Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe
Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach
ISSN 2083-8611 Nr 297 · 2016

Agnieszka Marciniuk

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu
Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów
Katedra Statystyki
agnieszka.marciniuk@ue.wroc.pl

MAŁŻEŃSKA RENTA HIPOTECZNA UWZGLĘDNIAJĄCA ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY PRZYSZŁYM CZASEM TRWANIA ŻYCIA MAŁŻONKÓW*

Streszczenie: Społeczeństwo żyje coraz dłużej, a znaczny spadek umieralności w stosunku do lat 60.-70. XX wieku obserwuje się u osób w wieku emerytalnym. Emerytura z tytułu ubezpieczeń społecznych jest niska i może nie być wystarczająca, aby godnie przeżyć starość. Ważną kwestię stanowi możliwość pozyskania dodatkowych środków finansowych, aby zachować dotychczasowy standard. Jednym z takich rozwiązań może być tzw. renta hipoteczna (*reverse annuity contracts*), czyli dożywotnia renta, którą właściciel mieszkania może otrzymywać w zamian za przeniesienie praw własności na spółkę, gwarantując sobie w akcie notarialnym prawo do mieszkania w nim do śmierci. W sytuacji gdy właścicielami nieruchomości są małżonkowie, istnieje możliwość wypłacania tzw. hipotecznych rent małżeńskich. Celem artykułu jest wyznaczenie wielkości świadczenia w przypadku, gdy renta jest wypłacana do momentu śmierci pierwszego z małżonków (status wspólnego życia) oraz gdy renta jest wypłacana do śmierci drugiego małżonka (status ostatniego przeżywającego), przy bardziej realnym założeniu, że przyszłe czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi. Porównano wysokość świadczeń w przypadku zależności i niezależności dalszego trwania życia małżonków. Uwzględniono również częstotliwość wypłacania renty. Prawdopodobieństwa trwania życia wyznaczono na podstawie danych GUS z wykorzystaniem modelu Markowa. W obliczeniach zastosowano stopę procentową określoną modelem Svenssona.

Słowa kluczowe: małżeńska renta hipoteczna, status wspólnego życia, status ostatniego przeżywającego, zależność dalszego czasu trwania życia małżonków.

---

* Praca finansowana z projektu badawczego UMO-2013/09/B/HS4/00490 pt. „Niestandardowe wieloosobowe produkty ubezpieczeniowe uwzględniające zależności między ubezpieczonymi".

Wprowadzenie

Społeczeństwo żyje coraz dłużej, a znaczny spadek umieralności w stosunku do lat 60.-70. XX wieku obserwuje się u osób w wieku emerytalnym. Osoby, które jeszcze kilka lat temu przeszły na emeryturę w młodszym wieku, mogą oczekiwać, że przez długi czas będą pobierały emeryturę, która z tytułu ubezpieczeń społecznych jest niska i może nie być wystarczająca, aby godnie przeżyć starość. Ważną kwestię stanowi możliwość pozyskania dodatkowych środków finansowych, aby zachować dotychczasowy standard życia. Jednym z takich rozwiązań może być tzw. renta hipoteczna (*reverse annuity contracts*), czyli dożywotnia renta, którą właściciel mieszkania może otrzymywać w zamian za przeniesienie praw własności na spółkę, gwarantując sobie w akcie notarialnym prawo do mieszkania w nim do śmierci.

Często właścicielami nieruchomości są małżonkowie. Naturalnym rozwiązaniem wydaje się być możliwość wypłacania tzw. hipotecznych rent małżeńskich (obecnie na rynku polskim jest oferowana jedynie renta indywidualna). Celem artykułu jest wyznaczenie wielkości świadczenia w przypadku dwóch rodzajów rent małżeńskich, gdy renta jest wypłacana do momentu śmierci pierwszego z małżonków (status wspólnego życia) oraz gdy renta jest wypłacana do śmierci drugiego małżonka (status ostatniego przeżywającego). Świadczenie jest obliczane przy bardziej realnym założeniu, że przyszłe czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi. W artykule porównano wysokość tak wyznaczonego świadczenia z wysokością świadczenia obliczonego przy klasycznym założeniu o niezależności dalszego czasu trwania życia małżonków. Ponadto uwzględniono częstotliwość wypłacania renty. Prawdopodobieństwa trwania życia małżonków wyznaczono na podstawie danych udostępnionych przez GUS, dotyczących ludności Dolnego Śląska, z wykorzystaniem modelu Markowa. W obliczeniach zastosowano stopę procentową, określoną modelem Svenssona, której parametry są estymowane na podstawie rzeczywistych danych z rynku polskiego.

1. Małżeńska renta hipoteczna

Renta hipoteczna (*reverse annuity contract)* jest to terminowe lub dożywotnie świadczenie (renta), które właściciel nieruchomości (starsza osoba) może otrzymać w zamian za przeniesienie praw własności na specjalnie w tym celu stworzony fundusz hipoteczny, gwarantując sobie w akcie notarialnym prawo do mieszkania w danym lokalu do śmierci. Przeniesienie praw własności następuje już po podpisaniu aktu notarialnego, przy czym zabezpieczenie wypłacania renty jest wpisane w dziale IV ksiąg wieczystych. Bezpieczeństwo klientów jest regulowane jedynie kodeksem cywilnym, a w razie bankructwa spółki pozostaje jedynie dochodzenie praw na drodze sądowej [por. Borys, 2013]. W chwili obecnej[1] poza kodeksem cywilnym nie ma regulacji prawnych dla tego rodzaju produktu. Sprzedaż renty hipotecznej nie jest również nadzorowana przez Komisję Nadzoru Finansowego (KNF). Konkurencyjnym produktem, nadzorowanym przez KNF, jest odwrócony kredyt hipoteczny (*reverse mortgage*). Ustawę o tym kredycie prezydent Bronisław Komorowski podpisał w dniu 10.11.2014 roku. Hipoteka odwrócona i odwrócony kredyt hipoteczny są to dwa zupełnie różne produkty [por. Marciniuk, 2014].

Z uwagi na to, że właścicielami nieruchomości są często małżonkowie, a ludzie żyją coraz dłużej, to naturalne wydaje się być wprowadzenie na rynek produktu dla małżonków – małżeńskiej renty hipotecznej, obecnie nieoferowanej w Polsce. W artykule wyróżniono dwa rodzaje takiej renty:

1) małżeńska renta hipoteczna, gdy świadczenie jest wypłacane jedynie do momentu śmierci pierwszego z małżonków, tzw. **status wspólnego życia** (SWŻ),
2) małżeńska renta hipoteczna, gdy świadczenie jest wypłacane do momentu śmierci drugiego małżonka, tzw. **status ostatniego przeżywającego** (SOP).

