

Olena Sobotka

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

WIELOKRYTERIALNE PORZĄDKOWANIE METODĄ PROMETHEE ODPORNE NA ZMIANY WAG KRYTERIÓW

Wprowadzenie

Wrażliwość wyników analizy wielokryterialnej na zmiany wag kryteriów, przy tym, że ważność kryteriów w wielu problemach można wyrazić najwyżej w skali porządkowej, jest problemem w wielokryterialnym wspomaganie podejmowania decyzji. Problem ten można rozpatrywać przynajmniej w trzech różnych aspektach, korzystając z następujących narzędzi analizy:

1) analizy wrażliwości – określenie dopuszczalnych przedziałów zmian wag, przy których wynik analizy wielokryterialnej pozostaje niezmienny,

2) analizy odporności wyników na zmiany wag kryteriów – poszukiwanie i analiza wyników, które sprawdzają się przy wszystkich dopuszczalnych zmianach wag,

3) analizy strat – wyznaczenie i porównanie strat różnych możliwych wyników w stosunku do wyniku najlepszego przy tych samych wartościach wag¹.

Celem pracy jest wyznaczenie odpornego na zmiany wag wielokryterialnego uporządkowania wariantów, będącego wynikiem analizy problemu metodą PROMETHEE². Takie odporne uporządkowanie jest częściowym uporządkowaniem na podstawie odpornych relacji dominacji.

Opisana w pracy metoda wyznaczenia odpornych relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania metod PROMETHEE I i PROMETHEE II jest oparta na teorii Liniowej Częstkowej Informacji (Linear Partial Information)

¹ A. Jessop: Sensitivity and Robustness in Selection Problems. „Computers & Operations Research” 2004, Vol. 31, s. 607.

² J.P. Brans, Ph. Vincke: A Reference Ranking Organization Method (The PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision-Making. „Management Science” 1985, Vol. 31, s. 647-656.

E. Koflera³ w procesie analizy wielokryterialnej na podstawie addytywnej funkcji użyteczności w warunkach niepełnej informacji o wagach kryteriów⁴.

1. Wielokryterialna analiza odporna na zmiany wag kryteriów

Przedmiotem pracy jest problem uporządkowania skończonego i przeliczalnego zbioru wariantów decyzyjnych według preferencji decydenta opisanych z pomocą kilku kryteriów. Oznaczmy przez $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ – zbiór wariantów decyzyjnych, a przez \succcurlyeq (nie gorszy) – relację porządkującą zbiór A według preferencji opisanych za pomocą K kryteriów $F = \{f_1, f_2, \dots, f_K\}$. Relacja \succcurlyeq jest przechodnia i na jej podstawie można zdefiniować dwie następujące relacje: \succ (lepszy): $a_i \succ a_j \Leftrightarrow a_i \succcurlyeq a_j$ i $a_j \not\succeq a_i$; \approx (równoważny): $a_i \approx a_j \Leftrightarrow a_i \succcurlyeq a_j$ i $a_j \succcurlyeq a_i$.

Parametrem występującym w większości sposobach modelowania wielokryterialnych preferencji jest wektor wag kryteriów. Analiza wrażliwości wyników analizy wielokryterialnej na zmiany wag kryteriów wykazała, że wyniki otrzymywane różnymi metodami są w dużym stopniu zależne od wag kryteriów. Natomiast dokładne określenie wartości wag jest dość trudnym zagadnieniem. Bardziej przyjazne i zrozumiałe jest opisanie wzajemnej ważności kryteriów w postaci np. zbioru liniowych nierówności, który określa dostępne częściowe informacje o wartościach wag kryteriów. Oznaczmy przez $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_K\}$ – wektor wag kryteriów, określony przez zbiór dopuszczalnych wartości

$$W = \{\mathbf{w} \in \mathbf{R}^K: \sum_{k=1}^K w_k = 1; w_k \geq 0 \forall k; g_t(\mathbf{w}) \geq 0, t = 1, \dots, T\} \quad (1)$$

gdzie $g_t(\mathbf{w}) \geq 0$ – liniowe warunki opisujące dostępne informacje o wagach kryteriów.

