

Dominik MATECKI\*

## PORÓWNANIE METOD PROJEKTOWANIA FILTRÓW CYFROWYCH

W artykule zostały zaprezentowane wybrane metody projektowania filtrów cyfrowych SOI i NOI. Celem niniejszego porównania było przedstawienie podobieństw oraz różnic filtrów o zbliżonych parametrach, zaprojektowanych różnymi metodami. Przedstawiono teoretyczne podstawy filtracji cyfrowej. Badane filtry zaprojektowano z wykorzystaniem środowiska Matlab. Szczególną uwagę poświęcono charakterystykom amplitudowo-fazowym filtrów oraz stopniu złożoności omówionych algorytmów.

SŁOWA KLUCZOWE: filtry cyfrowe, próbkowanie, Matlab, charakterystyka amplitudowo-fazowa, FIR, IIR.

### 1. WSTĘP

W technice przetwarzania sygnałów powszechnie wykorzystywane są filtry cyfrowe. Spełniają te same funkcje dla sygnałów cyfrowych jak ich odpowiedniki analogowe, zbudowane z elementów biernych lub wykorzystujących wzmacniacze operacyjne. Zadaniem obydwu rodzajów filtrów jest rozdzielanie sygnałów, często niepożądanych, z badanego sygnału oraz odtwarzanie sygnałów odkształconych [1].

Realizację filtrów cyfrowych można dokonać poprzez splot sygnału wejściowego z odpowiedzią impulsową filtru cyfrowego lub poprzez rekursję, czyli metodę uwzględniającą zarówno wartości próbek obliczonych z wyjścia filtru jak i pobranych z wejścia. Filtr uzyskany pierwszą z opisanych metod nazywamy filtrem o skończonej odpowiedzi impulsowej (NOI, ang. FIR), natomiast drugą metodą- filtrem o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (SOI, ang. IIR) [1, 2]. Obydwie metody mają swoje mocne i słabe strony oraz charakterystyczne dla nich cechy, które zostaną pokrótce omówione w kolejnych rozdziałach.

Niniejsza praca ma na celu przybliżenie Czytelnikowi podstaw filtracji cyfrowej oraz przedstawienie wyników badań symulacyjnych filtrów SOI i NOI. Szczególną uwagę poświęcono algorytmom realizacji tych filtrów i porównanie ich właściwości przy podobnych założeniach, takich jak rząd badanego filtru czy typ odpowiedzi. W kolejnych rozdziałach zostaną przedstawione badane

---

\* Politechnika Poznańska

algorytmy filtrów cyfrowych, wyniki w postaci charakterystyk uzyskanych w środowisku Matlab oraz podsumowanie badań.

### 1.1. Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej

Filtr o skończonej odpowiedzi impulsowej (SOI, ang. Finite Impulse Response) opisany jest następującą transmitancją:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)z^{-n} = \frac{z^{M-1}}{z^{M-1}} \sum_{n=0}^{M-1} h(n)z^{-n} = \frac{\sum_{n=0}^{M-1} h(n)z^{M-1-n}}{z^{M-1}} \quad (1)$$

Kolejne współczynniki filtru  $h(n)$ , gdzie  $0 \leq n \leq (M-1)$ , są równe kolejnym próbkom odpowiedzi impulsowej. Charakterystyka częstotliwościowa tego filtru ma postać:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad (2)$$

Cechami filtru typu FIR są: stabilność, brak sprzężenia zwrotnego, możliwość uzyskania liniowej charakterystyki fazowej, prostota projektowania, duża złożoność obliczeniowa (w porównaniu z filtrami o nieskończonej odpowiedzi impulsowej) [1, 2, 3].

### 1.2. Filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej

Filtr o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (NOI, ang. Infinite Impulse Response) opisany jest następującą transmitancją:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (3)$$

Cechami filtru typu IIR są: obecność sprzężenia zwrotnego i wynikająca z tego możliwość niestabilności filtru, mniejsza liczba współczynników wymagana do uzyskania zadanej charakterystyki amplitudowej w porównaniu z filtrem FIR. Wynikiem mniejszej liczby współczynników jest również mniejsza złożoność obliczeniowa. Filtry IIR natomiast nie gwarantują liniowej charakterystyki fazowej.

