Mariusz Próchniak
Katedra Ekonomii II, Szkoła Główna Handlowa

Realna konwergencja w krajach Unii Europejskiej. Próba szacunków funkcji produkcji

Streszczenie

Celem niniejszego badania jest określenie, w jakim stopniu model Solowa nadaje się do wyjaśnienia zjawiska realnej konwergencji krajów rozszerzonej Unii Europejskiej. Weryfikacji poddajemy trzy warianty tego modelu: podstawowy model Solowa, model Solowa z kapitałem ludzkim (tzw. model Mankiwa-Romera-Weila) oraz model Solowa z kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how*. Analiza obejmuje okres 1993-2009. Okazuje się, że modele Solowa dobrze wyjaśniają różnice w tempie wzrostu gospodarczego i zjawisko realnej konwergencji w grupie UE-27. Na podstawie wyników analizy obliczamy współczynniki szybkości zbieżności oraz dokonujemy szacunków funkcji produkcji w badanych krajach.

Słowa kluczowe: wzrost gospodarczy, realna konwergencja, model Solowa, Unia Europejska

Real Convergence in the European Union. The attempt to estimate the Production Function

Summary

This paper aims at verifying to what extent the Solow model can explain real economic convergence among the countries of the enlarged European Union. We verify three variants of the model: the basic Solow model, the Solow model with human capital (the Mankiw-Romer-Weil model), and the Solow model with human capital and technological know-how. The analysis covers the 1993-2009 period. It turns out that the Solow models perform very well in explaining economic growth differences and real economic convergence of the EU-27 group. Based on the results of our study, we estimate the parameters that measure the speed of convergence as well as the production functions for our sample of countries.

Key words: economic growth, real convergence, the Solow model, European Union

1. Wprowadzenie

Zagadnienia związane ze wzrostem gospodarczym i realną konwergencją stanowią od wielu lat jeden z podstawowych obszarów badawczych wśród ekonomistów, zarówno w ujęciu teoretycznym, jak i empirycznym. Jednym z celów tych badań jest m.in. znalezienie odpowiedzi na dwa kluczowe pytania dotyczące zjawiska wzrostu gospodarczego: od czego zależy długookresowy wzrost gospodarczy oraz dlaczego występują duże różnice w poziomie dochodów realnych między krajami. Uzyskanie pełnej odpowiedzi pozwoliłoby określić właściwe kierunki polityki gospodarczej i w efekcie rozwiązać szereg problemów ekonomicznych, z którymi borykają się poszczególne państwa i których przyczyną jest zbyt wolny wzrost gospodarczy. Na przykład, z różnicami poziomu PKB między krajami wiąże się duże zróżnicowanie pod względem odżywiania, oświaty, śmiertelności niemowląt, długości życia itp. Mimo że jednoznaczna i pełna odpowiedź na postawione wyżej pytania prawdopodobnie nigdy nie zostanie udzielona, badania nad wzrostem gospodarczym są kontynuowane i w ostatnim czasie są bardzo popularne. Dotyczy to zarówno opracowań teoretycznych, przedstawiających nowe lub rozszerzone wersje modeli wzrostu, jak i prac empirycznych, zawierających nowe ujęcia i aktualizację prowadzonych wcześniej badań.

Artykuł zawiera wyniki empirycznej weryfikacji wniosków płynących z pewnej grupy modeli wzrostu gospodarczego, a mianowicie z modeli Solowa. Neoklasyczny model Solowa potwierdza występowanie realnej konwergencji (zbieżności) między krajami. Oznacza to, że kraje słabiej rozwinięte (o niższym poziomie PKB na 1 mieszkańca) wykazują szybsze tempo wzrostu gospodarczego niż kraje wyżej rozwinięte. W niniejszym badaniu weryfikujemy występowanie konwergencji wśród krajów Unii Europejskiej. Analizę empiryczną opieramy na trzech wersjach modelu Solowa: podstawowej, rozszerzonej o kapitał ludzki (tzw. model Mankiwa-Romera-Weila) oraz rozszerzonej o kapitał ludzki i technologiczne *know-how*. Podstawowy model Solowa, autorstwa R. Solowa [1956] i T. Swana [1956], zakłada występowanie tylko jednego rodzaju kapitału: kapitału fizycznego (rzeczowego). Mankiw, Romer i Weil [1992] rozbudowali ten model wprowadzając doń kapitał ludzki. Nonneman i Vanhoudt [1996] przedstawiają jeszcze bardziej rozszerzony model Solowa, uwzględniający dowolną liczbę czynników produkcji i analizie empirycznej poddają model z trzema czynnikami: kapitałem fizycznym, kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how*.

Empiryczna weryfikacja różnych wariantów modeli Solowa była już przeprowadzana w literaturze, podobnie jak analiza konwergencji państw Europy

Środkowo-Wschodniej do Unii Europejskiej. Jednak nie spotkaliśmy jak dotąd badania, które łączyłoby oba te ujęcia, tzn. uwzględniałoby rozszerzone warianty modelu Solowa do analizy zbieżności warunkowej w UE. Dlatego będziemy starali się sprawdzić, czy modele te prawidłowo wyjaśniają wzrost gospodarczy tych krajów. Analiza obejmuje 27 obecnych członków Unii Europejskiej (UE-27) i okres 1993-2009.[1]

Artykuł składa się z 6 punktów. W punkcie 2 omawiamy różne warianty modelu Solowa w celu wyjaśnienia realnej konwergencji. Punkt 3 zawiera informacje o danych i metodologii badania. Wyniki analizy empirycznej znajdują się w części 4. W punkcie 5 przedstawiamy wyniki badań innych autorów. Punkt 6 zawiera najważniejsze wnioski.

2. Podstawy teoretyczne

W tej części opiszemy zjawisko konwergencji w oparciu o model Solowa. Rozpoczniemy od analizy modelu w ujęciu podstawowym. Następnie omówimy dwa jego rozszerzone warianty: model z kapitałem ludzkim (model Mankiwa-Romera-Weila) oraz zaproponowany przez Nonnemana i Vanhoudta model z wieloma rodzajami kapitału.

2.1. Podstawowy model Solowa

Oznaczmy symbolem F funkcję produkcji. Czynnikami produkcji są: kapitał fizyczny $K(t)$ oraz efektywna praca $A(t)L(t)$, będąca iloczynem poziomu technologii (wiedzy) $A(t)$ i liczby ludności (siły roboczej) $L(t)$:

$$F\left(K(t), A(t)L(t)\right). \tag{1}$$

Funkcja produkcji wykazuje stałe przychody względem obydwu czynników produkcji (kapitału i efektywnej pracy) oraz malejącą krańcową produkcyjność kapitału. Jedną z funkcji spełniających te założenia jest funkcja produkcji Cobba-Douglasa:

$$F\left(K(t), A(t)L(t)\right) = K(t)^{\alpha}\left[A(t)L(t)\right]^{1-\alpha}, \tag{2}$$

[1] Kraje objęte badaniem to: Austria, Belgia, Bułgaria, Cypr, Czechy, Dania, Estonia, Finlandia, Francja, Grecja, Hiszpania, Holandia, Irlandia, Litwa, Luksemburg, Łotwa, Malta, Niemcy, Polska, Portugalia, Rumunia, Słowacja, Słowenia, Szwecja, Węgry, Wielka Brytania i Włochy.

gdzie $0 < \alpha < 1$. Poziom technologii oraz liczba ludności rosną w stałych tempach, równych odpowiednio a i n, kształtujących się egzogenicznie:[2]

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = a \quad \text{oraz} \quad \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n. \tag{3}$$

Przyrost kapitału jest równy inwestycjom (oszczędnościom) pomniejszonym o deprecjację:

$$\dot{K}(t) = sF\left(K(t), A(t)L(t)\right) - \delta K(t), \tag{4}$$

gdzie s to egzogeniczna stopa oszczędności, a δ jest stopą deprecjacji kapitału.

Analizę dynamiki gospodarki przeprowadzamy dla kapitału i produkcji na jednostkę efektywnej pracy, oznaczonych odpowiednio $k(t)$ i $f(k(t))$:[3]

$$k \equiv \frac{K}{AL}$$

oraz

$$f(k) \equiv \frac{F(K, AL)}{AL} \quad \left\{ = F\left(\frac{K}{AL}, \frac{AL}{AL}\right) = F(k,1) = f(k) \right\}. \tag{5}$$

W celu znalezienia równania opisującego dynamikę gospodarki różniczkujemy względem czasu definicję k (równanie (5)) i następnie wykorzystujemy (3), (4) i (5). W efekcie otrzymujemy:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + a + \delta)k. \tag{6}$$

Powyższe równanie jest podstawowym równaniem opisującym dynamikę gospodarki w modelu Solowa. Przyrost kapitału na jednostkę efektywnej pracy jest równy faktycznym inwestycjom $sf(k)$ pomniejszonym o inwestycje restytucyjne $(n + a + \delta)k$. Jeśli założymy, że funkcja produkcji jest typu Cobba-Douglasa o postaci: $f(k) = k^{\alpha}$, wówczas równanie (6) jest następujące:

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n + a + \delta)k. \tag{7}$$

Na podstawie powyższej formuły można wyznaczyć w postaci graficznej dynamikę gospodarki oraz stan równowagi długookresowej. Ilustruje to rysunek 1.

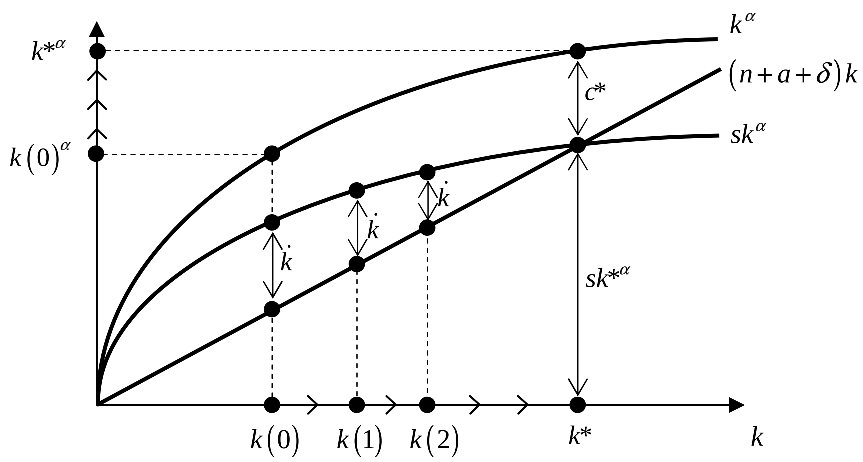
---

[2] Kropka nad daną zmienną oznacza jej pochodną po czasie.

[3] W dalszej części artykułu pomijamy indeksy czasowe t przy zmiennych zależnych od czasu w celu zachowania przejrzystości przedstawianych obliczeń.