W przypadku tak określonych wag kryteriów, wynikiem analizy wielokryterialnej jest wyznaczenie takich relacji porządkujących zbiór wariantów, które zachodzą dla wszystkich dopuszczalnych kombinacji wartości wag kryteriów. Oznaczmy taką relację przez $a_i \succcurlyeq_W a_j$ (odporna relacja dominacji),

³ E. Kofler, Z.W. Kmietowicz, A.D. Pearman: Decision Making with Linear Partial Information (L.P.I.). „Journal of Operational Research Society” 1984, Vol. 35, s. 1079.

⁴ K.S. Park, S.H. Kim: Tools for Interactive Multiattribute Decision Making with Incompletely Identified Information. „European Journal of Operational Research” 1997, Vol. 98, s. 111.

co oznacza, że a_i jest niezdominowanym przez a_j według wielokryterialnych preferencji określonych przez każdy z dopuszczalnych wektorów wag kryteriów ($\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$)

$$a_i \succcurlyeq_W a_j \Leftrightarrow \exists \mathbf{w} \in \mathbf{W}: a_i \succcurlyeq a_j \quad \text{i} \quad \nexists \mathbf{w} \in \mathbf{W}: a_j \succ a_i \quad (2)$$

W przypadku spójnej relacji \succcurlyeq porządkującej zbiór wariantów decyzyjnych $a_i \succcurlyeq_W a_j$ oznacza, że $a_i \succcurlyeq a_j \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Natomiast jeśli relacja \succcurlyeq jest niespójna i wprowadza częściowy porządek na zbiorze wariantów decyzyjnych, $a_i \succcurlyeq_W a_j$ oznacza, że $a_j \not\succeq a_i \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$.

2. Wyznaczenie odpornej relacji dominacji dla addytywnej funkcji preferencji wielokryterialnej

Niech $\mathbf{y}(a) = \{y_1(a), y_2(a), \dots, y_k(a)\}$ – wektor ocen wariantu a według poszczególnych kryteriów.

Addytywna funkcja preferencji wielokryterialnej:

$$U(\mathbf{y}(a)) = \sum_{k=1}^K w_k y_k(a):$$

Wariant a jest nie gorszy od wariantu b według wielokryterialnej relacji preferencji opisanej za pomocą addytywnej funkcji preferencji

$$a \succcurlyeq b \Leftrightarrow U(\mathbf{y}(a)) \geq U(\mathbf{y}(b)) \quad (3)$$

K.S. Park i S.H. Kim⁵ opracowali metodę wyznaczenia relacji dominacji w warunkach niepełnej informacji o parametrach (w tym wagach kryteriów) dla przypadku tak określonej relacji preferencji wielokryterialnej. Metoda powstała na podstawie relacji dominacji statystycznej przy niepełnej informacji o prawdopodobieństwach opisanej przez P. Fishburna⁶ (1965) oraz metody porównania rozkładów prawdopodobieństwa wyników decyzji w sensie takiej relacji w przypadku parametrów zadanych przez liniowe nierówności, zaproponowanej przez Koflera i innych⁷.

⁵ K.S. Park, S.H. Kim: Op. cit.

⁶ P.C. Fishburn: Analysis of Decisions with Incomplete Knowledge of Probabilities. „Operation Research” 1965, Vol. 13, s. 217.

⁷ E. Kofler, Z.W. Kmietowicz, A.D. Pearman: Op. cit.

Aby porównać warianty a i b według relacji preferencji określonej w postaci (3), należy rozwiązać odpowiednie zadania programowania liniowego

$$z(a, b) = \sum_{k=1}^K w_k [y_k(a) - y_k(b)] \xrightarrow{w \in W} \min \quad (4)$$

$$z(b, a) = \sum_{k=1}^K w_k [y_k(b) - y_k(a)] \xrightarrow{w \in W} \min \quad (5)$$

$\min_{w \in W} z(b, a) \leq 0$ oznacza, że istnieje dopuszczalny wektor wag kryteriów taki, że a jest nie gorszy od b według odpowiedniej funkcji wielokryterialnej preferencji ($\exists w \in W: a \succcurlyeq b$).