W dalszej części artykułu zostaną zaprezentowane wybrane wyniki badań realizacji filtrów cyfrowych FIR i IIR [1, 2, 3].

## 2. BADANIA FILTRÓW FIR I IIR

W celu porównania poszczególnych filtrów założono następujące parametry: badany filtr będzie filtrem dolnoprzepustowym o paśmie przenoszenia od 0 do 9800 Hz, paśmie zaporowym od częstotliwości 10 kHz do nieskończonej, szerokości pasma przepustowego równej 3 dB, paśmie zaporowym o amplitudzie 80 dB. Częstotliwość próbkowania została określona na poziomie 200 kHz.

Sprawdzono łącznie sześć metod projektowania filtrów, po trzy na filtry FIR oraz IIR. Sprawdzono, jaki rząd filtru jest konieczny do uzyskania powyższych wymagań oraz jak zmieniają się charakterystyki amplitudowe i fazowe w poszczególnych przypadkach. Ponadto sprawdzono zachowanie filtrów na wymuszenia w postaci skoku jednostkowego oraz impulsu.

Informacje dotyczące badanych filtrów oraz założonych parametrów zamieszczono w tabeli 1.

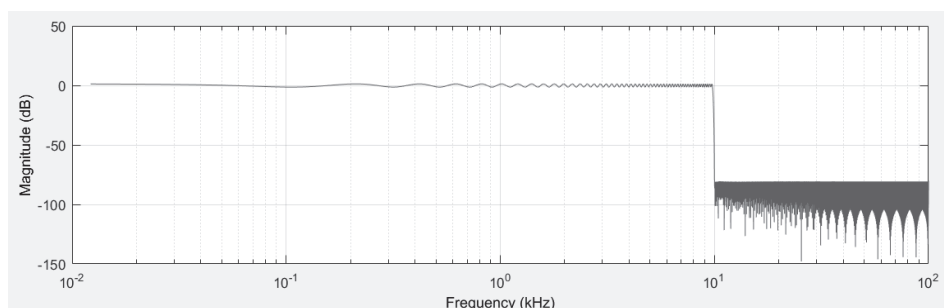
Tabela 1. Badane filtry oraz założone parametry.

Założone parametry	Typ odpowiedzi: dolnoprzepustowy Częstotliwość próbkowania $f_s$ : 200 kHz Częstotliwość końcowa pasma przenoszenia $f_{pass}$ : 9,8 kHz Częstotliwość początku pasma zaporowego $f_{stop}$ : 10 kHz Zakres tętnień w paśmie przepustowym $A_{pass}$ : 3 dB Tłumienie w paśmie zaporowym $A_{stop}$ : 80 dB			
Typ filtru	FIR		IIR	
Metoda projektowania	Equiripple	Window-Kaiser	Butterworth	Chebyshev
Charakterystyka amplitudowa	Rys. 1	Rys. 3	Rys. 5, 7	Rys. 8, 10
Charakterystyka fazowa	Rys. 2	Rys. 4	Rys. 6	Rys. 9

Badania poszczególnych filtrów przeprowadzono w środowisku Matlab.

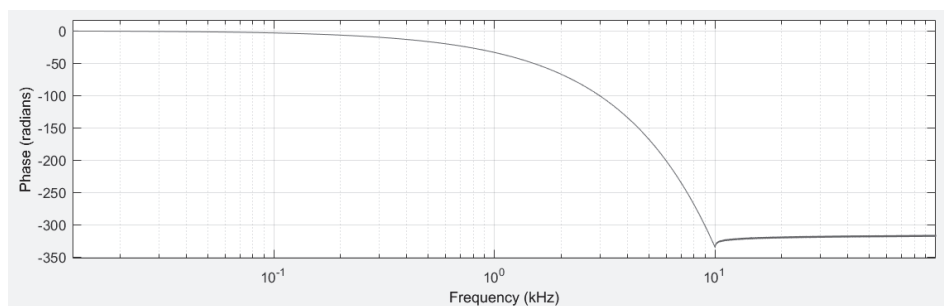
### 2.1. Filtry FIR

Na rysunku 1 przedstawiono charakterystykę amplitudową filtru FIR wykonanego metodą equiripple.