Równowaga długookresowa (stan ustalony)[4] występuje w punkcie przecięcia się krzywych sk^{α} i $(n + a + \delta)k$. W punkcie tym kapitał i produkcja na jednostkę efektywnej pracy są stałe (z (7) wynika bowiem, że jeśli $sk^{\alpha} = (n + a + \delta)k$, to $dk/dt = 0$). Ponieważ $dk/dt = 0$ a funkcja produkcji ma postać $y = k^{\alpha}$, z (7) obliczamy wielkość kapitału i produkcji na jednostkę efektywnej pracy w równowadze długookresowej:

$$k^* = \left(\frac{s}{n+a+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad y^* = k^{*\alpha} = \left(\frac{s}{n+a+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \tag{8}$$



Rysunek 1. Okres przejściowy i stan ustalony w modelu Solowa

Stan ustalony w modelu Solowa jest stabilny. Oznacza to, że niezależnie od początkowego poziomu kapitału (pomijając $k(0) = 0$) gospodarka zawsze będzie zbiegała do stanu ustalonego. Jeśli bowiem $k(0) < k^*$, to $sk^{\alpha} > (n + a + \delta)k$ (zob. rysunek 1), k będzie rosło w czasie i w końcu osiągnie poziom k^*. W trakcie okresu przejściowego tempo wzrostu PKB jest wyższe niż w stanie równowagi długookresowej.

Powyższa własność modelu Solowa, wskazująca na szybsze tempo wzrostu gospodarczego w trakcie okresu przejściowego, ma bardzo ważne znaczenie ekonomiczne. Mianowicie, model Solowa potwierdza występowanie konwergencji warunkowej typu β. Konwergencja (typu β) oznacza, że kraje słabiej rozwinięte (o

[4] Ang. *steady-state*, tłumaczony także jako stan stacjonarny lub stan równowagi dynamicznej.

niższym poziomie PKB *per capita*) rozwijają się szybciej niż kraje wyżej rozwinięte. Zbieżność potwierdzona przez model Solowa jest warunkowa, gdyż występuje tylko wtedy, gdy gospodarki dążą do tego samego stanu równowagi długookresowej.

Konwergencję można przedstawić dokonując log-linearyzacji równania ruchu (7), opisującego dynamikę gospodarki. Metoda ta pozwala obliczyć współczynnik zbieżności, informujący, jaki procent odległości w kierunku stanu ustalonego gospodarka pokonuje w ciągu jednego okresu. Równanie (7) można zapisać jako:

$$\dot{\ln} k = se^{\ln k^{\alpha-1}} - \left(n+a+\delta\right) = se^{(\alpha-1)\ln k} - \left(n+a+\delta\right). \tag{9}$$

Następnie stosujemy rozszerzenie Taylora pierwszego rzędu wokół stanu ustalonego w celu znalezienia przybliżonej ścieżki czasowej dla ln$k$:

$$\dot{\ln} k \approx \dot{\ln} k^* + \left.\frac{d\,\dot{\ln} k}{d\ln k}\right|_{\text{dla stanu ustalonego}} \times\left(\ln k - \ln k^*\right) = \left(\alpha-1\right)\left(n+a+\delta\right)\left(\ln k - \ln k^*\right). \tag{10}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (10) jest następujące:

$$\ln k = \ln k^* + \left(\ln k\left(0\right) - \ln k^*\right)e^{-(1-\alpha)(n+a+\delta)t}, \tag{11}$$

co w kategoriach produkcji na jednostkę efektywnej pracy daje:

$$\ln y = \ln y^* + \left(\ln y\left(0\right) - \ln y^*\right)e^{-(1-\alpha)(n+a+\delta)t}. \tag{12}$$

Definiując:[5]

$$\lambda = \left(1-\alpha\right)\left(n+a+\delta\right) > 0 \tag{13}$$

oraz różniczkując (12) względem czasu, uzyskujemy:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \lambda\left(\ln y^* - \ln y\right). \tag{14}$$

Równanie (14) informuje, że tempo wzrostu gospodarczego zależy od odległości dzielącej gospodarkę od jej stanu ustalonego. Parametr λ mierzy szybkość zbieżności. λ określa bowiem, jaki procent odległości w kierunku stanu równowagi długookresowej gospodarka pokonuje w ciągu jednego okresu.

Odejmując ln$y$(0) od obu stron równania (12), mamy:

---

[5] Parametr λ zdefiniowany we wzorze (13) jest powszechnie nazywany parametrem β-zbieżności. W niniejszym artykule używamy symbolu λ, gdyż β zostanie wykorzystane w rozszerzonych modelach Solowa jako jeden z parametrów funkcji produkcji.

$$\ln y(t) - \ln y(0) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \ln y^* - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \ln y(0) . \qquad (15)$$

Powyższe wyrażenie pokazuje, że tempo wzrostu gospodarczego zależy od początkowego PKB *per capita* oraz od dochodu w równowadze długookresowej. Ujemna zależność między wzrostem gospodarczym a początkowym poziomem dochodu oznacza występowanie realnej konwergencji. Zbieżność jest jednak warunkowa, gdyż zależy także od innych zmiennych określających równowagę długookresową. Widać to wyraźnie, gdy w miejsce ln$y$* podstawimy zlogarytmowaną formułę (8):

$$\ln y(t) - \ln y(0) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln s - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln\left(n + a + \delta\right) - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \ln y(0) . \qquad (16)$$

Szacowanie tego równania metodą regresji liniowej umożliwia weryfikację występowania konwergencji warunkowej. Natomiast aby zbadać zbieżność absolutną, wystarczy dokonać estymacji równania regresji, gdzie zmienną zależną jest ln$y(t)$ – ln$y(0)$, a jedyną zmienną niezależną – ln$y(0)$.

2.2. Model Solowa z kapitałem ludzkim (model Mankiwa-Romera-Weila)

Główna różnica między podstawowym modelem Solowa i modelem Mankiwa-Romera-Weila polega na tym, że ten drugi uwzględnia kapitał ludzki. Kapitał ludzki (H) jest trzecim czynnikiem produkcji, poza kapitałem fizycznym (K) i efektywną pracą (AL). Funkcja produkcji jest następująca:

$$Y = K^{\alpha} H^{\beta} \left(AL\right)^{1-\alpha-\beta} , \qquad (17)$$

gdzie $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$. Produkcja może być przeznaczana na konsumpcję, akumulację kapitału fizycznego lub akumulację kapitału ludzkiego.

Poziom technologii oraz siła robocza rosną w stałych tempach, a i n, kształtowanych egzogenicznie. Oba rodzaje kapitałów amortyzują się według tej samej stopy δ. Niech s_K oznacza odsetek dochodu przeznaczany na akumulację kapitału fizycznego (czyli stopę oszczędności), zaś s_H – odsetek dochodu przeznaczany na akumulację kapitału ludzkiego. Równania ruchu dla kapitału rzeczowego i ludzkiego mają zatem postać:

$$\dot{K} = s_K Y - \delta K , \qquad (18)$$

$$\dot{H} = s_H Y - \delta H . \qquad (19)$$

Analizę dynamiki modelu przeprowadzimy dla wielkości kapitałów i produkcji na jednostkę efektywnej pracy, oznaczanych *k*, *h* i *y*:

$$k \equiv \frac{K}{AL}; \quad h \equiv \frac{H}{AL}; \quad y \equiv \frac{Y}{AL} = \frac{K^{\alpha} H^{\beta} (AL)^{1-\alpha-\beta}}{AL} = k^{\alpha} h^{\beta} . \tag{20}$$

W celu znalezienia równań opisujących dynamikę gospodarki różniczkujemy względem czasu definicje *k* i *h*. W efekcie otrzymujemy:

$$\dot{k} = s_K y - (n+a+\delta) k = s_K k^{\alpha} h^{\beta} - (n+a+\delta) k , \tag{21}$$

$$\dot{h} = s_H y - (n+a+\delta) h = s_H k^{\alpha} h^{\beta} - (n+a+\delta) h . \tag{22}$$

Powyższe równania opisują dynamikę gospodarki w modelu Mankiwa-Romera-Weila. Są one analogiczne do równania (7), dotyczącego podstawowego modelu Solowa. Przyrost kapitału rzeczowego i ludzkiego na jednostkę efektywnej pracy jest równy faktycznym inwestycjom w dany rodzaj kapitału pomniejszonym o inwestycje restytucyjne.

W stanie ustalonym kapitał na jednostkę efektywnej pracy jest stały. A zatem, przyrównując (21) i (22) do zera oraz wykorzystując (20), uzyskujemy zasób kapitału fizycznego, kapitału ludzkiego i produkcji na jednostkę efektywnej pracy w równowadze długookresowej:

$$k^* = \left(\frac{s_K^{1-\beta} s_H^{\beta}}{n+a+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \quad h^* = \left(\frac{s_H^{1-\alpha} s_K^{\alpha}}{n+a+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}},$$

$$y^* = \left(\frac{s_K}{n+a+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_H}{n+a+\delta} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} . \tag{23}$$

Model Mankiwa-Romera-Weila wyjaśnia konwergencję warunkową analogicznie do podstawowego modelu Solowa. Różnica dotyczy jedynie wartości współczynnika szybkości zbieżności. Podstawowy model Solowa wskazuje na szybszą konwergencję niż ujęcie Mankiwa-Romera-Weila. W celu formalnego wykazania zbieżności i obliczenia jej tempa, dokonujemy log-linearyzacji równania opisującego dynamikę gospodarki. Logarytmując i różniczkując względem czasu funkcję produkcji $y = k^{\alpha} h^{\beta}$ i wykorzystując (21) – (22), uzyskujemy tempo wzrostu produkcji na jednostkę efektywnej pracy:

$$\dot{\ln}\, y = \alpha s_K k^{\alpha-1} h^{\beta} + \beta s_H k^{\alpha} h^{\beta-1} - \left(\alpha+\beta\right)\left(n+a+\delta\right). \quad (24)$$

Następnie stosujemy rozszerzenie Taylora pierwszego rzędu wokół stanu ustalonego w celu znalezienia przybliżonej ścieżki czasowej dla ln$y$:

$$\dot{\ln}\, y \approx \dot{\ln}\, y^* + \left.\frac{d\, \dot{\ln}\, y}{d \ln k}\right|_{\text{dla stanu ustalonego}} \times \left(\ln k - \ln k^*\right) + \left.\frac{d\, \dot{\ln}\, y}{d \ln h}\right|_{\text{dla stanu ustalonego}} \times \left(\ln h - \ln h^*\right). \quad (25)$$

Obliczając odpowiednie pochodne i wykorzystując fakt, że w stanie ustalonym k i h są określone przez (23), z (25) otrzymujemy:

$$\dot{\ln}\, y = -\alpha\left(1-\alpha-\beta\right)\left(n+a+\delta\right)\left(\ln k-\ln k^*\right) - \beta\left(1-\alpha-\beta\right)\left(n+a+\delta\right)\left(\ln h-\ln h^*\right). \quad (26)$$

Definiując:

$$\lambda = \left(1-\alpha-\beta\right)\left(n+a+\delta\right) > 0, \quad (27)$$

formułę (26) można zapisać w postaci:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \lambda\left(\ln y^* - \ln y\right). \quad (28)$$

Równanie (28) jest identyczne jak (14), charakteryzujące podstawowy model Solowa. Oba wzory informują, że tempo wzrostu gospodarczego jest proporcjonalne do odległości dzielącej gospodarkę od jej stanu równowagi długookresowej. Im odległość ta jest większa, tzn. im bardziej ln$y$ jest mniejszy od lny^*, tym wzrost gospodarczy jest szybszy. Oznacza to występowanie konwergencji warunkowej.