$\min_{w \in W} z(a, b) \geq 0$ oznacza, że nie istnieje dopuszczalny wektor wag kryteriów taki, że b jest lepszy od a według odpowiedniej funkcji wielokryterialnej preferencji ($\nexists w \in W: b \succ a$).

Wariant a jest niezdominowany przez b w sensie odpornej relacji dominacji

$$a \succcurlyeq_W b, \text{ jeśli } \min_{w \in W} z(a, b) \geq 0 \text{ i } \min_{w \in W} z(b, a) \leq 0$$

3. Wyznaczenie odpornej relacji dominacji w metodzie PROMETHEE

Opracowana przez J.P. Brans i Ph. Vincke metoda analizy wielokryterialnej PROMETHEE⁸ jest oparta na zasadach koncepcji ograniczonej racjonalności i relacji przewyższania.

Schemat analizy wielokryterialnej w metodzie PROMETHEE:

1. Porównanie wariantów według poszczególnych kryteriów za pomocą funkcji preferencji

$$P_k(a, b) = \begin{cases} H(x), & \text{jeżeli } f_k(a) > f_k(b) \\ 0, & \text{jeżeli } f_k(a) \leq f_k(b) \end{cases}, \text{ gdzie } \begin{cases} x = f(a) - f(b) \\ 0 \leq H(x) \leq 1 \end{cases}$$

2. Agregacja preferencji w postaci indeksu preferencji $\pi(a, b)$

$$\pi = \sum_{k=1}^K w_k P_k(a, b)$$

⁸ J.P. Brans, Ph. Vincke: Op. cit.

3. Porządkowanie wariantów na podstawie przepływów preferencji φ^+ i φ^-

$$\varphi^+(a) = \sum_{x \in A} \pi(a, x)$$

$$\varphi^-(a) = \sum_{x \in A} \pi(x, a)$$

Wartość $\varphi^+(a)$ jest oceną tego w jakim stopniu wariant a jest lepszy od pozostałych wariantów. Wartość $\varphi^-(a)$ jest oceną tego w jakim stopniu wariant a jest gorszy od pozostałych wariantów.

Metoda PROMETHEE I pozwala częściowo uporządkować zbiór wariantów decyzyjnych za pomocą relacji przewyższania. Wariant a jest nieprzewyższany przez wariant b

$$a \succ_S b, \text{ jeśli } \varphi^+(a) \geq \varphi^+(b) \wedge \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b) \quad (6)$$

Jeśli wariant a jest nieprzewyższany przez wariant b i jednocześnie wariant b jest nieprzewyższany przez wariant a , to a jest równoważny z b

$$a \succ_S b \wedge b \succ_S a \Rightarrow a \approx b$$

Relację przewyższania przedstawia się w postaci grafu preferencji, za pomocą którego tworzy się ranking wariantów decyzyjnych (częściowe uporządkowanie).

Istnieje też wariant metody PROMETHEE II, w którym wynikiem jest pełne uporządkowanie wariantów na podstawie wartości przepływów netto $\varphi(a) = \varphi^+(a) - \varphi^-(a)$

$$a \succ_{SII} b, \text{ jeśli } \varphi(a) \geq \varphi(b) \quad (7)$$

Ponieważ funkcję $\varphi^+(a)$, $\varphi^-(a)$ i $\varphi(a)$ są liniowe względem wag kryteriów, do wyznaczenia odpornych relacji dominacji \succ_W na podstawie relacji przewyższania wykorzystywanej w metodach PROMETHEE można wykorzystać zadania (4) i (5) i reguły opisane w poprzednim rozdziale.