Rys. 1. Charakterystyka amplitudowa filtra FIR- metoda equiripple. Rząd filtra: 2137

Na kolejnym rysunku zamieszczono charakterystykę fazową badanego filtra.



Rys. 2. Charakterystyka fazowa filtra FIR- metoda equiripple. Rząd filtra: 2137

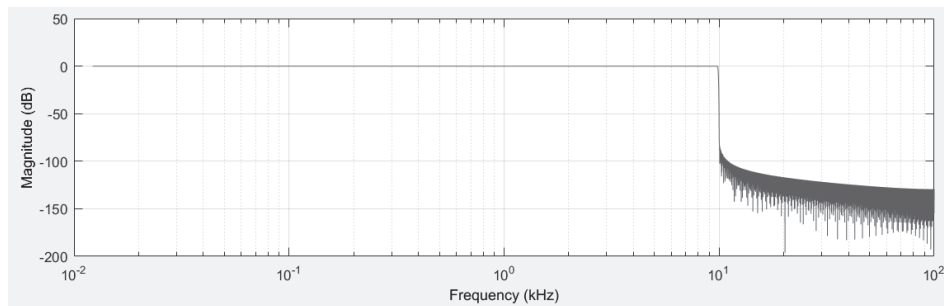
Filtr ten uzyskano poprzez algorytm Parksa-McClellana. Bazuje na doborze optimum aproksymacji Czebyszewa [4]. Celem tej metody jest przybliżenie idealnego kształtu dwóch rozdzielonych interwałów częstotliwości i pozwala na określenie częstotliwości brzegowych. Ułatwia ona rozwiązanie problemu nieciągłości charakterystyki amplitudowej pomiędzy pasmem przepuszczania i zaporowym.

W paśmie przepustowym widoczne są charakterystyczne zafalowania, które mieszczą się w założonej szerokości amplitudy 3 dB. Przejście między pasmem przepustowym a zaporowym jest niemalże natychmiastowe. Powyżej częstotliwości granicznej charakterystyka ma kształt licznie, sąsiadujących blisko ze sobą zafalowań w kształcie parabol, których szczyty znajdują się na poziomie minus 80 dB, natomiast ramiona sięgają od minus 100 dB do nawet minus 150 dB. Amplituda tych zafalowań wzrasta wraz ze wzrostem częstotliwości od częstotliwości granicznej aż do około 60 kHz, gdzie ich wartość pozostaje stała.

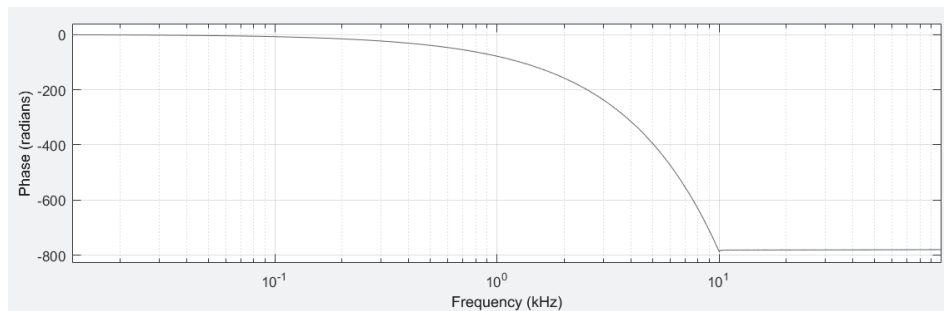
Charakterystyka fazowa jest liniowa (na rysunku wykres jest narysowany w skali logarymicznej). W paśmie przepustowym przesunięcie fazowe zmienia się od  $0^\circ$  do około minus  $330^\circ$ . Zauważalne jest charakterystyczne zagięcie w kształcie haczyka powyżej częstotliwości 10 kHz- w okolicy tej częstotliwo-

ści krzywa charakterystyki fazowej w zauważalnym stopniu podnosi się, aby później utrzymać się na poziomie  $-320^\circ$ . Charakterystyka fazowa w paśmie zaporowym ma kształt fali trójkątnej. Wartość przesunięcia zmienia się tu o trzy stopnie (od  $-319^\circ$  do  $-322^\circ$ ).