Równanie (27) przedstawia wartość współczynnika szybkości zbieżności. Analogiczny współczynnik dla standardowego modelu Solowa dany jest wzorem (13). Na podstawie (27) i (13) widać, że w modelu Mankiwa-Romera-Weila zbieżność jest wolniejsza niż w zwykłym modelu Solowa.

Zależność między tempem wzrostu gospodarczego a jego determinantami w modelu Mankiwa-Romera-Weila jest na pierwszy rzut oka taka sama jak w standardowym modelu Solowa (zob. (15)). Różnice pojawiają się przy próbach rozwinięcia tego równania. W modelu Mankiwa-Romera-Weila w miejsce lny^* podstawiamy zlogarytmowany poziom dochodu y^* określony przez (23). W efekcie otrzymujemy:

$$\ln y(t) - \ln y(0) = \left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln s_K + \left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln s_H +$$

$$-\left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\ln\left(n+a+\delta\right)-\left(1-e^{-\lambda t}\right)\ln y\left(0\right). \qquad (29)$$

Jak widać, wzrost gospodarczy zależy od początkowego poziomu dochodu (co wskazuje na występowanie konwergencji) oraz od czynników determinujących dochód w równowadze długookresowej, czyli m.in. od stopy inwestycji w oba rodzaje kapitału i zmian demograficznych. Szacowanie równania (29) metodą regresji liniowej umożliwia weryfikację konwergencji warunkowej opisanej przez model Solowa z kapitałem ludzkim.

2.2. Model Solowa z wieloma czynnikami produkcji

Nonneman i Vanhoudt rozbudowali model Solowa w jeszcze większym stopniu niż Mankiw, Romer i Weil. Analizują oni model z wieloma czynnikami produkcji, z których każdy traktowany jest jako pewien rodzaj kapitału. Funkcja produkcji ma postać:

$$Y = K_1^{\alpha_1} K_2^{\alpha_2} \ldots K_m^{\alpha_m} \left(AL\right)^{1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}, \qquad (30)$$

gdzie m oznacza liczbę dóbr kapitałowych traktowanych jako czynniki produkcji. W podstawowym modelu Solowa, uwzględniającym tylko kapitał fizyczny, $m = 1$. Model Mankiwa-Romera-Weila z kapitałem ludzkim zakłada, że $m = 2$. Nonneman i Vanhoudt w badaniach empirycznych analizują model z trzema czynnikami produkcji ($m = 3$): kapitałem fizycznym, kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how*.

Analiza dynamiki modelu z wieloma czynnikami produkcji jest taka sama jak wariantu podstawowego lub wariantu z kapitałem ludzkim. Przyjmując te same założenia, równanie ruchu dla i-tego rodzaju kapitału jest następujące (por. (6), (21) i (22)):

$$\dot{k}_i = s_i y - \left(n+a+\delta\right)k_i, \qquad (31)$$

gdzie s_i jest stopą inwestycji w dany rodzaj kapitału. W stanie ustalonym kapitał na jednostkę efektywnej pracy jest stały, zatem $dk_i/dt = 0$. Wykorzystując to oraz fakt, że funkcja produkcji na jednostkę efektywnej pracy ma postać $y = k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \ldots k_m^{\alpha_m}$, z (31) można obliczyć poziom kapitału w równowadze długookresowej:

$$k_i^* = \left(s_i^{1-\left(\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j+\sum_{j=i+1}^{m}\alpha_j\right)} \cdot \left(\prod_{j=1}^{i-1} s_j^{\alpha_j}\right) \cdot \left(\prod_{j=i+1}^{m} s_j^{\alpha_j}\right) \cdot \left(n+a+\delta\right)^{-1} \right)^{\frac{1}{1-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j}}. \qquad (32)$$

Podstawiając te wielkości do funkcji produkcji $y = k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \dots k_m^{\alpha_m}$, uzyskujemy:

$$y^* = \prod_{i=1}^{m} \left[\left(\frac{s_i}{n+a+\delta} \right)^{\frac{\alpha_i}{1-\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}} \right]. \tag{33}$$

Model Solowa z *m* czynnikami produkcji wyjaśnia konwergencję w sposób analogiczny do wcześniej przedstawionych modeli z tej rodziny. Zależność tempa wzrostu gospodarczego od początkowego PKB *per capita* i dochodu w stanie równowagi długookresowej jest taka sama we wszystkich wariantach i opisana równaniem (15). Różnice między poszczególnymi wersjami pojawiają się przy próbach rozwinięcia tego równania. W modelu Solowa z *m* czynnikami produkcji w miejsce ln*y** podstawiamy zlogarytmowany poziom dochodu *y** określony wzorem (33). W efekcie otrzymujemy:

$$\ln y(t) - \ln y(0) = \sum_{i=1}^{m} \left[\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{\alpha_i}{1 - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i} \ln s_i \right] +$$

$$- \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \frac{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}{1 - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i} \ln(n+a+\delta) - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \ln y(0). \tag{34}$$

Równanie (34) jest analogiczne do równań (16) i (29) właściwych dla wcześniej opisanych wersji modelu Solowa. Wszystkie te równania wskazują na występowanie konwergencji. Ma ona charakter warunkowy, gdyż jest determinowana przez zmienne określające poziom dochodu w równowadze długookresowej. Współczynnik λ określa tempo zbieżności.

Nonneman i Vanhoudt analizują model Solowa z trzema czynnikami: kapitałem fizycznym *K*, kapitałem ludzkim *H* i technologicznym *know-how T*. Dla takiej specyfikacji modelu funkcja produkcji (30) jest następująca:

$$Y = K^{\alpha} H^{\beta} T^{\gamma} (AL)^{1-\alpha-\beta-\gamma} \tag{35}$$

lub w przeliczeniu na jednostkę efektywnej pracy:

$$y = k^{\alpha} h^{\beta} \tau^{\gamma}. \tag{36}$$

Dla trzech rodzajów kapitału wyrażenie (34) przyjmuje formę:

$$\ln y(t)-\ln y(0)=\left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta-\gamma}\ln s_K+\left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\beta}{1-\alpha-\beta-\gamma}\ln s_H+$$
$$+\left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\gamma}{1-\alpha-\beta-\gamma}\ln s_\tau-\left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\alpha-\beta-\gamma}\ln\left(n+a+\delta\right)-\left(1-e^{-\lambda t}\right)\ln y(0)\,. \tag{37}$$

W naszej analizie szacujemy równanie (37) metodą regresji liniowej.

3. Metodologia badania i dane

Niniejsze badanie bazuje w całości na modelach Solowa. Dlatego też empirycznej weryfikacji podlegają wyłącznie równania otrzymane z teoretycznej analizy tych modeli, które zostały przedstawione w punkcie 2.

Do analizy zjawiska konwergencji wykorzystujemy równanie (34), które przybiera różne formy w zależności od wariantu modelu Solowa ((16), (29) lub (37)). Model ekonometryczny może być szacowany w dwóch wersjach: nieograniczonej i ograniczonej. Formuła (34) pokazuje bowiem, że suma wartości parametrów stojących przy zmiennych objaśniających $\ln s_i$ powinna równać się – co do modułu – wartości parametru dla zmiennej $\ln(n + a + \delta)$. Niemniej jednak, równanie oszacowane na podstawie danych empirycznych nie musi mieć takich własności. Dlatego też model ekonometryczny, który niezależnie uwzględnia zmienne $\ln s_i$ oraz $\ln(n + a + \delta)$, nazywany jest modelem nieograniczonym. Po jego estymacji suma ocen parametrów stojących przy zmiennych $\ln s_i$ nie musi równać się – co do modułu – ocenie parametru przy zmiennej $\ln(n + a + \delta)$. Równość taka będzie natomiast zachodzić w modelu ograniczonym, w którym zmienne objaśniające $\ln s_i$ oraz $\ln(n + a + \delta)$ są ze sobą powiązane. Taką postać modelu uzyskuje się poprzez odjęcie zmiennej $\ln(n + a + \delta)$ od każdej ze zmiennych $\ln s_i$. Szczegóły przedstawia tabela 1.

Tabela 1 składa się z czterech części. Pierwsza część dotyczy zbieżności absolutnej, zaś trzy następne – zbieżności warunkowej, odpowiadającej trzem różnym wariantom modelu Solowa. Pierwsze dwa wiersze wskazują na liczbę kapitałów i specyfikację funkcji produkcji. Kolejne dwa przedstawiają równania regresji szacowane za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów dla modelu nieograniczonego i ograniczonego. Następny wiersz ilustruje powiązanie parametrów strukturalnych równania regresji z parametrami funkcji produkcji oraz współczynnikiem szybkości zbieżności, zgodnie z równaniem (34). Ostatni wiersz przedstawia wzory służące do estymacji parametrów funkcji produkcji oraz współczynnika szybkości zbieżności.

Przed rozpoczęciem analizy musieliśmy przyjąć jedno dodatkowe założenie. Równanie (34) uwzględnia m.in. postęp techniczny oraz stopę amortyzacji. Uzyskanie rzeczywistych wartości tych parametrów dla poszczególnych krajów jest bardzo trudne, o ile w ogóle możliwe. Dlatego też przyjęliśmy, że suma postępu technicznego i stopy deprecjacji kapitału wynosi 0,05 (czyli 5%). Jest to powszechne założenie w tego typu badaniach[6]. Nie wydaje nam się, aby pogorszyło ono wiarygodność wyników. Stopy amortyzacji w poszczególnych krajach raczej nie różnią się znacznie. Postęp techniczny definiujemy jako tempo wzrostu technologii. Przy założeniu swobodnego przepływu kapitału (a jest tak w państwach UE), wszystkie kraje mają taki sam dostęp do poziomu technologii, czyli w takim samym stopniu postęp techniczny wpływa na ich funkcje produkcji. Jeśli zatem traktujemy postęp techniczny jako tempo wzrostu światowego poziomu technologii, można przyjąć wspólną dla wszystkich krajów wartość parametru *a*.

Tabela 1 Konwergencja w różnych wariantach modelu Solowa

Konwergencja absolutna
Model: $\ln\left(y(t)/y(0)\right)=\alpha_0+\alpha_1\ln y(0)$
Parametry strukturalne: α_0 – stała, $\alpha_1=-\left(1-e^{-\lambda t}\right)$
Szacunki współczynników • współczynnik szybkości zbieżności: $\hat{\lambda}=-(1/t)\ln(1+\alpha_1)$
Konwergencja warunkowa: podstawowy model Solowa
Liczba rodzajów kapitału: 1 (kapitał fizyczny)
Funkcja produkcji: $y=k^{\alpha}$
Model nieograniczony: $\ln\left(y(t)/y(0)\right)=\alpha_0+\alpha_1\ln y(0)+\alpha_2\ln s_K+\alpha_3\ln\left(n+0,05\right)$
Model ograniczony: $\ln\left(y(t)/y(0)\right)=\alpha_0+\alpha_1\ln y(0)+\alpha_2\left(\ln s_K-\ln\left(n+0,05\right)\right)$

[6] Zob. np. Mankiw, Romer, Weil, 1992; Nonneman, Vanhoudt, 1996; Murthy, Chien, 1997; Murthy, Upkolo, 1999.