Świadczenie renty małżeńskiej jest wypłacane dożywotnio, a jego wysokość jest ustalana na podstawie wieku świadczeniobiorcy x, dalszego czasu trwania życia K_x oraz wartości nieruchomości W. Zgodnie z założeniami jest wypłacany procent α, gdzie $\alpha \in (0\%, 50\%]$, wartości nieruchomości W [por. Borys, 2013]. Korzystając z zasady równoważności, która mówi o tym, że oczekiwana wielkość zaktualizowanych wszystkich przyszłych wypłat jest równa oczekiwanej wielkości zaktualizowanych wszystkich przyszłych wpłat, wielkość świadczenia renty R wyznacza się z następującego równania:

$$E(\alpha \cdot W) = E(R \cdot Z),$$

gdzie Z oznacza zaktualizowaną na moment zerowy wielkość świadczenia.

Z powyższego równania, w którym jedynie wielkość Z, zależna od dalszego czasu trwania życia, jest zmienną losową, otrzymujemy:

$$R = \frac{\alpha \cdot W}{E(Z)}. \tag{1}$$

[1] Stan na grudzień 2014 roku.

W celu wyznaczenia wielkości świadczenia rent małżeńskich niezbędne jest wprowadzenie kilku definicji i oznaczeń. Niech x_1 oznacza wiek mężczyzny, a x_2 wiek kobiety. Czas trwania życia osoby w wieku x, mierzony w podokresach roku, określa zmienna losowa $K_x^{(m)}$, gdzie $m = 1,2,\ldots$ [por. Marciniuk, 2004]. Status wspólnego życia (SWŻ) definiuje się następująco [por. Bowers, 1986]:

$$u := x_1 : x_2 .$$

Czas trwania życia statusu u, mierzony w podokresach roku[2] (m = 1,2,...,), oznacza zmienna losowa $K_u^{(m)}$. Zmienna $K_u^{(m)}$ jest zdefiniowana, jako minimum z czasów trwania życia poszczególnych osób $K_{x_1}^{(m)}$ i $K_{x_2}^{(m)}$, następującym wzorem [por. Marciniuk, 2014]:

$$K_u^{(m)} = \min\left(K_{x_1}^{(m)}, K_{x_2}^{(m)}\right).$$

Prawdopodobieństwo, że status wspólnego życia *u* będzie trwał przynajmniej *k* podokresów roku, oblicza się następująco:

$$_{k/m}p_u = {}_{k/m}p_{x_1:x_2} = P\left(\frac{K_u^{(m)}}{m} \geq \frac{k}{m}\right) = P\left(\frac{K_{x_1}^{(m)}}{m} \geq \frac{k}{m}, \frac{K_{x_2}^{(m)}}{m} \geq \frac{k}{m}\right). \qquad (2)$$

Status ostatniego przeżywającego (SOP) dla odróżnienia oznacza się przez *w* i definiuje następująco [por. Bowers, 1986]:

$$w := \overline{x_1 : x_2} .$$

Czas trwania życia statusu w jest to zmienna losowa $K_w^{(m)}$ zdefiniowana jako maksimum z czasów dalszego trwania życia poszczególnych osób $K_{x_1}^{(m)}$ i $K_{x_2}^{(m)}$ określona następującym wzorem [por. Marciniuk, 2014]:

$$K_w^{(m)} = \max\left(K_{x_1}^{(m)}, K_{x_2}^{(m)}\right).$$

Prawdopodobieństwo, że status wspólnego życia w będzie trwał przynajmniej *t* podokresów roku, oblicza się następująco:

$$\begin{aligned} {}_k p_w &= P\left(K_w^{(m)} \geq k\right) = P\left(K_{x_1}^{(m)} \geq k \vee K_{x_2}^{(m)} \geq k\right) = \\ &= P\left(K_{x_1}^{(m)} \geq k\right) + P\left(K_{x_2}^{(m)} \geq k\right) - P\left(K_{x_1}^{(m)} \geq k, K_{x_2}^{(m)} \geq k\right). \end{aligned}$$

[2] Podział na równe części jest umowny, gdyż np. podział na 12 części oznacza, że rok jest podzielony na miesiące, które są jednak równej długości.

Korzystając ze wzoru (2), otrzymujemy:

$$ {}_{k/m}p_w = {}_{k/m}p_{\overline{x_1:x_2}} = {}_{k/m}p_{x_1} + {}_{k/m}p_{x_2} - {}_{k/m}p_{x_1:x_2}. \tag{3} $$

Prawdopodobieństwo ${}_{k/m}p_x$ oblicza się w ogólnym przypadku ze wzoru [por. Marciniuk, 2004]:

$$ {}_{k/m}p_x = P\left(\frac{K_x^{(m)}}{m} \geq \frac{k}{m}\right) = P\left(K_x^{(m)} \geq k\right) = {}_{[k/m]}p_x \cdot {}_{(k \div m)}p_{x+[k/m]}, $$

gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a, natomiast $(a \div b)$ – część ułamkową z dzielenia liczb a i b.

Jeżeli rozkład śmierci w ciągu roku jest jednostajny [por. Bowers, 1986], to powyższy wzór przyjmuje postać:

$$ {}_{k/m}p_x = P\left(\frac{K_x^{(m)}}{m} \geq \frac{k}{m}\right) = {}_{[k/m]}p_x \cdot \left(1 - (k \div m) \cdot \left(1 - p_{x+[k/m]}\right)\right). \tag{4} $$

Gdy renta hipoteczna jest wypłacana m razy w roku z góry w wysokości 1 j.p. rocznie (w każdym podokresie roku w wysokości $1/m$, $m > 0$) do momentu śmierci pierwszej osoby (SWŻ), to wartość aktuarialna takiej renty, równa wartości oczekiwanej zaktualizowanych wszystkich przyszłych świadczeń, jest obliczana ze wzoru [por. Marciniuk, 2014]:

$$ \ddot{a}_u^{(m)} = \ddot{a}_{x_1:x_2}^{(m)} = E(Z) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} \cdot P\left(\frac{K_u^{(m)}}{m} \geq \frac{k}{m}\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} \cdot {}_{k/m}p_u, \tag{5} $$

gdzie $v^{\frac{k}{m}}$ to czynnik dyskontowania z podokresu k na moment zerowy.