Kolejnym badanym filtrem FIR był filtr uzyskany poprzez metodę okienkowania z użyciem okna Kaisera. Uzyskane charakterystyki zostały przedstawione na rysunkach 3 oraz 4.



Rys. 3. Charakterystyka amplitudowa filtru FIR- metoda okna Kaisera. Rząd filtru: 5019



Rys. 4. Charakterystyka fazowa filtru FIR- metoda okna Kaisera. Rząd filtru: 5019

Okno Kaisera jest zdefiniowane wzorem:

$$w(n, \beta) = \frac{I_0 \left[ \beta \cdot \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{M-1}\right)^2} \right]}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq M-1 \quad (3)$$

$I_0(x)$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessela rzędu zerowego. Parametr  $\beta$  określa szerokość pierwszego listka bocznego okna oraz szerokość pasma przejściowego filtru.

Zastosowanie funkcji okna wpływa na poziom zafalowania w paśmie przepuszczania i minimalne tłumienie w paśmie zaporowym. Polega ona na prze-

mnożeniu ciągu próbek przez funkcję okna. W ten sposób otrzymuje się filtr cyfrowy typu FIR o pożądanym parametrach.

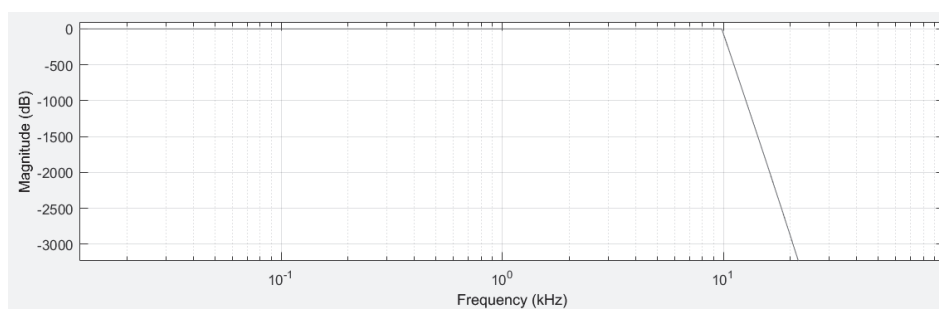
Widać wyraźnie, że filtr wykonany z użyciem okna Kaisera ma bardzo stromą charakterystykę amplitudową. Ponadto, w paśmie przenoszenia, charakterystyka ta jest zupełnie płaska. Nie są widoczne zafalowania w tym paśmie, w odróżnieniu od filtru wykonanego metodą equiripple. Część charakterystyki w paśmie zaporowym osiąga większą wartość tłumienia niż badany wcześniej filtr. Tłumienie w tym przypadku wynosi od około 100 dB do powyżej 150 dB. Należy zaznaczyć, że w przypadku częstotliwości 20 kHz oraz 100 kHz wartość tłumienia osiąga prawie 200 dB.

Charakterystyka fazowa filtru uzyskanego metodą okna Kaisera jest zbliżona kształtem do charakterystyki filtru uzyskanego metodą equiripple. Różnica polega na wartości przesunięcia- w przypadku pierwszego filtru wartość przesunięcia dla częstotliwości 10 kHz wynosi  $-800^\circ$  (dla przypomnienia: poprzedni filtr wprowadzał dla tej częstotliwości przesunięcie  $-330^\circ$ ). Ponadto nie ma tak wyraźnego zagięcia charakterystyki fazowej powyżej częstotliwości 10 kHz. Brak jest również zafalowań w paśmie zaporowym.