Parametry strukturalne: α_0 – stała, $\alpha_1 = -\left(1-e^{-\lambda t}\right)$, $\alpha_2 = \left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\alpha}{1-\alpha}$, $\alpha_3 = -\left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\alpha}{1-\alpha}$
Szacunki współczynników • współczynnik szybkości zbieżności: $\hat{\lambda} = -(1/t)\ln(1+\alpha_1)$ • wynagrodzenie kapitału fizycznego w dochodzie: $\hat{\alpha} = \frac{-\alpha_2/\alpha_1}{1-\alpha_2/\alpha_1}$
Konwergencja warunkowa: model Mankiwa-Romera-Weila (model Solowa z kapitałem ludzkim)
Liczba rodzajów kapitału: 2 (kapitał fizyczny, kapitał ludzki)
Funkcja produkcji: $y = k^{\alpha}h^{\beta}$
Model nieograniczony: $\ln\left(y(t)/y(0)\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln y(0) + \alpha_2 \ln s_K + \alpha_3 \ln s_H + \alpha_4 \ln(n+0,05)$
Model ograniczony: $\ln\left(y(t)/y(0)\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln y(0) + \alpha_2 \left(\ln s_K - \ln(n+0,05)\right) + \alpha_3 \left(\ln s_H - \ln(n+0,05)\right)$
Parametry strukturalne: α_0 – stała, $\alpha_1 = -\left(1-e^{-\lambda t}\right)$, $\alpha_2 = \left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}$, $\alpha_3 = \left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}$, $\alpha_4 = -\left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}$
Szacunki współczynników • współczynnik szybkości zbieżności: $\hat{\lambda} = -(1/t)\ln(1+\alpha_1)$ • wynagrodzenie kapitału fizycznego w dochodzie: $\hat{\alpha} = \frac{-\alpha_2/\alpha_1}{1-\alpha_2/\alpha_1-\alpha_3/\alpha_1}$ • wynagrodzenie kapitału ludzkiego w dochodzie: $\hat{\beta} = \frac{-\alpha_3/\alpha_1}{1-\alpha_2/\alpha_1-\alpha_3/\alpha_1}$
Konwergencja warunkowa: model Solowa z kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how*
Liczba rodzajów kapitału: 3 (kapitał fizyczny, kapitał ludzki, technologiczne *know-how*)
Funkcja produkcji: $y = k^{\alpha}h^{\beta}\tau^{\gamma}$

Model nieograniczony:

$$\ln\left(y(t)/y(0)\right)=\alpha_0+\alpha_1\ln y(0)+\alpha_2\ln s_K+\alpha_3\ln s_H+\alpha_4\ln s_\tau+\alpha_5\ln\left(n+0,05\right)$$

Model ograniczony:

$$\ln\left(y(t)/y(0)\right)=\alpha_0+\alpha_1\ln y(0)+\alpha_2\left(\ln s_K-\ln(n+0,05)\right)+\alpha_3\left(\ln s_H-\ln(n+0,05)\right)+\alpha_4\left(\ln s_\tau-\ln(n+0,05)\right)$$

Parametry strukturalne: α_0 – stała, $\alpha_1=-\left(1-e^{-\lambda t}\right)$, $\alpha_2=\left(1-e^{-\lambda t}\right)\dfrac{\alpha}{1-\alpha-\beta-\gamma}$,

$$\alpha_3=\left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\beta}{1-\alpha-\beta-\gamma},\quad \alpha_4=\left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\gamma}{1-\alpha-\beta-\gamma},$$

$$\alpha_5=-\left(1-e^{-\lambda t}\right)\frac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\alpha-\beta-\gamma}$$

Szacunki współczynników

- współczynnik szybkości zbieżności: $\hat{\lambda}=-\left(1/t\right)\ln\left(1+\alpha_1\right)$
- wynagrodzenie kapitału fizycznego w dochodzie: $\hat{\alpha}=\dfrac{-\alpha_2/\alpha_1}{1-\alpha_2/\alpha_1-\alpha_3/\alpha_1-\alpha_4/\alpha_1}$
- wynagrodzenie kapitału ludzkiego w dochodzie: $\hat{\beta}=\dfrac{-\alpha_3/\alpha_1}{1-\alpha_2/\alpha_1-\alpha_3/\alpha_1-\alpha_4/\alpha_1}$
- wynagrodzenie technologii w dochodzie: $\hat{\gamma}=\dfrac{-\alpha_4/\alpha_1}{1-\alpha_2/\alpha_1-\alpha_3/\alpha_1-\alpha_4/\alpha_1}$

Zmienną oznaczoną symbolem *y* w tablicy 1 jest PKB na 1 mieszkańca według parytetu siły nabywczej (PSN) w dolarach międzynarodowych. Zmienna ta jest wyrażona w cenach stałych (co jest istotne w przypadku liczenia dynamiki PKB) i pochodzi z bazy danych Penn World Table (PWT) 7.0 [Heston, Summers, Aten, 2011]. Po lewej stronie w równaniach regresji znajduje się tempo wzrostu PKB *per capita* w latach 1993-2009, liczone jako różnica logarytmów naturalnych, zaś po prawej stronie – poziom PKB *per capita* w 1993 r.

Zmienna objaśniająca s_K jest średnią stopą inwestycji w kapitał rzeczowy w latach 1993-2009. Została ona obliczona jako stosunek akumulacji kapitału trwałego brutto do PKB. Zmienna ta pochodzi z bazy danych Banku Światowego *World Development Indicators* (*WDI*) [World Bank, 2011].

Tempo wzrostu liczby ludności *n* jest różnicą logarytmów naturalnych liczby ludności w 2009 i 1993 r., podzieloną przez 16 (liczba lat). Zmienna ta pochodzi z bazy danych *WDI*.

Obliczenie stopy inwestycji w kapitał ludzki i stopy inwestycji w technologiczne *know-how* (zmienne s_H i s_τ) nie jest już takie łatwe. Wynika to z braku jednej, powszechnie akceptowanej miary tych rodzajów kapitału. W badaniach empirycznych stosuje się wiele różnych miar w zależności od przyjętej metodologii i dostępnych danych. Na potrzeby tej analizy oszacowaliśmy zmienne s_H i s_τ różnymi metodami w celu wyboru najlepszego wariantu. Stopę inwestycji w kapitał ludzki obliczyliśmy w 7 wariantach:

- przeciętna liczba lat nauki w szkołach wyższych dla osób w wieku powyżej 25 lat – zmienna *years_ter*;
- przeciętna liczba lat nauki ogółem dla osób w wieku powyżej 25 lat – zmienna *years_tot*;
- odsetek osób w wieku powyżej 25 lat o wykształceniu wyższym – zmienna *pop_ter*;
- czas trwania obowiązkowej edukacji – zmienna *comp_edu*;
- wskaźnik powszechności szkolnictwa wyższego – zmienna *enrol*;
- siła robocza z wykształceniem wyższym (% siły roboczej ogółem) – zmienna *lab_ter*;
- wydatki publiczne na edukację (% PKB) – zmienna *edu*.

Stopę inwestycji w technologiczne *know-how* obliczyliśmy w 5 wariantach:

- wydatki na B+R (% PKB) – zmienna *r_and_d*;
- zatrudnienie w sektorach wysokiej i średniej technologii (% zatrudnienia ogółem) – zmienna *emp_high*;
- zatrudnienie w sektorach usług wykorzystujących intensywnie wiedzę (% zatrudnienia ogółem) – zmienna *emp_know*;
- eksport produktów wysokiej technologii (% eksportu ogółem) – zmienna *high_exp*;
- liczba wniosków patentowych zgłoszonych do Europejskiego Urzędu Patentowego (na milion mieszkańców) – zmienna *patent*.

Wszystkie powyższe zmienne zostały obliczone jako średnie arytmetyczne dla lat 1993-2009 (w przypadku braku danych średnia obejmuje krótszy okres). Stopy inwestycji w kapitał ludzki pochodzą z bazy danych Banku Światowego *WDI* (zmienna *edu*) lub *Education Statistics* (zmienne *comp_edu*, *enrol* i *lab_ter*), bądź też ze specjalistycznego banku danych Barro-Lee dostępnego w bazie *Education Statistics* (zmienne *years_ter*, *years_tot* i *pop_ter*) [World Bank, 2011]. Stopy inwestycji w technologiczne *know-how* zostały pozyskane z *WDI* (zmienna *high_exp*) lub Eurostatu (zmienne *r_and_d*, *emp_high*, *emp_know* i *patent*) [Eurostat, 2011].

Tablica 2 przedstawia współczynniki korelacji stóp inwestycji w kapitał ludzki dla 27 krajów UE, zaś tablica 3 zawiera macierz korelacji stóp inwestycji w technologiczne *know-how*. Okazuje się, że różne miary tej samej zmiennej w niektórych przypadkach nie wykazują wzajemnej dodatniej korelacji o wysokim poziomie istotności. Powyższy brak zależności utrudnia ostateczny wybór zmiennych, które w równaniach regresji będą występować jako s_H i s_τ. Jednocześnie działa to na niekorzyść wyników, które będą zależeć od konkretnej miary stopy inwestycji w kapitał ludzki i technologiczne *know-how*.

Tabela 2 Współczynniki korelacji stóp inwestycji w kapitał ludzki w 27 krajach Unii Europejskiej

	years_ter	years_tot	pop_ter	comp_edu	enrol	lab_ter	edu
years_ter	1,0000	0,3836**	0,9715***	0,3475**	0,2688	0,8671***	0,1737
years_tot	0,3836**	1,0000	0,4043**	0,2287	–0,0837	0,2954*	0,0035
pop_ter	0,9715***	0,4043**	1,0000	0,3124*	0,2194	0,8233***	0,0992
comp_edu	0,3475**	0,2287	0,3124*	1,0000	0,0774	0,3122*	0,2542
enrol	0,2688	–0,0837	0,2194	0,0774	1,0000	0,1558	0,5605***
lab_ter	0,8671***	0,2954*	0,8233***	0,3122*	0,1558	1,0000	0,1570
edu	0,1737	0,0035	0,0992	0,2542	0,5605***	0,1570	1,0000

Okres: 1993-2009. Liczba obserwacji: 27. Wszystkie zmienne zostały obliczone jako średnie dla całego okresu i przekształcone do postaci logarytmicznej.

*** Korelacja istotna na poziomie istotności 1%.

** Korelacja istotna na poziomie istotności 10%.

* Korelacja istotna na poziomie istotności 15%.