W przypadku SOP wartość aktuarialna renty, równa wartości oczekiwanej zaktualizowanych wszystkich przyszłych świadczeń, jest obliczana ze wzoru [por. Marciniuk, 2014]:

$$ \ddot{a}_w^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2}}^{(m)} = E(Z) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} \cdot P\left(K_w^{(m)} \geq k\right). \tag{6} $$

Po uproszczeniach powyższy wzór można zapisać następująco:

$$ \ddot{a}_w^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{x_1:x_2}}^{(m)} = \ddot{a}_{x_1}^{(m)} + \ddot{a}_{x_2}^{(m)} - \ddot{a}_u^{(m)} = \ddot{a}_{x_1}^{(m)} + \ddot{a}_{x_2}^{(m)} - \ddot{a}_{x_1:x_2}^{(m)}, \tag{7} $$

gdzie $\ddot{a}_{x_1:x_2}^{(m)}$ wyznacza się ze wzoru (5), a $\ddot{a}_{x_1}^{(m)}$ ze wzoru w postaci [por. Marciniuk, 2014]:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} \cdot {}_{k/m}p_x. \tag{8}$$

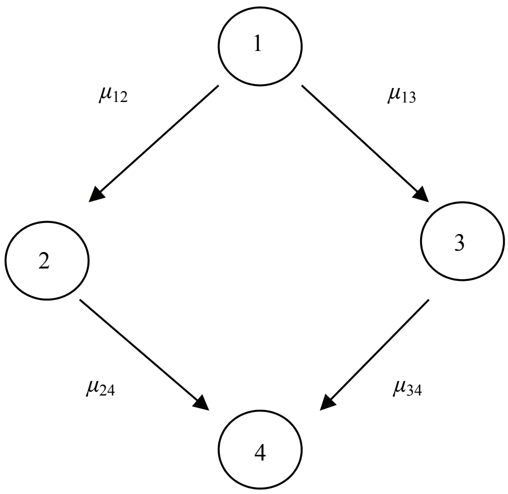
Zarówno we wzorze (5), jak i (7) występuje prawdopodobieństwo ${}_k p_u = P\left(K_u^{(m)} \geq k\right)$, określone wzorem (2), dlatego niezbędne jest jego wyznaczenie. W przypadku gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są niezależne:

$${}_k p_u = P\left(K_u^{(m)} \geq k\right) = P\left(K_{x_1}^{(m)} \geq k\right) \cdot P\left(K_{x_2}^{(m)} \geq k\right).$$

W niniejszym artykule przyjęto założenie, że dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi, a prawdopodobieństwo ${}_k p_u$ oblicza się w inny sposób, co zostało przedstawione w kolejnym punkcie.

2. Wielostanowy model Markowa. Prawdopodobieństwo przeżycia dla statusu wspólnego trwania życia

Struktura zależności długości życia małżonków może być modelowana za pomocą procesów Markowa. Rozpatrzmy najprostszy model z czterema stanami: pierwszy, gdy obydwoje małżonkowie żyją (1), dwa stany obejmujące zdarzenie śmierci jednego z małżonków, tj. (2) – nie żyje mąż i (3) – nie żyje żona oraz czwarty, gdy obydwoje małżonkowie nie żyją (4). Model ten wraz z możliwymi przejściami między stanami i intensywnością przejść μ_{ij} ze stanu i do stanu j (i, j = 1,2,3,4) przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Przestrzeń stanów w wielostanowym modelu Markowa

Źródło: Opracowanie własne na podstawie: Dębicka, Marciniuk [2014].

Oznaczmy przez $p_{ij}(s,t)$, $i, j = 1,2,3,4$, prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i, gdy proces jest w tym stanie w momencie s, do stanu j w momencie t $(s \le t)$. Intensywność przejść $\mu_{ij}(s)$ ze stanu i do stanu j w momencie $s \ge 0$ jest określona wzorem:

$$\mu_{ij}(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{p_{ij}(s, s + \Delta s)}{\Delta s}.$$

W przypadku tego modelu intensywności umieralności nie zależą od czasu pobytu w poszczególnych stanach.

Prawdopodobieństwo, określone wzorem (2), oznacza, że oboje małżonkowie przeżyli co najmniej t podokresów roku. Prawdopodobieństwo to jest równe prawdopodobieństwu pozostania nadal w stanie 1 w chwili t, czyli:

$$_t p_u = P\left(K_u^{(m)} \ge t\right) = P\left(K_{x_1}^{(m)} \ge t, K_{x_2}^{(m)} \ge t\right) = p_{11}(0,t). \tag{9}$$

W ogólnym przypadku prawdopodobieństwo pozostania w stanie 1 można przedstawić w następujący sposób [por. Denuit i in., 2001]:

$$p_{11}(0,t) = \exp\left(-\int_0^t (\mu_{12}(\tau) + \mu_{13}(\tau)) d\tau \right) \qquad t \ge 0. \tag{10}$$

Problem wyznaczenia szukanego prawdopodobieństwa $p_{11}(0,t)$ sprowadza się do określenia intensywności przejść ze stanu 1 do 2 i z 1 do 3. Autorzy pracy [por. Denuit i in., 2001] przyjęli, że dla ustalonego wieku małżonków x_1 i x_2 intensywności przejścia są proporcjonalne do odpowiednich intensywności umieralności małżonków μ_{x_1+t} i μ_{x_2+t} w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mu_{12}(t) &= (1 + \alpha_{12})\mu_{x_1+t}, \\ \mu_{13}(t) &= (1 + \alpha_{13})\mu_{x_2+t}. \end{aligned} \tag{11}$$

Przyjmując to założenie (11), wzór (10) można zapisać następująco:

$$p_{11}\left(0, \frac{t}{m}\right) = P\left(\frac{K_u^{(m)}}{m} \ge \frac{t}{m}\right) = \exp\left(-\int_0^{t/m} (\mu_{12}(\tau) + \mu_{13}(\tau)) d\tau \right) = \left({}_{t/m} p_{x_1}\right)^{1+\alpha_{12}} \cdot \left({}_{t/m} p_{x_2}\right)^{1+\alpha_{13}}, \tag{12}$$

gdzie:

$$_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds \right).$$

Prawdopodobieństwa brzegowe ${}_{t/m}p_{x_1}$ i ${}_{t/m}p_{x_2}$ oblicza się ze wzoru (4), korzystając z tablic trwania życia, przy czym prawdopodobieństwo ${}_t p_x$ oblicza się za pomocą wzoru:

$$ {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}, $$

gdzie l_x oznacza liczbę osób żyjących w wieku x.

Z kolei na podstawie danych dotyczących liczby zmarłych oraz żyjących *k*-letnich mężów i żon w danym roku i w roku kolejnym, można oszacować współczynniki α_{12} i α_{13}. W tym celu korzysta się z estymatora Nelsona-Aalena opartego na funkcji [por. Denuit i in., 2001]:

$$ \Omega_{ij} = \int_0^t \mu_{ij}(\tau)d\tau, \ t \geq 0. $$

Estymator ten minimalizuje sumę kwadratów różnic między przyrostem funkcji $\Delta\Omega_{ij}$ a jej estymatorem $\Delta\hat{\Omega}_{ij}$. Stąd estymatory $\hat{\alpha}_{1j}$ $(j = 2,3)$ przyjmują następującą postać [por. Heilpern, 2011]:

$$ \hat{\alpha}_{12} = \arg\min \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta\hat{\Omega}_{12} - \int_0^1 \mu_{12}(k+\tau)d\tau \right)^2 = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta\hat{\Omega}_{12} \ln p_{x_1+k}}{\sum_{k=1}^{n} \left(\ln p_{x_1+k}\right)^2}, $$

$$ \hat{\alpha}_{13} = \arg\min \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta\hat{\Omega}_{13} - \int_0^1 \mu_{13}(k+\tau)d\tau \right)^2 = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta\hat{\Omega}_{13} \ln p_{x_1+k}}{\sum_{k=1}^{n} \left(\ln p_{x_1+k}\right)^2}. $$

Estymator $\Delta\hat{\Omega}_{ij}$ oblicza się korzystając z następującej formuły [por. Denuit i in., 2001]:

$$ \Delta\hat{\Omega}_{ij} = \frac{L_{i:j}(k)}{L_i(k+1) - L_i(k)} \left(\ln L_i(k+1) - \ln L_i(k) \right), $$

gdzie $L_{i:j}(k)$ oznacza liczbę k-letnich mężów/żon zmarłych w danym roku, $L_i(k)$ liczbę *k*-letnich mężów/żon w danym roku oraz $L_i(k+1)$ liczbę *k* + 1-letnich mężów/żon w kolejnym roku.