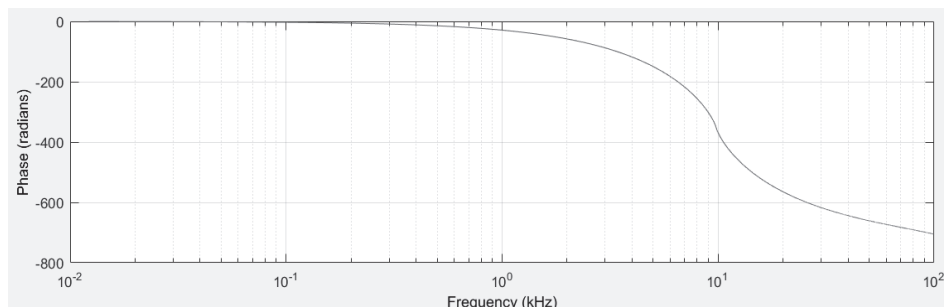
Oba badane filtry typu FIR mają bardzo wysoki rząd, powyżej 1000. Większym rzędem charakteryzuje się filtr uzyskany metodą okna Kaisera, który jest prawie dwukrotnie wyższy niż filtru uzyskanego metodą equiripple.

## 2.1. Filtry IIR

Pierwszym zbadanym filtrem typu IIR był filtr Butterwortha. Na rysunkach 5 i 6 przedstawiono jego charakterystyki amplitudowe i fazowe

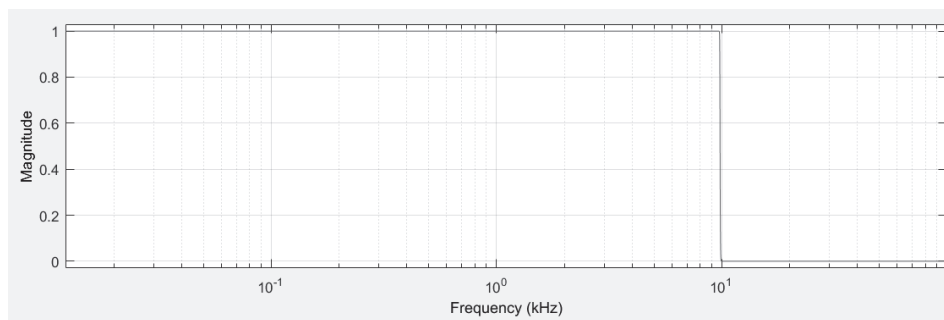


Rys. 5. Charakterystyka amplitudowa filtru IIR- metoda Butterworth. Rząd filtru: 449



Rys. 6. Charakterystyka fazowa filtru IIR- metoda Butterworth. Rząd filtru: 449

Charakterystyka amplitudowa filtru jest maksymalnie płaska w paśmie przenoszenia, co można zauważyć na rysunku 5. Tłumienie filtru bardzo szybko rośnie, osiągając od częstotliwości 10 kHz do częstotliwości 20 kHz wartość 3000 dB. Aby lepiej przedstawić tę sytuację, na poniższym rysunku przedstawiono charakterystykę amplitudową w jednostkach względnych amplitudy.

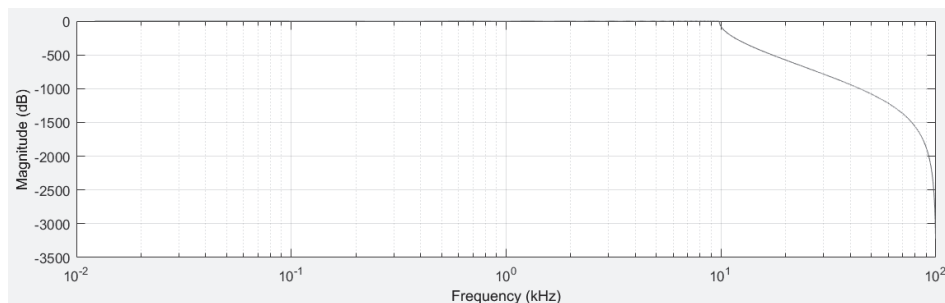


Rys. 7. Charakterystyka amplitudowa filtru IIR- metoda Butterwortha. Rząd filtru: 449  
Skala amplitudy względna