Źródło: Obliczenia własne

Tabela 3 Współczynniki korelacji stóp inwestycji w technologiczne *know-how* w 27 krajach Unii Europejskiej

	r_and_d	emp_high	emp_know	high_exp	patent
r_and_d	1,0000	0,4538**	0,7446***	0,4438**	0,8764***
emp_high	0,4538**	1,0000	0,1101	0,1860	0,2566
emp_know	0,7446***	0,1101	1,0000	0,6844***	0,8631***
high_exp	0,4438**	0,1860	0,6844***	1,0000	0,6219***
patent	0,8764***	0,2566	0,8631***	0,6219***	1,0000

Przypisy i źródło jak w tabeli 2.

Do dalszej analizy wybraliśmy jedną stopę inwestycji w kapitał ludzki: przeciętną liczbę lat nauki w szkołach wyższych dla osób w wieku powyżej 25 lat (*years_ter*) oraz jedną stopę inwestycji w technologiczne *know-how*: wydatki na prace badawczo-rozwojowe w % PKB (*r_and_d*). Wybór nastąpił głównie z dwóch powodów.

Pierwszym jest ekonomiczne znaczenie danej zmiennej. Wydaje nam się, iż przeciętna liczba lat nauki w szkołach wyższych jest bardziej adekwatnym miernikiem inwestycji w kapitał ludzki niż np. wskaźniki uwzględniające wszystkie szczeble edukacji. Grupa UE-27 jest bowiem homogeniczna pod względem systemu edukacji. We wszystkich tych krajach szkolnictwo podstawowe i średnie charakteryzuje się w zasadzie pełną powszechnością. Dlatego też zmienna obejmująca dwa pierwsze szczeble edukacji może nie wykazywać dużego zróżnicowania między krajami. (Inaczej jest w przypadku badań różnych krajów świata, o rozmaitym poziomie rozwoju gospodarczego, gdzie można wprowadzić do analizy wskaźniki powszechności szkolnictwa podstawowego czy średniego, ponieważ są one zróżnicowane między krajami). W państwach UE trudno oczekiwać, aby takie zmienne mogły wyjaśnić różnice w tempie wzrostu gospodarczego. Bardziej adekwatne w tej roli będzie szkolnictwo wyższe.

Z kolei wydatki na B+R wydają się być najlepszym – pod względem merytorycznym – przybliżeniem stopy inwestycji w technologiczne *know-how* spośród 5 analizowanych zmiennych.

Drugie kryterium wyboru zmiennych opiera się na współczynnikach korelacji. Zmienna *years_ter* jest dodatnio skorelowana ze wszystkimi alternatywnymi stopami inwestycji w kapitał ludzki (przy czym cztery z sześciu korelacji są istotne statystycznie). Dlatego będzie ona w dobrym stopniu reprezentowała niedookreśloną w teorii ekonomii stopę inwestycji w kapitał ludzki. Podobnie zmienna *r_and_d* jest dodatnio i istotnie skorelowana ze wszystkimi innymi miarami stóp inwestycji w technologiczne *know-how*.

W badaniu uwzględniamy 27 państw rozszerzonej Unii Europejskiej. Jednak w celu uzyskania pełniejszego obrazu zjawiska konwergencji, hipotezę zbieżności weryfikujemy także dla węższej grupy, obejmującej 10 nowych członków UE z obszaru Europy Środkowo-Wschodniej (EŚW-10): Bułgaria, Czechy, Estonia, Litwa, Łotwa, Polska, Rumunia, Słowacja, Słowenia i Węgry.

4. Prezentacja i interpretacja wyników

Konwergencję analizujemy za pomocą równań przedstawionych w tablicy 1. Zgodnie z rodziną modeli Solowa, tempo wzrostu gospodarczego w poszczególnych krajach zależy od początkowego poziomu dochodu, stóp inwestycji w różne rodzaje kapitału oraz tempa wzrostu liczby ludności. Zależność tempa wzrostu gospodarczego względem początkowego poziomu dochodu jest ujemna, zaś względem stóp inwestycji – dodatnia. Ujemny powinien być też związek między wzrostem gospodarczym a przyrostem demograficznym.

Tablice 4 i 5 przedstawiają wartości współczynników korelacji między zmiennymi wybranymi do równań regresji. Tablica 4 zawiera macierz korelacji dla 27 krajów Unii Europejskiej, zaś tablica 5 obejmuje grupę EŚW-10. Zgodnie z modelem Solowa, należy oczekiwać występowania dodatnich współczynników korelacji między zmienną $\ln(y(t)/y(0))$ a zmiennymi $\ln s_K$, $\ln s_H$ i $\ln s_\tau$ oraz ujemnych współczynników między zmienną $\ln(y(t)/y(0))$ a zmiennymi $\ln y(0)$ i $\ln(n + 0{,}05)$.

Tabela 4 Współczynniki korelacji tempa wzrostu gospodarczego i zmiennych objaśniających dla 27 krajów Unii Europejskiej

	$\ln(y(t)/y(0))$	$\ln y(0)$	$\ln s_K$	$\ln s_H$	$\ln s_\tau$	$\ln(n + 0{,}05)$
$\ln(y(t)/y(0))$	1,0000	–0,7062***	0,4983***	0,0394	–0,4774**	–0,4698**
$\ln y(0)$	–0,7062***	1,0000	–0,4192**	0,2160	0,7460***	0,7443***
$\ln s_K$	0,4983***	–0,4192**	1,0000	–0,2778	–0,3071*	–0,2714
$\ln s_H$	0,0394	0,2160	–0,2778	1,0000	0,3155*	0,1149
$\ln s_\tau$	–0,4774**	0,7460***	–0,3071*	0,3155*	1,0000	0,2948*
$\ln(n + 0{,}05)$	–0,4698**	0,7443***	–0,2714	0,1149	0,2948*	1,0000

Przypisy i źródło jak w tablicy 2.

Tabela 5 Współczynniki korelacji tempa wzrostu gospodarczego i zmiennych objaśniających dla 10 krajów Europy Środkowo-Wschodniej

	$\ln(y(t)/y(0))$	$\ln y(0)$	$\ln s_K$	$\ln s_H$	$\ln s_\tau$	$\ln(n + 0{,}05)$
$\ln(y(t)/y(0))$	1,0000	–0,4503	0,2917	0,3820	–0,3114	–0,3460
$\ln y(0)$	–0,4503	1,0000	0,3863	–0,2766	0,8694***	0,7936***
$\ln s_K$	0,2917	0,3863	1,0000	0,0346	0,4364	0,2643
$\ln s_H$	0,3820	–0,2766	0,0346	1,0000	0,0360	–0,6875**
$\ln s_\tau$	–0,3114	0,8694***	0,4364	0,0360	1,0000	0,5181*
$\ln(n + 0{,}05)$	–0,3460	0,7936***	0,2643	–0,6875**	0,5181*	1,0000

Przypisy i źródło jak w tablicy 2.

W grupie UE-27 tempo wzrostu gospodarczego w latach 1993-2009 jest dodatnio skorelowane ze stopą inwestycji w kapitał fizyczny, zaś ujemnie z początkowym poziomem dochodu, tempem wzrostu liczby ludności oraz nieoczekiwanie ze stopą inwestycji w technologiczne *know-how*. Wszystkie te korelacje są istotne statystycznie (na poziomie istotności co najmniej 10%). Natomiast korelacja ze stopą inwestycji w kapitał ludzki jest nieistotna i bliska zeru (mimo że ma kierunek dodatni, tj. zgodny z oczekiwaniami). Silna ujemna zależność między wzrostem gospodarczym a stopą inwestycji w technologiczne *know-how* budzi pewien niepokój w kontekście dalszej analizy. Jeśli okazałoby się, że ujemny związek tych zmiennych zostanie utrzymany w równaniu regresji, to przeprowadzenie kompletnej analizy do końca nie będzie możliwe. Nie możemy przecież oszacować parametrów funkcji produkcji na podstawie modelu, jeśli z danych empirycznych wynika, że gospodarki krajów UE nie zachowują się zgodnie z tym modelem.

Wyniki analizy korelacji dla 10 krajów Europy Środkowo-Wschodniej są podobne co do znaku jak dla 27 krajów UE, z tą tylko różnicą, że teraz wszystkie korelacje między tempem wzrostu gospodarczego a zmiennymi objaśniającymi są nieistotne. Brak istotności wynika prawdopodobnie z niewielkiej liczby obserwacji (10), znacznie mniejszej niż w przypadku całej Unii Europejskiej (27). W grupie EŚW-10 ujemne są zależności między wzrostem gospodarczym a początkowym poziomem dochodu (co jest zgodne z hipotezą konwergencji), przyrostem demograficznym i stopą inwestycji w technologiczne *know-how* (podobnie jak dla UE-27, ten ostatni związek jest odwrotny do oczekiwanego). Z kolei związek między dynamiką PKB a stopami inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki jest dodatni, przy czym współczynnik korelacji dla tej drugiej zależności jest w miarę wysoki (0,3820), w przeciwieństwie do całej Unii, gdzie był on bliski zera.

Jak widać, wstępna analiza korelacji wskazuje na dobre własności modelu Mankiwa-Romera-Weila w wyjaśnianiu wzrostu gospodarczego badanej grupy, natomiast dla modelu Solowa z technologicznym *know-how* wyniki są nieco gorsze. Pocieszający jest jednak fakt, że w analizie wzajemnych związków między zmiennymi makroekonomicznymi często zdarza się, iż znak współczynnika korelacji jest inny niż znak parametru w równaniu regresji, zwłaszcza gdy do równania regresji wielorakiej wchodzi wiele zmiennych objaśniających.