Na podstawie danych udostępnionych przez GUS dotyczących liczby zmarłych mężów/żon w 2011 i 2012 roku oraz liczby mężów/żon z 2011 roku dla Dolnego Śląska, oszacowano współczynniki α_{12} i α_{13} [por. Heilpern, 2014]. Wyniki są następujące:

$$\alpha_{12} = -0{,}0612 \qquad \text{oraz } \alpha_{13} = -0{,}0992.$$

W związku z powyższym wzór (12) przyjmuje następującą postać:

$$p_{11}\left(0, \frac{t}{m}\right) = {}_{t/m}p_u = P\left(K_u^{(m)} \geq t\right) = \left({}_{t/m}\, p_{x_1}\right)^{0,9388} \cdot \left({}_{t/m}\, p_{x_2}\right)^{0,9008}. \qquad (13)$$

Powyższy wzór przyjęto do obliczeń numerycznych przedstawionych w kolejnym punkcie artykułu.

3. Przykłady numeryczne

Przykłady numeryczne, zaprezentowane w tym punkcie, wykonano za pomocą własnych interfejsów napisanych w programie MATLAB. Do obliczeń przyjęto W = 100 000 zł oraz α = 50% (dla innej, rzeczywistej wartości W_1 wystarczy przemnożyć otrzymane wyniki przez $W_1 \cdot W^{-1}$). Prawdopodobieństwa ${}_t p_{x_1}$ oraz ${}_t p_{x_2}$ zostały wyznaczone na podstawie Tablic Trwania Życia z 2013 r. dla ludności Dolnego Śląska, udostępnionych przez GUS. Do obliczeń zastosowano model Svenssona natychmiastowej stopy procentowej określony za pomocą funkcji $R_{0,t}$, zależnej od czasu t [por. Marciniuk, 2009]. Parametry tej funkcji estymowano za pomocą metody najmniejszych kwadratów z użyciem pakietu Solver w programie Microsoft Excel. Estymacji parametrów dokonano na podstawie danych rzeczywistych z rynku polskiego dotyczących 2-, 5- i 10-letnich obligacji o stałym oprocentowaniu i 20-tygodniowych bonów skarbowych z dnia 3.03.2013 roku [www 1; www 2]. Funkcja $R_{0,t}$ przyjmuje następującą postać [por. Dębicka, Marciniuk, 2014]:

$$R_{0,t} = \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau_1}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + \beta_2\left(\frac{\tau_1}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) + \beta_3\left(\frac{\tau_2}{t}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right),$$

gdzie:

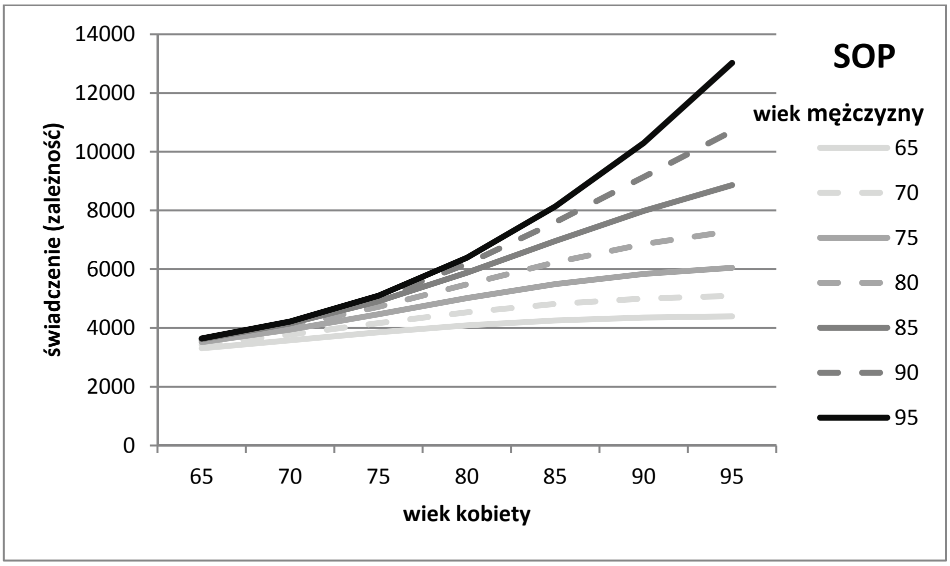
$\beta_0 = 0{,}0379, \quad \beta_1 = -0{,}0016, \quad \beta_2 = -0{,}0174, \quad \beta_3 = 0{,}006, \quad \tau_1 = 1{,}2242, \quad \tau_2 = 2{,}5556.$

Czynnik dyskontowania $v_{0,t}$, występujący we wzorach (5) i (6), oblicza się ze wzoru [por. Jakubowski i in., 2003]:

$$v_{0,t} = \exp\left(-R_{0,t} \cdot t\right).$$

Pierwszy z przykładów dotyczy wyznaczenia świadczenia dla rent małżeńskich w przypadku SOP. Na rysunku 2 przedstawiono wysokość rocznego świadczenia, wypłacanego z góry raz w roku (m = 1), dla mężczyzny w zależności od wieku kobiety, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi.

Wraz ze wzrostem wieku małżonków wzrasta wysokość świadczenia. Większy wpływ na wysokość świadczenia w tym rodzaju renty ma wiek kobiety. Dla przykładu gdy mężczyzna jest w wieku x_1 = 95, a kobieta w wieku x_2 = 65, to wysokość rocznego świadczenia wynosi 3618 zł (przy wartości nieruchomości 100 000 zł). W odwrotnej sytuacji (x_1 = 65, x_2 = 95) wysokość rocznego świadczenia jest wyższa i wynosi 4339 zł. Dla ustalonego wieku mężczyzny występuje szerszy przedział zmienności świadczenia przy zmiennym wieku kobiety, odwrotnie niż dla ustalonego wieku kobiet przy zmiennym wieku mężczyzny.