W celu sprawdzenia czy zachodzi odporna relacja dominacji na podstawie relacji \succ_{SII} (7) należy rozwiązać liniowe zadania

$$\min_{w \in W} (\varphi(a) - \varphi(b)) \geq 0 \text{ oraz } \min_{w \in W} (\varphi(b) - \varphi(a)) \quad (8)$$

Wariant a jest niezdominowany przez b w sensie odpornej relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania metody PROMETHEE II (7): $a \succ_{WII} b$, jeśli

$$\min_{w \in W} (\varphi(a) - \varphi(b)) \geq 0 \text{ i } \min_{w \in W} (\varphi(b) - \varphi(a)) \leq 0 \quad (9)$$

W celu ustalenia czy zachodzi odporna relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania \succ_S należy znaleźć optymalne wartości funkcji celu następujących zadań liniowych

$$\begin{aligned} & (\varphi^+(a) - \varphi^+(b)) \xrightarrow{\{w \in W: \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b)\}} \min \\ & (\varphi^+(b) - \varphi^+(a)) \xrightarrow{\{w \in W: \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b)\}} \min \quad (10) \\ & (\varphi^+(a) - \varphi^+(b)) \xrightarrow{\{w \in W: \varphi^-(a) \geq \varphi^-(b)\}} \min \end{aligned}$$

Porównując optymalne wartości funkcji celu powyższych zadań można stwierdzić czy istnieje $\exists w \in W: a \succ_S b$ oraz czy $\nexists w \in W: b \succ_S a$:

$$\begin{aligned} \exists w \in W: a \succ_S b, \text{ jeśli: } & \min_{\{w \in W: \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b)\}} (\varphi^+(a) - \varphi^+(b)) \geq 0 \\ & \text{i } \min_{\{w \in W: \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b)\}} (\varphi^+(b) - \varphi^+(a)) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\nexists w \in W: b \succ_S a, \text{ jeśli: } \min_{\{w \in W: \varphi^-(a) \leq \varphi^-(b)\}} (\varphi^+(a) - \varphi^+(b)) > 0$$

Zgodnie z (2) wariant a jest niezdominowany przez b w sensie odpornej relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania metody PROMETHEE I (6)

$$a \succ_{WI} b, \text{ jeśli } w \in W: a \succ_S b \text{ i } \nexists w \in W: b \succ_S a$$

Procedura wyznaczenia odpornej relacji dominacji w metodzie PROMETHEE I.

1. Dla wszystkich $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$ wyznaczyć:
 $\min_1(i, j) = \operatorname{argmin}(\varphi^+(a_i) - \varphi^+(a_j))$

$$\begin{aligned} & w \in W, \\ & \varphi^-(a_i) \leq \varphi^-(a_j) \end{aligned}$$

2. Dla wszystkich $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$ wyznaczyć:
 $\min_2(i, j) = \operatorname{argmin}(\varphi^+(a_i) - \varphi^+(a_j))$

$$\begin{aligned} & w \in W, \\ & \varphi^-(a_i) \geq \varphi^-(a_j) \end{aligned}$$

3. Dla wszystkich $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$ sprawdzić, czy zachodzi relacja $a_i \succ_{WI} a_j$:

$$\begin{aligned} a_i \succ_{WI} a_j, \text{ jeśli } & (\min_1(i, j) \geq 0) \wedge \\ & ((\min_2(i, j) > 0 \vee \text{nie istnieje}) \wedge \min_2(j, i) \leq 0) \end{aligned} \quad (11)$$

4. Przykład numeryczny

Opisany w poprzednim rozdziale sposób wyznaczenia odpornych relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania metody PROMETHEE przedstawimy na przykładzie numerycznym.

Rozpatrujemy 6 wariantów $\{A, B, C, D, E, F\}$ ocenianych za pomocą 3 kryteriów, ważność kryteriów określona przez nierówności: $w_1 \geq w_2 \geq w_3$. Do analizy problemu zastosujemy metody PROMETHEE I i PROMETHEE II.