Dane w tablicach 4 i 5 wskazują, że w obu rozpatrywanych grupach występuje ujemna zależność między dynamiką PKB a wzrostem liczby ludności (dla UE-27 jest ona nawet istotna statystycznie). Niemniej jednak, nie gwarantuje to uzyskania takich samych wyników dla modelu ekonometrycznego estymowanego w postaci ograniczonej i nieograniczonej. Mając na uwadze objętość artykułu, skoncentrujemy się tylko na wersji nieograniczonej. Naszym zdaniem wyniki te będą bardziej miarodajne w porównaniu z wariantem ograniczonym, zwłaszcza dla krajów Europy Środkowo-Wschodniej. Wynika to z tego, że w wielu tych krajach liczba ludności w okresie transformacji spadała, podczas gdy modele wzrostu gospodarczego zakładają zwykle dodatni przyrost naturalny. Dlatego w prezentowanym w niniejszym artykule materiale pomijamy wersje ograniczone i koncentrujemy się tylko na wariantach nieograniczonych, w których zmienna ln(n + 0,05) występuje niezależnie.[7]

Tabela 6 Wyniki równań regresji modelujących realną konwergencję dla 27 krajów Unii Europejskiej

	Konwergencja absolutna	Konwergencja warunkowa: podstawowy model Solowa m = 1	Konwergencja warunkowa: model Solowa z kapitałem ludzkim m = 2	Konwergencja warunkowa: model Solowa z kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how* m = 3
$\ln y(0)$	–0,237 t = –4,99; p = 0,000	–0,229 t = –3,08; p = 0,005	–0,246 t = –3,46; p = 0,002	–0,303 t = –2,44; p = 0,024
$\ln s_K$		0,349 t = 1,56; p = 0,132	0,435 t = 2,01; p = 0,056	0,421 t = 1,90; p = 0,071
$\ln s_H$			0,147 t = 1,92; p = 0,067	0,135 t = 1,68; p = 0,108
$\ln s_{\square}$				0,042 t = 0,56; p = 0,579
ln(n + 005)		0,176 t = 0,49; p = 0,626	0,213 t = 0,63; p = 0,534	0,355 t = 0,84; p = 0,413
stała	2,729 t = 5,92; p = 0,000	2,099 t = 1,10; p = 0,281	2,204 t = 1,22; p = 0,234	3,206 t = 1,26; p = 0,222
skor. R^2	47,9%	49,5%	54,8%	53,3%
R^2	49,9%	55,3%	61,8%	62,3%
n	27	27	27	27
F	F = 24,87; p = 0,000	F = 9,49; p = 0,000	F = 8,88; p = 0,000	F = 6,95; p = 0,001
Szacunkowe wartości parametrów				
λ	0,017	0,016	0,018	0,023
α		0,603	0,526	0,467
β			0,177	0,150
γ				0,046
Szacunkowe wartości parametrów – średnia dla 4 modeli				
λ = 0,019; α = 0,532; β = 0,164; γ = 0,046				

Źródło: Obliczenia własne

[7] Kontrolne obliczenia potwierdzają częściowo nasze przypuszczenia. Otóż dla grupy UE-27 wyniki modelu w postaci ograniczonej są podobne (choć nie identyczne) jak dla modelu nieograniczonego (wyjątkiem jest tylko równanie ze stopą inwestycji w technologiczne *know-how*). Natomiast dla EŚW-10 wyniki te są bardziej zróżnicowane.

Tabela 7 Wyniki równań regresji modelujących realną konwergencję dla 10 krajów Europy Środkowo-Wschodniej

	Konwergencja absolutna	Konwergencja warunkowa: podstawowy model Solowa $m = 1$	Konwergencja warunkowa: model Solowa z kapitałem ludzkim $m = 2$	Konwergencja warunkowa: model Solowa z kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how* $m = 3$
$\ln y(0)$	–0,173 $t = –1,43$; $p = 0,192$	–0,284 $t = –1,43$; $p = 0,203$	–0,464 $t = –2,08$; $p = 0,092$	–0,480 $t = –1,15$; $p = 0,315$
$\ln s_K$		0,524 $t = 1,69$; $p = 0,141$	0,456 $t = 1,57$; $p = 0,177$	0,453 $t = 1,37$; $p = 0,242$
$\ln s_H$			0,270 $t = 1,42$; $p = 0,215$	0,268 $t = 1,23$; $p = 0,288$
$\ln s_{\tau}$				0,011 $t = 0,05$; $p = 0,965$
$\ln(n + 005)$		0,142 $t = 0,19$; $p = 0,856$	1,452 $t = 1,26$; $p = 0,264$	1,467 $t = 1,11$; $p = 0,331$
stała	2,189 $t = 1,99$; $p = 0,081$	1,967 $t = 0,52$; $p = 0,623$	8,040 $t = 1,45$; $p = 0,206$	8,238 $t = 1,10$; $p = 0,333$
skor. R^2	10,3%	19,1%	30,8%	13,5%
R^2	20,3%	46,1%	61,6%	61,6%
n	10	10	10	10
F	$F = 2,03$; $p = 0,192$	$F = 1,71$; $p = 0,264$	$F = 2,00$; $p = 0,233$	$F = 1,28$; $p = 0,417$
Szacunkowe wartości parametrów				
λ	0,012	0,021	0,039	0,041
α		0,649	0,383	0,374
β			0,227	0,221
γ				0,009
Szacunkowe wartości parametrów – średnia dla 4 modeli				
$\lambda = 0,028$; $\alpha = 0,469$; $\beta = 0,224$; $\gamma = 0,009$				

Źródło: Obliczenia własne

Tablice 6 i 7 przedstawiają wyniki estymacji równań regresji ujętych w tablicy 1 dla modeli w postaci nieograniczonej. Poszczególne kolumny dotyczą konwergencji absolutnej oraz konwergencji warunkowej odpowiadającej trzem wariantom modelu Solowa. Podstawowy model Solowa zawiera jedną zmienną objaśniającą dla kapitału: $\ln s_K$; model Solowa z kapitałem ludzkim zawiera dwie takie zmienne: $\ln s_K$ i $\ln s_H$; zaś model z kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how* uwzględnia trzy zmienne objaśniające dla kapitału: $\ln s_K$, $\ln s_H$ i $\ln s_{\tau}$. Poszczególne wiersze przedstawiają oceny parametrów przy zmiennych objaśniających wraz ze statystykami *t*-studenta (t) i poziomami istotności (p). Poniżej znajdują się wartości skorygowanego i zwykłego współczynnika determinacji, liczba obserwacji (n) oraz wyniki testu F. W dolnej części dokonujemy szacunków parametru λ, określającego szybkość zbieżności gospodarek, oraz współczynników α, β i γ występujących w funkcji produkcji. W ostatnim wierszu zostały obliczone średnie wartości tych parametrów na podstawie czterech równań regresji (dla α, β i γ średnia obejmuje mniejszą liczbę równań).

Analiza danych wskazuje, że modele Solowa w bardzo dobry sposób wyjaśniają przyczyny zróżnicowania stóp wzrostu gospodarczego oraz zjawisko realnej konwergencji w krajach Unii Europejskiej (zarówno w całej grupie, jak i wśród krajów Europy Środkowo-Wschodniej). Dla każdego oszacowanego równania regresji oceny parametrów (poza zmienną reprezentującą zmiany demograficzne) mają znak zgodny z teorią ekonomii i są zazwyczaj istotne statystycznie. Wynik ten jest wysoce zadowalający i potwierdza nasze wcześniejsze przypuszczenia o przypadkowości ujemnej korelacji między tempem wzrostu gospodarczego a akumulacją technologicznego *know-how*. Wyniki regresji pozwalają zatem na wyciągnięcie wniosków, które będą zgodne z teoretycznymi własnościami wszystkich wariantów modelu Solowa.

W grupie UE-27 początkowy poziom dochodu jest ujemnie skorelowany ze wzrostem gospodarczym i wysoce istotny we wszystkich równaniach regresji (wartości p od 0,000 do 0,024). Stopy inwestycji w kapitał fizyczny i ludzki są dodatnio zależne od dynamiki PKB i istotne we wszystkich modelach (wartości p między 0,056 i 0,132). Natomiast stopa inwestycji w technologiczne *know-how* jest nieistotna (p = 0,579). Ta ostatnia zmienna ma jednak poprawny (dodatni) znak, dzięki czemu będzie można oszacować funkcję produkcji w 27 krajach UE.

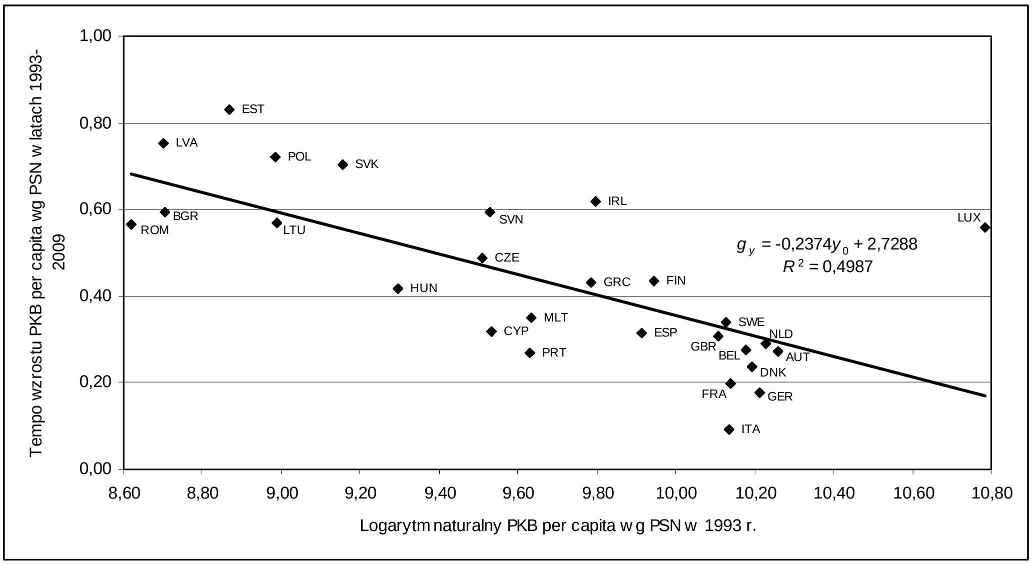
Dla grupy EŚW-10 omawiane zmienne także mają poprawne znaki (z wyjątkiem przyrostu naturalnego), lecz z reguły charakteryzują się niższą istotnością (co może wynikać z mniejszej liczby obserwacji).

Uzyskanie pożądanych kierunków zależności między zmienną objaśnianą a zmiennymi objaśniającymi jest dużym sukcesem, szczególnie w kontekście wcześniejszej analizy korelacji, z której wynikało, że niektóre współczynniki korelacji wskazywały na związki sprzeczne z modelem Solowa i teorią ekonomii. Tak więc na podstawie równań regresji będziemy mogli sformułować wnioski zgodne z teoretycznymi własnościami modeli Solowa. Potwierdzone tym samym zostało, iż rodzina modeli Solowa dobrze nadaje się do wyjaśnienia konwergencji państw Unii Europejskiej.

Ocena parametru przy zmiennej ln$y$(0) jest we wszystkich równaniach ujemna, co jest dowodem istnienia zbieżności, tj. ujemnej zależności między wzrostem gospodarczym a początkowym poziomem dochodu. Ujemną ocenę parametru uzyskujemy w równaniach regresji z jedną oraz wieloma zmiennymi objaśniającymi. Oznacza to, że 27 krajów Unii Europejskiej rozwijało się w latach 1993-2009 zgodnie z hipotezą konwergencji warunkowej oraz absolutnej. Kraje, które na początku lat dziewięćdziesiątych miały niski poziom dochodu na 1 mieszkańca, wykazywały w okresie 1993-2009 przeciętnie szybszy wzrost gospodarczy niż kraje o wysokim poziomie dochodu *per capita* w 1993 r. Świadczy to o istnieniu silnego i wyraźnego zjawiska doganiania Europy Zachodniej przez państwa Europy Środkowo-Wschodniej. Te ostatnie, dzięki występowaniu zjawiska konwergencji, osiągnęły szybszy wzrost gospodarczy i zbliżyły się pod względem poziomu dochodu do Europy Zachodniej. Niemniej jednak, różnice dochodowe między nowymi i starymi członkami UE pozostają nadal bardzo duże.