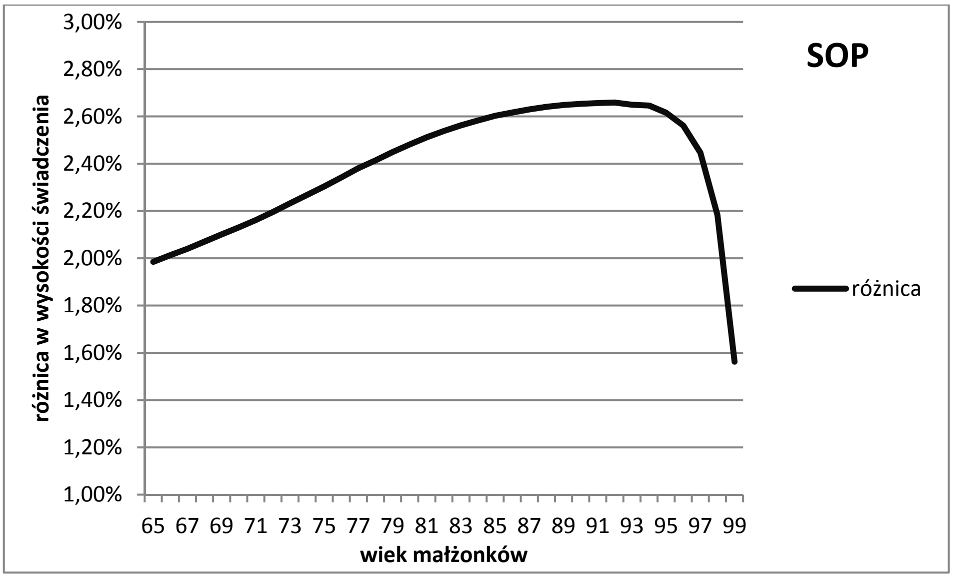


Rys. 2. Wysokość rocznego świadczenia SOP, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi

Źródło: Opracowanie własne.

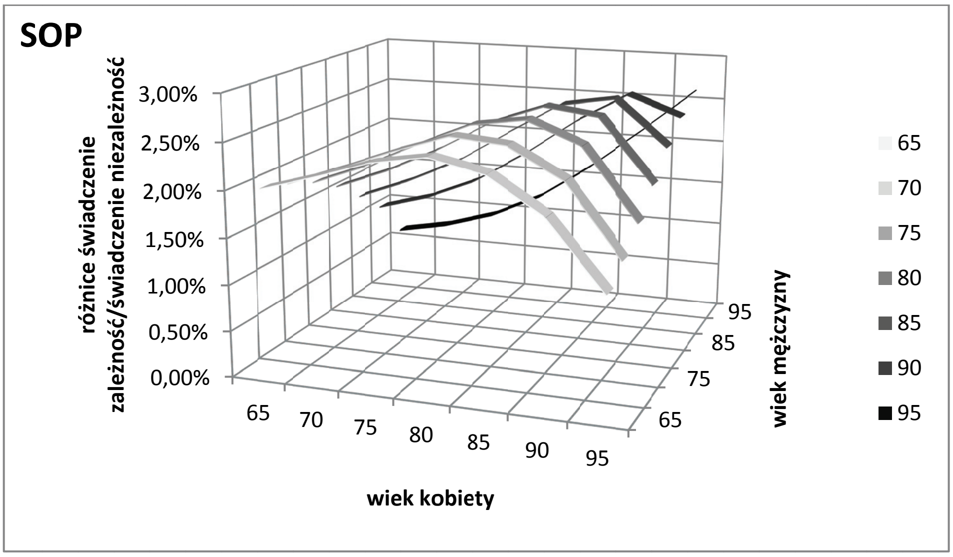
Na rysunku 3 przedstawiono różnicę między wysokością rocznego świadczenia SOP wypłacanego z góry raz w roku, obliczonego przy założeniu, że dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi, a wysokością rocznego świadczenia, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są niezależne, a małżonkowie są w tym samym wieku ($x_1 = x_2$). Rysunek 4 przedstawia różnicę między wysokością świadczeń dla osób w różnym wieku.

Świadczenie renty małżeńskiej w przypadku SOP jest wyższe, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi. W przypadku gdy małżonkowie są w tym samym wieku, różnica między dwoma świadczeniami, wyrażona w procentach, jest funkcją wklęsłą. Różnice między rocznymi świadczeniami są rzędu 2-2,5%. Od wieku 65 do wieku 92 lat różnice te rosną od 1,98% do 2,66%, a następnie ponownie maleją do wartości 1,56%.



Rys. 3. Różnica między wysokością rocznego świadczenia SOP, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi, a wysokością świadczenia, gdy dalsze czasy trwania życia są niezależne dla jednolatków

Źródło: Opracowanie własne.

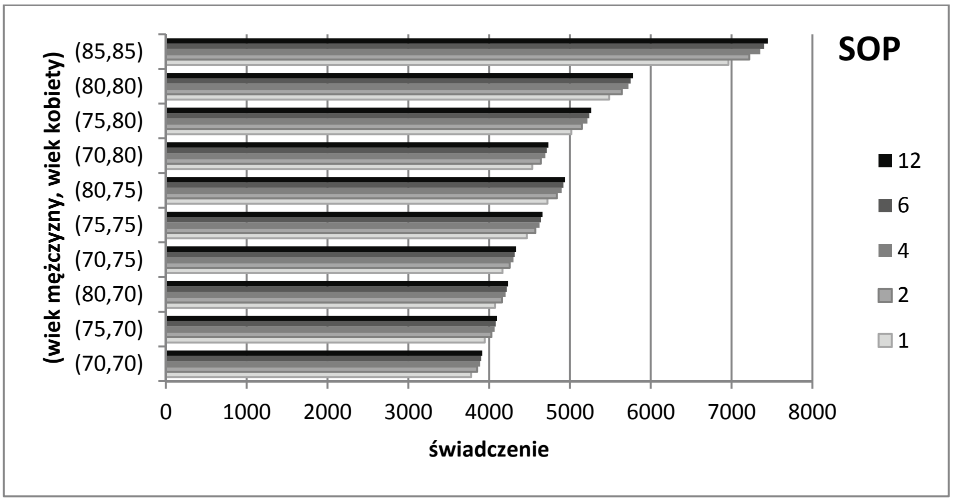


Rys. 4. Różnica między wysokością rocznego świadczenia SOP, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi, a wysokością świadczenia, gdy dalsze czasy trwania życia są niezależne dla małżonków w różnym wieku

Źródło: Opracowanie własne.

Nieco inaczej kształtują się funkcje różnic między wysokością świadczenia, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależne, a wysokością świadczenia, gdy dalsze czasy trwania życia są niezależne, a małżonkowie są w różnym wieku. Do wieku 90 lat funkcje różnic są wklęsłe i osiągają maksima w innym punkcie. Gdy jedno z małżonków jest w wieku 95 lat, to funkcja różnic jest rosnąca. Gdy kobieta jest w wieku 65 lat, to różnice maleją od 2% do 0,66%, a dla wieku kobiety 95 lat jest odwrotnie, tzn. różnice w wysokości świadczeń rosną od 1,26 % do 2,62%. Maksimum funkcji różnic w zależności od wieku kobiety pojawia się dopiero dla $x_2 = 80$. Gdy mężczyzna jest w wieku 65 lat, różnice rosną od 2% do 2,47%, a następnie maleją do 1,26%; dla wieku mężczyzny 95 lat różnice rosną od 0,66% do 2,62%. Największe różnice w wysokościach świadczeń są dla $x_1 = 85$ i $x_2 = 90$ i wynoszą 2,71%.

