. Pozwalają one nie tylko na sprawdzenie obliczeń, ale również uzyskanie wyników końcowych z pominięciem etapu rachunkowości.

Bibliografia

- Boylestad R. L.: *Introductory Circuit Analysis*. Pearson Education Limited. Harlow 2016.
- Hempowicz P., Kielsznia R., Piłatowicz A., Szymczyk J., Tomborowski T., Wąsowski A., Zielińska A., Żurawski W.: *Elektrotechnika i elektronika dla nieelektryków*. WNT. Warszawa 2004.
- Kurdziel R.: *Podstawy elektrotechniki*. WNT. Warszawa 1965.
- Noga K. M.: *Pakiet MULTISIM - zaawansowane przykłady zastosowania w dydaktyce*. Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej. Nr 28. Gdańsk 2010.
- Noga K. M., Radwański M.: *Zastosowanie pakietu MULTISIM w dydaktyce techniki cyfrowej*. Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Gdyni. Nr 6. Gdynia 2009.
- Pacholski K.: *Elektryczne i elektroniczne wyposażenie pojazdów samochodowych*. Tom 1. WKiŁ. Warszawa 2011.
- Ścibisz M., Kapica J.: *Zastosowanie programu MULTISIM do analizy pracy układów energoelektronicznych stosowanych w rolnictwie*. Inżynieria Rolnicza 2 (90) 2007.
- Szczepański A., Trojnar M.: *Symulator obwodów elektrycznych oparty na aplecie Java*. XVI Conference Computer Applications in Electrical Engineering ZKwE'2011. Poznań 2011.
- Trojnar M.: *Internetowe symulatory obwodów elektrycznych*. *Pomiary-Automatyka-Kontrola* 59/10 2013.
- <http://www.falstad.com/circuit>.

Autor:

Dr inż. **Tomasz Stoeck** – Zachodniopomorski Uniwersytet Techniczny w Szczecinie.

Calculation and checking of linear circuits DC

The article discusses some methods for solving linear electrical circuits that comparatively shown in the example of an elementary calculation. The results were checked analytically preparing the balance of power, as well as using a computer simulation program.

Key words: electrical circuits, computational methods, computer program