Oprócz zbieżności do Europy Zachodniej, zbieżność (zarówno warunkowa, jak i absolutna) występowała także wewnątrz obszaru Europy Środkowo-Wschodniej. Świadczą o tym ujemne oceny parametru przy zmiennej ln$y$(0) w równaniach regresji dla grupy EŚW-10.

Graficzną ilustrację konwergencji absolutnej 27 państw Unii Europejskiej przedstawia rysunek 2. Ukazuje on zależność między poziomem PKB na mieszkańca w 1993 r. a tempem wzrostu gospodarczego w latach 1993-2009. Ujemny związek między tymi zmiennymi potwierdza występowanie zbieżności w poziomie dochodów. Linia trendu na rysunku 2 odpowiada równaniu regresji z pierwszej kolumny tablicy 6.



Rysunek 2. Zależność między tempem wzrostu PKB *per capita* w latach 1993-2009 a początkowym poziomem dochodu

Źródło: Obliczenia własne

Na podstawie ocen parametru dla zmiennej ln$y$(0) można dokonać szacunku współczynnika λ informującego o szybkości zbieżności gospodarek. W grupie UE-27 współczynnik ten wynosi 1,7% dla zbieżności absolutnej oraz od 1,6% do 2,3% dla zbieżności warunkowej (średnia dla czterech modeli: 1,9%). Szacunki te oznaczają wolny proces konwergencji starych i nowych członków Unii Europejskiej. Na przykład, $\lambda = 1{,}7\%$ implikuje, że przy utrzymaniu się przeciętnych trajektorii rozwojowych z lat 1993-2009, kraje UE potrzebują 41 lat, aby zmniejszyć o połowę odległość do wspólnego hipotetycznego stanu równowagi długookresowej.[8] Przy współczynniku $\lambda = 2{,}3\%$ zbieżność jest szybsza: zmniejszenie dystansu o połowę wymaga upływu 30 lat, jednak ta wartość parametru λ została uzyskana dla modelu konwergencji warunkowej, który zakłada, że gospodarki dążą do różnych stanów równowagi długookresowej. Ogólnie biorąc, przy utrzymaniu dotychczasowego tempa konwergencji, nie należy oczekiwać szybkiego wyrównania się poziomu dochodów w rozszerzonej UE. Nawet jeśli proces „doganiania" ulegnie przyspieszeniu, to i tak występujące różnice w poziomie dochodów między starymi i nowymi członkami UE będą się długo utrzymywać.

W grupie EŚW-10 konwergencja absolutna przebiega równie wolno, chociaż nieco wyższe są współczynniki zbieżności warunkowej. Współczynnik λ przyjmuje wartości od 1,2% dla zbieżności absolutnej do 4,1% dla zbieżności warunkowej (średnia dla czterech modeli: 2,8%). Przy tempie konwergencji 1,2%, zmniejszenie o połowę dystansu w stosunku do stanu ustalonego wymaga upływu aż 58 lat; dla λ = 4,1% będzie to tylko 17 lat, jednak ta wartość współczynnika λ zakłada zbieganie do różnych stanów równowagi długookresowej. Ogólnie biorąc, konwergencja wewnątrz obszaru Europy Środkowo-Wschodniej jest powolna.

Różnice w stopach inwestycji w poszczególne rodzaje kapitału, zmianach demograficznych i początkowym poziomie dochodu wyjaśniają olbrzymią część wariancji stóp wzrostu gospodarczego w krajach Unii Europejskiej. W grupie UE-27 skorygowany współczynnik determinacji dla podstawowego modelu Solowa wynosi 48%, zaś dla rozszerzonych jego wariantów – niecałe 55%. Dla krajów EŚW-10 skorygowane współczynniki determinacji nie przekraczają 31%, jednak jest to wynik

[8] Czas, jaki potrzebuje zmienna (w tym przypadku $y - y^*$) ze stałą ujemną stopą wzrostu do zmniejszenia swojej wartości o połowę, wynosi w przybliżeniu 70 podzielone przez stopę wzrostu wyrażoną w procentach, np. 70/1,7 = 41 lat. Dokładniej rzecz biorąc, czas (t^*) stanowiący połowę okresu jest rozwiązaniem równania: $e^{-\beta t^*} = 0{,}5$, gdzie β jest stopą spadku. Logarytmując tę formułę, uzyskujemy: $t^* = -\ln(0{,}5)/\beta \approx 0{,}6931/0{,}017 = 41$ lat.

zaniżony z uwagi na małą liczbę obserwacji (pojawia się duża rozbieżność między zwykłym współczynnikiem determinacji, który osiąga nawet 62%, a skorygowanym zawierającym się w przedziale 10-31%).

Wysoka zgodność uzyskanych wyników z teoretycznymi własnościami modeli Solowa pozwala na estymację parametrów funkcji produkcji. Szacunki zostały przeprowadzone według wzorów z tablicy 1.

Z podstawowego modelu Solowa wynika, że wynagrodzenie kapitału fizycznego w dochodzie wynosi 0,603 w grupie UE-27 i 0,649 w EŚW-10. Wprowadzając do modelu kapitał ludzki wynagrodzenie kapitału fizycznego zmniejsza się na korzyść kapitału ludzkiego. Na podstawie modelu Mankiwa-Romera-Weila elastyczność produkcji względem kapitału rzeczowego wynosi 0,526 i 0,383 w obu analizowanych grupach, natomiast elastyczność produkcji względem kapitału ludzkiego jest odpowiednio równa 0,177 i 0,227. Udziały te jeszcze bardziej się zmniejszają, jeśli do modelu zostanie wprowadzony trzeci rodzaj kapitału. Dla modelu Solowa z kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how* udział kapitału fizycznego w dochodzie wynosi 0,467 w grupie UE-27 i 0,374 w EŚW-10, udział kapitału ludzkiego w dochodzie kształtuje się na poziomie 0,150 i 0,221 odpowiednio w obu grupach, zaś udział technologii jest równy 0,046 i 0,009. Ta ostatnia liczba wskazuje na zadziwiająco małe znaczenie inwestycji w technologiczne *know-how* w przyspieszaniu wzrostu gospodarczego nowych krajów członkowskich UE. Faktycznie, w krajach Europy Środkowo-Wschodniej wydatki na B+R stanowią bardzo małą część PKB, toteż tylko marginalnie przyczyniają się do tworzenia dochodu. Obliczając średnie wartości oszacowanych współczynników możemy dokonać estymacji funkcji produkcji. Dla grupy UE-27 funkcja produkcji ma postać:

$$Y = K^{0,532} H^{0,164} T^{0,046} L^{0,258}, \tag{38}$$

zaś dla krajów EŚW-10 jest ona następująca:

$$Y = K^{0,469} H^{0,224} T^{0,009} L^{0,298}. \tag{39}$$

Potęgę przy zmiennej L, a więc wynagrodzenie pracy w dochodzie, obliczyliśmy jako dopełnienie do jedności sumy współczynników przy pozostałych zmiennych. Wynika to z przyjętego założenia o stałych przychodach ze skali. Mimo pewnych różnic w wartościach parametrów, funkcje produkcji określone wzorami (38) i (39) są dość podobne. Można przyjąć, że największy udział w dochodzie przypada kapitałowi fizycznemu i wynosi około 0,5. Udziały wynagrodzeń pozostałych czynników wytwórczych są znacznie mniejsze: dla pracy będzie to około $^1/_3$, dla kapitału ludzkiego niecałe $^1/_4$, zaś udział wynagrodzenia technologii w dochodzie jest marginalny.

5. Porównanie z wynikami innych badań

Porównanie naszej analizy z wynikami innych badań empirycznych przebiega dwuetapowo. Na początku pokazujemy jak różne warianty modelu Solowa są wykorzystywane do analizy konwergencji innych krajów i regionów świata. W drugiej zaś części przedstawiamy przegląd kilku badań empirycznych na temat konwergencji państw Europy Środkowo-Wschodniej do Unii Europejskiej.

Mankiw, Romer i Weil [1992] dokonują szacunków funkcji produkcji i współczynnika szybkości zbieżności λ dla 3 grup krajów: 98 i 75 krajów świata oraz 22 krajów OECD w okresie 1960-1985. W prawie wszystkich estymowanych równaniach regresji uzyskali oni poprawne znaki ocen parametrów strukturalnych. Z podstawowego modelu Solowa wynika, że udział wynagrodzenia kapitału fizycznego w dochodzie wynosi 0,60 i 0,59 w grupie 98 i 75 państw oraz 0,36 w 22 krajach OECD. Na podstawie modelu z kapitałem ludzkim udział wynagrodzenia kapitału fizycznego zmniejszył się do 0,29-0,48 w liczniejszych grupach oraz 0,14-0,38 w 22 krajach OECD, zaś udział wynagrodzenia kapitału ludzkiego w dochodzie wynosi od 0,23 do 0,37 niezależnie od grupy. Funkcja produkcji zgodna z danymi empirycznymi ma postać: $Y = K^{1/3}H^{1/3}L^{1/3}$. Badanie Mankiwa, Romera i Weila potwierdza występowanie konwergencji warunkowej. W grupie 98 krajów współczynnik szybkości zbieżności wynosi –0,4% dla konwergencji absolutnej (co oznacza brak konwergencji), 0,6% dla konwergencji warunkowej na podstawie standardowego modelu Solowa oraz 1,4% dla konwergencji warunkowej wynikającej z modelu Solowa z kapitałem ludzkim. W grupie 75 krajów oszacowane współczynniki λ wynoszą odpowiednio: 0,02%, 1,0% oraz 1,8-1,9%, zaś w 22 krajach OECD: 1,7%, 1,7% oraz 2,0-2,1%.

Nonneman i Vanhoudt [1996] analizują determinanty poziomu dochodu i tempa wzrostu gospodarczego w 22 krajach OECD w latach 1960-1985 na podstawie jeszcze bardziej rozbudowanego modelu Solowa, uwzględniającego trzy rodzaje kapitału: kapitał fizyczny, kapitał ludzki i technologiczne *know-how*. Taki model wyjaśnia ponad 70% różnic w poziomie dochodu i tempie wzrostu gospodarczego krajów OECD. Udziały wynagrodzeń kapitału fizycznego, kapitału ludzkiego i technologicznego *know-how* w dochodzie wynoszą: 0,350, 0,148 i 0,084. Funkcja produkcji zgodna z danymi empirycznymi ma postać: $Y = K^{1/3}H^{3/20}T^{3/35}L^{2/5}$. Model Solowa z kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how* informuje, że kraje OECD wykazują zbieżność warunkową w tempie 2,9% rocznie.

Murthy i Chien [1997] analizują determinanty tempa wzrostu gospodarczego w krajach OECD w okresie 1960-1985 na podstawie modelu Solowa z kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how*. Stosują oni nową miarę kapitału ludzkiego, obliczoną na podstawie wskaźników powszechności szkolnictwa podstawowego, średniego i wyższego. Modele Solowa w wersji rozszerzonej wyjaśniają ponad 80% zróżnicowania temp wzrostu gospodarczego. W każdym równaniu regresji oceny parametrów mają poprawny znak i są istotne na poziomie 5%. Współczynnik szybkości zbieżności otrzymany na podstawie modelu Solowa z kapitałem ludzkim wynosi 2,1-2,4%, zaś na podstawie modelu z kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how* – 3,3-3,8%.