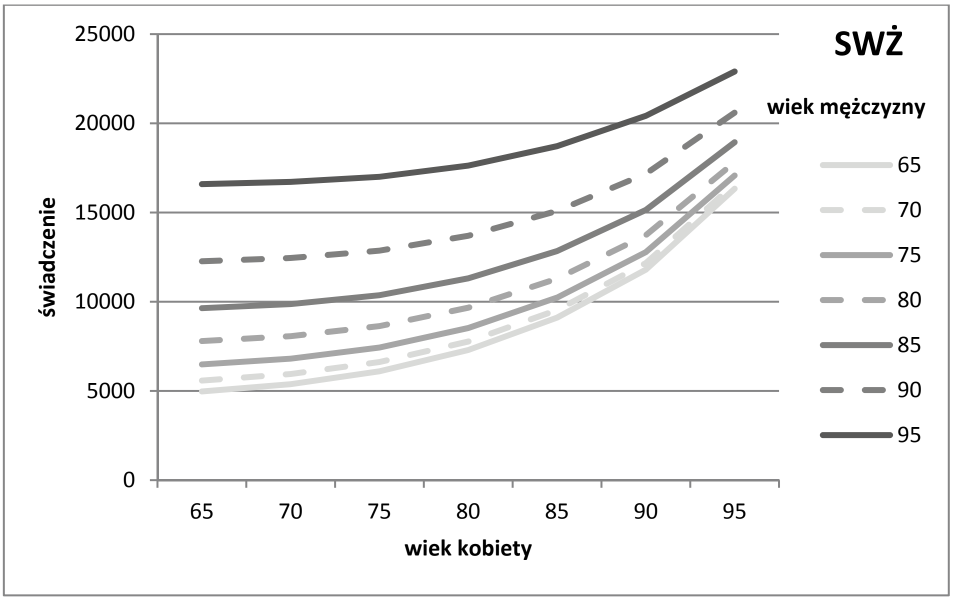
Na rysunku 5 przedstawiono wysokości rocznego świadczenia w zależności od częstości wypłat w ciągu roku (m = 1,2,4,6,12), gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi. Zarówno wraz ze wzrostem wieku małżonków, jak i wraz ze wzrostem częstotliwości jego wypłat rośnie wysokość świadczenia. Różnice między wysokością świadczeń wypłacanych częściej niż raz w roku rosną wraz ze wzrostem wieku małżonków. Różnice między świadczeniem wypłacanym dwa razy w roku ($m = 2$) a raz w roku ($m = 1$) w zależności od wieku małżonków są rzędu od 1,95% dla $x_1 = 70$ i $x_2 = 70$ do 3,7% dla $x_1 = 85$ i $x_2 = 85$. Różnice między świadczeniem wypłacanym miesięcznie ($m = 12$) a rocznie ($m = 1$) są większe i wynoszą od 3,64% dla $x_1 = 70$ i $x_2 = 70$ do 7,02% dla $x_1 = 85$ i $x_2 = 85$. Między świadczeniem wypłacanym miesięcznie ($m = 12$) a półrocznie ($m = 6$) lub kwartalnie ($m = 4$) nie występują już tak znaczące różnice. Różnice te są rzędu 0,3-0,6% w pierwszym przypadku i 0,7-1,3% w drugim przypadku.



Rys. 5. Wysokość rocznego świadczenia SOP w zależności od częstości wypłat w ciągu roku ($m = 1,2,4,6,12$), gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi

Źródło: Opracowanie własne.

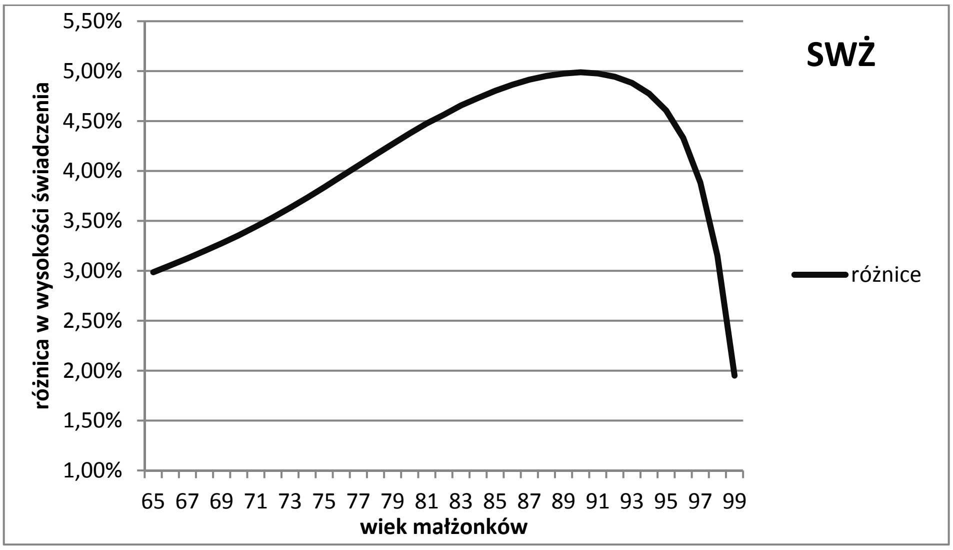
Drugi z przykładów dotyczy wyznaczenia świadczenia dla rent małżeńskich w przypadku SWŻ. Rysunek 6 przedstawia wysokość świadczenia wypłacanego z góry raz w roku ($m = 1$) dla mężczyzny w zależności od wieku kobiety, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi. Świadczenie rośnie wraz ze wzrostem wieku małżonków. Struktura tego świadczenia jest inna niż w przypadku SOP. Po pierwsze świadczenie SWŻ jest wyższe niż świadczenie SOP. Na przykład dla małżonków w wieku 95 lat świadczenie SWŻ wynosi 22 906 zł, a świadczenie SOP 13 024 zł. Po drugie dla młodszych kobiet to wiek mężczyzny ma większy wpływ niż wiek kobiet na wysokość świadczenia renty SWŻ w przeciwieństwie do przypadku SOP, kiedy to wiek kobiety ma większy wpływ na wysokość świadczenia. Dla $x_1 = 80$ i $x_2 = 65$ roczne świadczenie SWŻ jest równe 7788 zł, a dla $x_1 = 65$ i $x_2 = 80$ wynosi ono 7298 zł. Dla starszych kobiet nieco większy wpływ na wysokość świadczenia ma wiek kobiety, ale różnice te nie są znaczące. Na przykład roczne świadczenie dla $x_1 = 85$ i $x_2 = 90$ jest równe 15 148 zł, a dla $x_1 = 90$ i $x_2 = 85$ wynosi ono 15 088 zł.