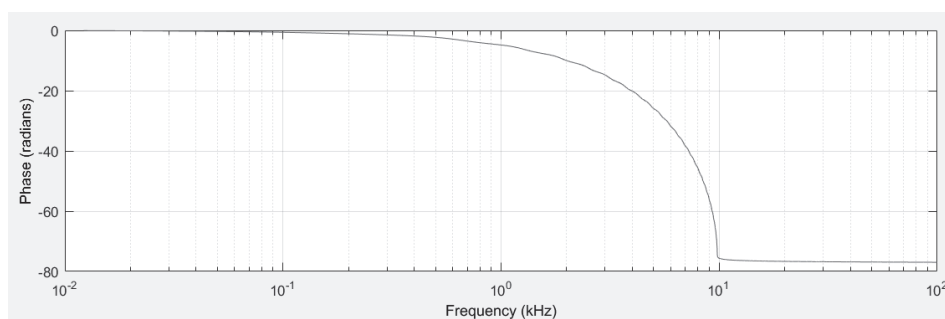
Przedstawienie charakterystyki amplitudowej w jednostkach względnych amplitudy pozwala lepiej dostrzec zalety projektowania tej metody. Przy stosunkowo niskim rzędzie filtru charakterystyka jest niemalże prostokątna. Ponadto, zarówno w paśmie przepustowym jak i zaporowym, charakterystyka jest płaska.

Charakterystyka fazowa filtru Butterwortha jest nieliniowa. W okolicy pasma przejściowego przesunięcie osiąga wartość  $-400^\circ$ . Powyżej częstotliwości 10 kHz krzywa charakterystyki opada łagodnie i osiąga wartość około  $-700^\circ$ .

Rysunki o numerach 8 i 9 przedstawiają odpowiednio charakterystyki amplitudową oraz fazową filtru IIR Chebysheva typu pierwszego.

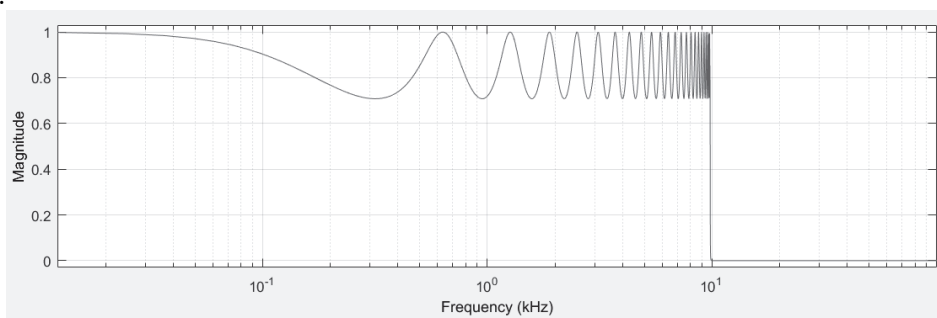


Rys. 8. Charakterystyka amplitudowa filtra IIR- metoda: Chebyshev Type I. Rząd filtra: 49



Rys. 9. Charakterystyka fazowa filtra IIR- metoda: Chebyshev Type I . Rząd filtra: 49

Podobnie jak w przypadku filtra Butterwortha, charakterystykę amplitudową filtra Chebyszeva przedstawiono również w jednostkach względnych amplitudy.



Rys. 10. Charakterystyka fazowa filtra IIR- metoda: Chebyshev Type I . Rząd filtra: 49  
Skala względna amplitudy

Charakterystyka amplitudowa filtra Chebyszeva charakteryzuje się dużymi oscylacjami w paśmie przenoszenia. Ich częstotliwość zwiększa się wraz ze zbliżaniem się częstotliwości do wartości 10 kHz. Następnie następuje stromy spadek wartości amplitudy. W paśmie zaporowym charakterystyka jest płaska.



Charakterystyka fazowa jest w przypadku tego filtru, podobnie jak poprzedniego, również nieliniowa. W odróżnieniu od filtru Butterwortha, w paśmie przenoszenia kształt tej charakterystyki jest bliższy charakterystyce fazowej filtrów FIR. Wobec czego nieliniowość charakterystyki fazowej filtru Chebyszeva jest dużo niższa, niż Butterwortha. Ponadto przesunięcie fazowe, wprowadzane przez ten filtr, utrzymuje się na poziomie  $-76^\circ$  dla częstotliwości powyżej 10 kHz. Zatem w paśmie zaporowym charakterystyka ta ma charakter liniowy.

Wyraźną cechą tego filtru jest jego niski rząd. Jest on najniższy ze wszystkich przebadanych filtrów i wynosi zaledwie 49. Jest to bardzo pożądana cecha, tym bardziej w przypadku, jeżeli pominiemy częściową nieliniowość filtru oraz oscylacje charakterystyki amplitudowej w paśmie przepustowym.