Murthy i Upkolo [1999] analizują determinanty tempa wzrostu gospodarczego w 37 krajach Afryki w okresie 1960-1985 w oparciu o model Solowa z kapitałem ludzkim. Model ten wyjaśnia ok. 30-40% zróżnicowania temp wzrostu gospodarczego. W każdym równaniu regresji oceny parametrów mają poprawny znak, a dla stóp inwestycji w kapitał fizyczny i ludzki są one istotne na poziomie 10%. Udział wynagrodzenia kapitału fizycznego w dochodzie wynosi 0,40-0,48, zaś udział wynagrodzenia kapitału ludzkiego jest równy 0,26-0,28. Współczynnik szybkości zbieżności λ ma wartość 1,3-1,7%.

Nakamura [2001] estymuje funkcję produkcji i współczynniki szybkości zbieżności dla 50 krajów w okresie 1966-1990 według modelu Solowa z kapitałem ludzkim (na podstawie nieco zmodyfikowanych równań regresji). Udział wynagrodzenia kapitału fizycznego w dochodzie według podstawowego modelu Solowa wynosi 0,375 dla całej grupy oraz od 0,193 do 0,411 w mniejszych podgrupach. Dla modelu Solowa z kapitałem ludzkim udziały wynagrodzeń kapitału fizycznego i ludzkiego wynoszą 0,503 i 0,128 dla całej grupy, zaś w mniejszych podgrupach: od 0,371 do 0,478 dla kapitału fizycznego oraz od –0,074 do 0,221 dla kapitału ludzkiego. Współczynnik szybkości zbieżności λ jest równy 9,09%.

Nie wszystkie badania empiryczne wskazują na dobre dopasowanie wniosków płynących z modeli Solowa do danych empirycznych. Taylor [1999] analizuje determinanty tempa wzrostu gospodarczego 7 krajów świata w okresie 1870-1914 na podstawie modelu Solowa z kapitałem ludzkim oraz modelu Solowa z kapitałem ludzkim i ziemią. Okazuje się, że większość parametrów w estymowanych równaniach regresji jest nieistotna. Wartość współczynnika zbieżności warunkowej λ na poziomie 0,4% jest zbyt niska. Według autora oznacza to, że modele neoklasyczne nie są wystarczające do wyjaśnienia wzrostu gospodarczego analizowanych krajów na przełomie XIX i XX w.

W literaturze ekonomicznej można także znaleźć wiele analiz dotyczących podjętej w tym artykule tematyki realnej konwergencji gospodarki Polski i innych państw

Europy Środkowo-Wschodniej oraz scenariuszy doganiania przez te kraje Europy Zachodniej. Oprócz naszych własnych wcześniejszych badań [zob. np. Rapacki i Próchniak, 2007, 2009, 2010a, 2010b; Matkowski i Próchniak, 2009, 2011; Rapacki, 2009], warto przywołać opublikowane w ostatnim czasie pozycje takich polskich autorów jak: Growiec, 2005; Michałek, Siwiński i Socha, 2007; Wójcik, 2008; Kołodko, 2009; Liberda, 2009.

Większość tych prac potwierdza występowanie zbieżności gospodarki polskiej i innych krajów Europy Środkowo-Wschodniej do Unii Europejskiej, chociaż szybkość tego procesu jest różna. Na przykład, Matkowski i Próchniak [2011] obliczają tempo zamykania luki dochodowej 10 krajów Europy Środkowo-Wschodniej, tzn. liczbę lat (licząc od 2010 r.) niezbędnych do osiągnięcia średniego poziomu PKB *per capita* UE-15, zakładając różne dalsze scenariusze rozwojowe. Wyniki wskazują, że nawet przy dość optymistycznych scenariuszach dalszego rozwoju okres niezbędny do osiągnięcia poziomu dochodu UE-15 jest dla większości krajów EŚW-10 bardzo długi. W przypadku Polski, przy uwzględnieniu parytetu siły nabywczej, potrzeba na to co najmniej 20 lat. Podobne szacunki zostały uzyskane przez Rapackiego i Próchniaka [2010a]. Według ich obliczeń, począwszy od 2007 r., poszczególne kraje EŚW-10 potrzebują od 8 do 37 lat (wariant optymistyczny) bądź od 13 do 39 lat (wariant bardziej prawdopodobny) na całkowite zamknięcie luki dochodowej w stosunku do obszaru UE-15. Autorzy ci dokonują także interesującej analizy przyczyn realnej konwergencji krajów EŚW-10 do UE. Okazuje się, że inwestycje zagraniczne, wolność gospodarcza, postęp reform rynkowych i pomoc zagraniczna były głównymi kanałami oddziaływania „kotwicy integracyjnej” na wzrost gospodarczy nowych krajów członkowskich UE. Z kolei Rapacki i Próchniak [2010b] analizują konwergencję absolutną i warunkową państw EŚW-10 na tle innych gospodarek wschodzących. Z badania tego wynika m.in., że grupa EŚW-10 jako jedyna odnotowała zbieżność absolutną w latach 1993-2007; inne wschodzące regiony świata – Ameryka Łacińska (11 krajów), Afryka (5), Bliski Wschód (4), Azja Płd.-Wsch. (4) i kraje postsocjalistyczne spoza obszaru UE (5) – nie wykazywały zbieżności w kategoriach absolutnych.

6. Podsumowanie

1. Celem niniejszego badania jest określenie, w jakim stopniu model Solowa nadaje się do wyjaśnienia zjawiska realnej konwergencji krajów rozszerzonej Unii Europejskiej. Weryfikacji poddajemy trzy warianty tego modelu: podstawowy model Solowa, model Solowa z kapitałem ludzkim (tzw. model Mankiwa-Romera-

Weila) oraz model Solowa z kapitałem ludzkim i technologicznym *know-how*. Analiza obejmuje okres 1993-2009.

2. Modele Solowa dobrze wyjaśniają różnice w tempie wzrostu gospodarczego i zjawisko realnej konwergencji w grupie UE-27. Około 55% wariancji w tempie wzrostu gospodarczego wynika ze zróżnicowania początkowych poziomów dochodu, stóp inwestycji w poszczególne rodzaje kapitału i zmian demograficznych.
3. Zależność między tempem wzrostu gospodarczego a początkowym poziomem dochodu jest ujemna, co oznacza, że kraje rozwijają się zgodnie z hipotezą konwergencji (w ujęciu absolutnym i warunkowym). Współczynnik λ informujący o szybkości zbieżności wynosi średnio 1,9% dla 27 krajów UE i 2,8% dla 10 krajów Europy Środkowo-Wschodniej. Wskazuje to na dość wolne tempo procesu zbieżności.
4. Funkcja produkcji zgodna z danymi empirycznymi dla grupy UE-27 ma postać: $Y = K^{0,532}H^{0,164}T^{0,046}L^{0,258}$, zaś dla obszaru EŚW-10 jest następująca: $Y = K^{0,469}H^{0,224}T^{0,009}L^{0,298}$.

Bibliografia

Eurostat, *Database*, 2011 – http://epp.eurostat.ec.europa.eu/.

Growiec J., *Dynamika konwergencji Polski z Unią Europejską*, „Gospodarka Narodowa", 5-6, 2005, s. 101-118.

Heston A., Summers R., Aten B., *Penn World Table Version 7.0*, Center for International Comparisons of Production, Income and Prices at the University of Pennsylvania, March 2011 – http://pwt.econ.upenn.edu/.

Kołodko G.W., *Wielka Transformacja 1989-2029. Uwarunkowania, przebieg, przyszłość*, „Ekonomista", 3, 2009, s. 353-371.

Liberda Z.B. (red.), *Konwergencja gospodarcza Polski. VIII Kongres Ekonomistów Polskich*, PTE, Warszawa 2009.

Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N., *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics", 107, 1992, s. 407-437.

Matkowski Z., Próchniak M., *Zbieżność rozwoju gospodarczego Polski i innych krajów Europy Środkowowschodniej w stosunku do Unii Europejskiej*, „Zarządzanie Ryzykiem", 30, 2009, s. 53-97.

Matkowski Z., Próchniak M., *Konwergencja poziomów dochodu*, w: *Polska. Raport o konkurencyjności 2011* (red. M.A. Weresa), SGH, Warszawa 2011 (w druku).

Michałek J.J., Siwiński W., Socha M.W. (red.), *Polska w Unii Europejskiej. Dynamika konwergencji ekonomicznej*, PWN, Warszawa 2007.

Murthy N.R.V., Chien I.S., *The Empirics of Economic Growth for OECD Countries: Some New Findings*, „Economics Letters”, 55, 1997, s. 425-429.

Murthy N.R.V., Upkolo V., *A Test of the Conditional Convergence Hypothesis: Econometric Evidence from African Countries*, „Economics Letters”, 65, 1999, s. 249-253.

Nakamura H., *An Empirical Reexamination of the Solow Growth Model*, „Journal of the Japanese and International Economics”, 15, 2001, s. 323-340.

Nonneman W., Vanhoudt P., *A Further Augmentation of the Solow Model and the Empirics of Economic Growth for OECD Countries*, „Quarterly Journal of Economics”, 111, 1996, s. 943-953.

Rapacki R. (red.), *Wzrost gospodarczy w krajach transformacji: konwergencja czy dywergencja?*, PWE, Warszawa 2009.

Rapacki R., Próchniak M., *Konwergencja beta i sigma w krajach postsocjalistycznych w latach 1990-2005*, „Bank i Kredyt”, 8-9, 2007, s. 42-60.

Rapacki R., Próchniak M., *The EU Enlargement and Economic Growth in the CEE New Member Countries*, referat przygotowany na międzynarodową konferencję pt. „Five years of an enlarged EU – a positive-sum game”, organizowaną przez Komisję Europejską, Bruksela, 13-14.11.2008, w: „European Economy. Economic Papers”, nr 367, 2009.

Rapacki R., Próchniak M., *Wpływ rozszerzenia Unii Europejskiej na wzrost gospodarczy i realną konwergencję krajów Europy Środkowo-Wschodniej*, „Ekonomista”, 4, 2010a, s. 523-546.

Rapacki R., Próchniak M., *Economic Growth Paths in the CEE Countries and in Selected Emerging Economies, 1993-2007*, „Research in Economics and Business: Central and Eastern Europe”, 2, 2010b, s. 5-33.

Solow R.M., *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics”, 70, 1956, s. 65-94.

Swan T., *Economic Growth and Capital Accumulation*, „Economic Record”, 32, 1956, s. 334-361.

Taylor A.M., *Sources of Convergence in the Late Nineteenth Century*, „European Economic Review”, 43, 1999, s. 1621-1645.

World Bank, *World Development Indicators and Education Statistics Database*, 2011 – http://databank.worldbank.org/.

Wójcik C., *Integracja ze strefą euro. Teoretyczne i praktyczne aspekty konwergencji*, PWN, Warszawa 2008.