Rys. 6. Wysokość rocznego świadczenia SWŻ, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi

Źródło: Opracowanie własne.

W przypadku SWŻ świadczenie obliczone przy założeniu, że dalsze czasy trwania życia są zależnymi zmiennymi losowymi, jest niższe niż w przypadku, gdy dalsze trwanie życia jest niezależne (odwrotnie niż dla SOP). Różnice w wysokości świadczeń są rzędu 2-5%. Dla małżonków w tym samy wieku ($x_1 = x_2$) różnice te zostały przedstawione na rys. 7, a dla małżonków w różnym wieku w tabeli 1.



Rys. 7. Różnica między wysokością rocznego świadczenia SWŻ, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są niezależnymi zmiennymi losowymi, a wysokością świadczenia, gdy dalsze czasy trwania życia są zależne dla jednolatków

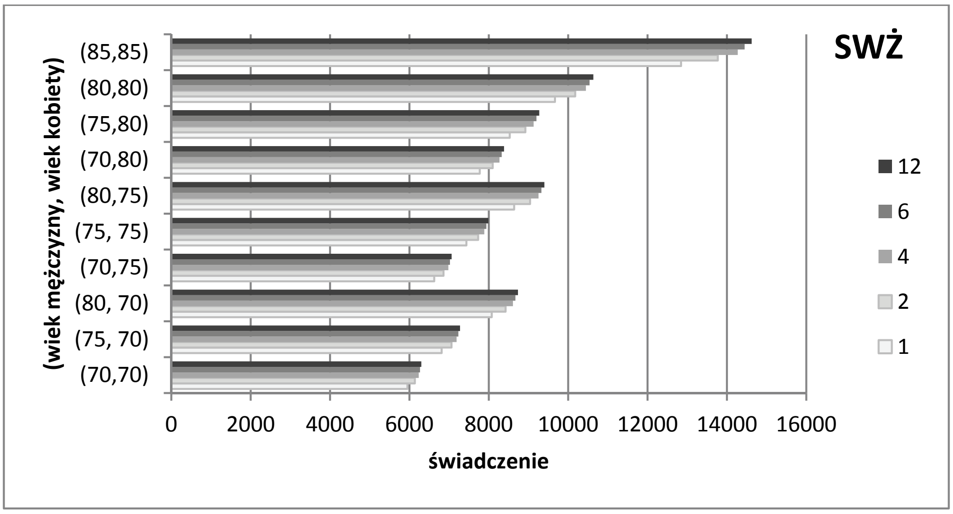
Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 1. Różnica między wysokością rocznego świadczenia SWŻ, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są niezależnymi zmiennymi losowymi, a wysokością świadczenia, gdy dalsze czasy trwania życia są zależne dla małżonków w różnym wieku

		x_2						
		65	70	75	80	85	90	95
x_1	65	3,07%	3,39%	3,90%	4,59%	5,28%	5,63%	4,87%
	70	3,22%	3,47%	3,93%	4,58%	5,24%	5,61%	4,89%
	75	3,42%	3,62%	3,99%	4,57%	5,20%	5,59%	4,91%
	80	3,65%	3,79%	4,09%	4,58%	5,14%	5,53%	4,95%
	85	3,83%	3,93%	4,15%	4,54%	5,04%	5,42%	4,96%
	90	3,81%	3,89%	4,07%	4,39%	4,81%	5,25%	4,94%
	95	3,14%	3,19%	3,32%	3,56%	3,94%	4,40%	4,83%

Źródło: Opracowanie własne.

Na rysunku 8 przedstawiono wysokości rocznego świadczenia SWŻ w zależności od częstości wypłat w ciągu roku (m = 1,2,4,6,12), gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi.



Rys. 8. Wysokość rocznego świadczenia SWŻ w zależności od częstości wypłat w ciągu roku (m = 1,2,4,6,12), gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi

Źródło: Opracowanie własne.

Zarówno wraz ze wzrostem wieku małżonków, jak i wraz ze wzrostem częstotliwości jego wypłat rośnie wysokość świadczenia. Różnice między wysokością świadczeń wypłacanych częściej niż raz w roku rosną wraz ze wzrostem wieku małżonków. Większy wpływ na wysokość różnic ma wiek mężczyzny. Przy ustalonym wieku kobiet różnice w wysokości świadczenia są wyższe niż przy ustalonym wieku mężczyzn. Różnice między świadczeniem wypłacanym dwa razy w roku (m = 2) a raz w roku (m = 1) w zależności od wieku małżonków są rzędu od 3,14% dla $x_1 = 70$ i $x_2 = 70$ do 7,02% dla $x_1 = 85$ i $x_2 = 85$. Różnice między świadczeniem wypłacanym miesięcznie (m = 12) a rocznie (m = 1) są większe i wynoszą od 5,89% dla $x_1 = 70$ i $x_2 = 70$ do 13,84% dla $x_1 = 85$ i $x_2 = 85$. Różnice te są większe niż w przypadku świadczenia SOP. Między świadczeniem wypłacanym miesięcznie (m = 12) a półrocznie (m = 6) lub kwartalnie (m = 4) różnice są mniejsze, ale rosną one wraz z wiekiem małżonków. Różnice w wysokości świadczenia $R^{(m)}$ w zależności od częstotliwości m wypłat w roku przedstawia tabela 2.

Tabela 2. Różnice w wysokości świadczenia SWŻ w zależności od częstotliwości *m* wypłat w roku, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi

(x_1, x_2)	$\frac{R^{(m=2)}}{R^{(m=1)}} - 1$	$\frac{R^{(m=4)}}{R^{(m=1)}} - 1$	$\frac{R^{(m=6)}}{R^{(m=1)}} - 1$	$\frac{R^{(m=12)}}{R^{(m=1)}} - 1$	$\frac{R^{(m=12)}}{R^{(m=4)}} - 1$	$\frac{R^{(m=12)}}{R^{(m=6)}} - 1$
(70,70)	3,14%	4,77%	5,32%	5,88%	1,05%	0,53%
(75,70)	3,62%	5,51%	6,15%	6,80%	1,22%	0,61%
(80,70)	4,33%	6,61%	7,39%	8,18%	1,47%	0,74%
(70,75)	3,53%	5,36%	5,98%	6,61%	1,18%	0,59%
(75,75)	3,98%	6,06%	6,77%	7,48%	1,34%	0,67%
(80,75)	4,66%	7,12%	7,96%	8,82%	1,58%	0,79%
(70,80)	4,18%	6,37%	7,12%	7,87%	1,41%	0,70%
(75,80)	4,61%	7,04%	7,87%	8,71%	1,55%	0,77%
(80,80)	5,27%	8,07%	9,03%	10,00%	1,79%	0,89%
(85,85)	7,20%	11,11%	12,47%	13,84%	2,46%	1,23%

Źródło: Opracowanie własne.