#### 4. PORÓWNANIE BADANYCH FILTRÓW

Z przeprowadzonych symulacji można wysunąć kilka istotnych wniosków. Dotyczą one: spełnienia kryteriów projektowych, które zostały opisane w rozdziale pierwszym, rzędu otrzymanych filtrów oraz kształtu charakterystyk fazowej i amplitudowych. Ponadto porównano ogólne cechy badanych filtrów FIR z filtrami typu IIR.

Wszystkie zaprezentowane filtry spełniły wymagania projektowe. Dotyczy to zarówno założeń dotyczących zakresu oscylacji charakterystyki amplitudowej w paśmie przenoszenia, osiągniętego tłumienia w paśmie zaporowym, jak również stromości charakterystyki w paśmie przejściowym. Należy wspomnieć, że spełnienie tych warunków wiązało się z różnymi skutkami ubocznymi, głównie dotyczącymi rzędu filtru. Należy mieć to na uwadze przy projektowaniu filtrów przy innych założeniach.

Wysokim rzędem cechowały się filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej. Jest to zgodne z wcześniejszymi przewidywaniami. Najwyższy rząd miał filtr uzyskany z użyciem okna Kaisera. Drugi pod tym względem filtr otrzymany metodą equiripple miał prawie dwukrotnie niższy rząd. Porównując ze sobą oba te filtry należy zwrócić uwagę na różnice pomiędzy ich charakterystykami fazowymi i amplitudowymi. Kosztem wyższego rzędu w pierwszym z nich możliwe jest uzyskanie idealnie płaskiej charakterystyki amplitudowej w paśmie przenoszenia. Wprowadza także większe tłumienie dla najwyższych częstotliwości, a przesunięcie fazowe przez niego wprowadzane jest wyższe. Ponadto kształt charakterystyki amplitudowej filtru typu equiripple jest bardziej schodkowy, niż filtru wykorzystującego okno.

Filtry typu IIR miały znacznie niższy rząd niż filtry FIR. Szczególnie niski rząd miał filtry Chebysheva. Tak niski rząd filtru został uzyskany kosztem oscylacji charakterystyki w paśmie przenoszenia. Filtr ten cechował się również nie-

wielką nieliniowością charakterystyki fazowej. Oba badane filtry IIR cechowały się bardzo dużym wzrostem tłumienia i praktycznie schodkowym przebiegiem charakterystyki amplitudowej (patrząc na nią w skali nie decybelowej).

#### 4. PODSUMOWANIE

W trakcie przeprowadzonych badań symulacyjnych przedstawiono wybrane filtry o skończonej oraz nieskończonej odpowiedzi impulsowej. Celem badań było sprawdzenie, jak prezentują się charakterystyki amplitudowe oraz fazowe filtrów w zależności od założonej metody projektowej oraz zadanych parametrów. Sprawdzono również, jaki rząd osiągną badane filtry.

Z wykonanych symulacji wyciągnięto wnioski zgodne z przewidywaniami teoretycznymi. Dokonano porównania poszczególnych właściwości charakterystyk oraz wartości rzędu filtrów.

#### LITERATURA

- [1] Izydorczyk J. i inni, Matlab i podstawy telekomunikacji, wyd. Helion 2017.
- [2] Zieliński T. P., Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań, wyd. Komunikacji i Łączności sp. z o.o., Warszawa 2009.
- [3] Smith S. W., Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Praktyczny poradnik dla inżynierów i naukowców, wyd. BTC, Warszawa 2007.
- [4] Parks T., McClellan J., Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase, IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. 19, issue 2, 1972.

#### COMPARISON OF DIGITAL FILTERS DESIGN METHODS

The article presents selected methods of designing digital FIR and IIR filters. The purpose of this comparison was to present the similarities and differences of filters with similar parameters, designed using different methods. The theoretical foundations of digital filtration were presented. The tested filters were designed using the Matlab environment. Particular attention was paid to the amplitude and phase characteristics of the filters and the complexity of the discussed algorithms.

*(Received: 19.02.2018, revised: 15.03.2018)*