Podsumowanie

Z przedstawionych w poprzednim punkcie przykładów dla ludności Dolnego Śląska wynika, że wysokość świadczenia renty małżeńskiej zależy od rodzaju renty (SOP, SWŻ), częstotliwości jej wypłacania, wieku małżonków, jak również od przyjętego założenia o zależności lub niezależności dalszego trwania życia małżonków.

W przypadku SOP na wysokość świadczenia większy wpływ ma wiek kobiety. Wraz ze wzrostem częstotliwości wypłat świadczenia jego wysokość rośnie. Różnice między wysokością świadczeń wypłacanych częściej niż raz w roku rosną wraz ze wzrostem wieku małżonków. Między sumą rocznych świadczeń wypłacanych co miesiąc a wypłacanych półrocznie lub kwartalnie nie ma już tak znaczących różnic, jak między roczną sumą świadczeń wypłacanych miesięcznie a wypłacanych jedynie raz w roku.

W przypadku SWŻ większy wpływ na wysokość świadczenia ma wiek mężczyzny. W tym przypadku również wraz ze wzrostem częstotliwości wypłat świadczenia rośnie jego wysokość. Różnice te są jednak wyższe i również rosną wraz ze wzrostem wieku małżonków. Większy wpływ na wysokość różnic ma wiek mężczyzny. Ponadto renta w przypadku SWŻ jest wyższa, gdyż może być ona pobierana krócej niż renta w przypadku SOP.

Na wysokość świadczenia wpływa założenie o długości dalszego życia małżonków. W przypadku SOP świadczenie jest nieco wyższe w sytuacji, gdy dalsze czasy trwania życia małżonków są zależnymi zmiennymi losowymi, odwrotnie niż w przypadku SWŻ. Ponadto różnice w wysokości świadczeń w przypadku SOP są mniejsze niż w przypadku SWŻ. Firmy oferujące tego rodzaju produkty powinny w obliczeniach świadczeń uwzględniać zależność występującą między dalszym trwaniem życia małżonków.

Renty hipoteczne są produktem dość nowym na rynku polskim. Małżeńskie renty hipoteczne obecnie nie są sprzedawane w Polsce. Są to produkty, dzięki którym starsi ludzie mogliby uzyskać dodatkowy dochód do swoich niskich emerytur, by móc godnie przeżyć starość, przeznaczyć świadczenie na wspólne spędzanie czasu i robienie rzeczy, na które nie mieli czasu za młodu, na podreperowanie zdrowia itp. Wybór rodzaju renty zależy od samych małżonków i odpowiedzi na pytanie, co dla nich jest bardziej korzystne i potrzebne w danym momencie. Renta SWŻ jest wyższa, co daje małżonkom możliwość np. wspólnych wyjazdów zagranicznych. Należy jednak pamiętać, że po śmierci jednego z małżonków świadczenie przestaje być wypłacane. Renta SOP jest zdecydowanie niższa niż SWŻ, jest jednak wypłacana pomimo śmierci jednego z małżonków.

Ważną kwestią pozostaje nadal dopracowanie i uregulowanie szczegółów zawieranych umów, żeby osoby starsze nie mogły zostać oszukane przez nieuczciwe firmy, a w razie bankructwa firm odkupujących (w zamian za rentę) nieruchomości nie było sytuacji, że starsi, a często i schorowani ludzie, nie będą mieli gdzie mieszkać.

Literatura

Borys A. (2013), *Odwrócona hipoteka i renta dożywotnia, warto czy nie?* http://www.polskieradio.pl/42/273/Artykul/958255,Odwrocona-hipoteka-i-renta-dozywotnia-warto-czy-nie.html (dostęp: 28.10.2013).

Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbit C.J. (1986), *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois.

Denuit M., Dhaene J., Le Bailly De Tilleghem C., Teghem S. (2001), *Measuring Impact of a Dependence among Insured Lifelenghts*, "Belgian Actuarial Bulletin", Vol. 1 (1), s. 18-39.

Dębicka J., Marciniuk A. (2014), *Comparison of Reverse Annuity Contract and Reverse Mortgage on the Polish Market*, (DOI: 10.15611/amse.2014.17.06).

Heilpern S. (2011), *Wyznaczanie wielkości renty w zależnych grupowych ubezpieczeniach na życie*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 230, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław, s. 30-48.

Heilpern S. (2014), *Grupowe ubezpieczenia na życie – badanie struktury zależności*, konferencja OKA 2014, http://aktuarialna.konferencjasgh.pl/prezentacje2014/Stanislaw_Heilpern.pdf (dostęp: 29.10.2014).

Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. (2003), *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa.

Marciniuk A. (2004), *Składki ubezpieczeń na życie ze świadczeniem płatnym na koniec podokresu roku śmierci ubezpieczonego* [w:] W. Ostasiewicz (red.), *Zastosowania statystyki i matematyki w ekonomii*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław, s. 141-159.

Marciniuk A. (2009), *Nielosowe modele natychmiastowej stopy procentowej i ich zastosowanie w klasycznych ubezpieczeniach życiowych*, Ekonometria 27, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 84, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław, s. 112-127.

Marciniuk A. (2014), *Renta hipoteczna a odwrócony kredyt hipoteczny na rynku polskim*, „Śląski Przegląd Statystyczny", nr 12 (18), Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego, Wrocław, s. 253-272.

[www 1] www.money.pl/pieniadze/bony/przetargi/.

[www 2] http://bossa.pl/notowania/stopy/rentownosc_obligacji/.

MARRIAGE REVERSE ANNUITY CONTRACT TAKING INTO ACCOUNT THE DEPENDENCE BETWEEN THE FUTURE LIFETIME OF SPOUSES

Summary: People live longer, and a significant decrease in mortality compared to 60-70 years of the 20th century, is observed in people at retirement age. The social insurance pensions are low and may be insufficient to survive with dignity. In this context, an important issue is the possibility of obtaining additional financial resources. One of those is the so-called a reverse annuity contract. In return for the transfer of the ownership onto the company, an owner is guaranteed by a notarial act the right to live in property until his death and whole life annuity. Since in many cases the property owners are couples, therefore an important issue is enabling the marriage reverse annuity contract. This product is not offered on the Polish market. The aim of the article is to calculate the benefit in two cases, when both spouses are alive (the status of the common life), and then when one of them dies (the status of the last surviving). The calculations are made under the more realistic assumption of the dependence of future lifetime of spouses. The value of benefits is compared in both cases i.e. independence and dependence of future lifetime of spouses. Moreover the frequency of payment is taken into consideration. The surviving probability is calculated on the basis of data follows from Main Statistical Office. For this purpose it is used the Markov process. The Svensson interest rate model is applied to calculate the benefits of reverse annuity contract.

Keywords: reverse annuity contract, life annuity, status of the common life, status of the last surviving, dependence of future lifetime of spouses.