W pierwszym kroku warianty decyzyjne zostały porównane według poszczególnych kryteriów zgodnie z postępowaniem według metody PROMETHEE i zostały wyznaczone wartości funkcji preferencji dla poszczególnych kryteriów $P_k(a_i, a_j)$ przedstawione w tabelach:

$P_1(a_i, a_j)$	A	B	C	D	E	F
A	0	0	0	0	0	0,3
B	1	0	1	1	1	1
C	0,75	0	0	0,5	0,1	1
D	0,25	0	0	0	0	0,5
E	0,65	0	0	0,4	0	0,9
F	0	0	0	0	0	0

$P_2(a_i, a_j)$	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	1	0
B	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	1	0
D	0	1	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0
F	1	1	1	1	1	0

$P_3(a_i, a_j)$	A	B	C	D	E	F
A	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0,5
C	0	0	0	0	0	0,5
D	0,5	0	0	0	0	1
E	0,5	0,5	0,5	0	0	1
F	0	0	0	0	0	0

Następnie, zgodnie z procedurą opisaną w poprzednim rozdziale, zostały rozwiązane zadania programowania liniowego (10) i wyznaczone optymalne wartości funkcji celu jako wartości $\min_1(i, j)$ i $\min_2(i, j)$ odpowiednio. Optymalne wartości $\min_1(i, j)$ i $\min_2(i, j)$ są podane w tabelach („-” oznacza brak dopuszczalnego rozwiązania w odpowiednim ZPL).

Tabela 1

Wartości $\min_1(i, j)$

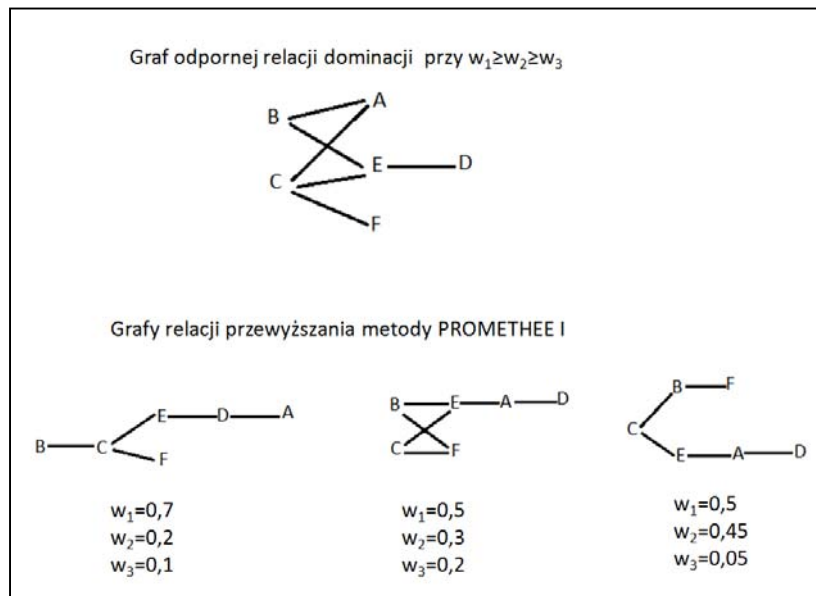
$\min_1(i, j)$	A	B	C	D	E	F
A		-1,11	-	-0,05	0,07	-0,9
B	0,75		0,99	0,75	0,64	0
C	0,86	-1,23		0,86	0,4	0,2
D	-0,18	-	-		-	-1,1
E	-0,35	-1,2	-	0,1		-1,2
F	0,87	-0,22	-	1	1,2	

$\min_2(i, j)$	A	B	C	D	E	F
A		-4,75	-2,1	-0,5	-1,7	-0,9
B	0,77		-0,2	-	0,35	0
C	-	-2,65		-	-	-
D	-0,75	-4,25	-1,8		-1,2	-1,7
E	-0,65	-3,05	-1,7	-		-1,5
F	-0,25	-5	-2,4	-0,75	-1,95	

Na podstawie wartości $\min_1(i, j)$ i $\min_2(i, j)$ zgodnie z (11) można stwierdzić, że zachodzą takie odporne relacje dominacji określone na podstawie relacji przewyższania metody PROMETHEE I: $B \succ_{W I} A, B \succ_{W I} D, B \succ_{W I} E, C \succ_{W I} A, C \succ_{W I} D, C \succ_{W I} E, C \succ_{W I} F, E \succ_{W I} D$. Na rys. 1 przedstawiono graf odpornej relacji dominacji $\succ_{W I}$ oraz relacje przewyższania dla zadanych dopuszczalnych wartości wag kryteriów.

W celu wyznaczenia odpornych relacji dominacji określonych na podstawie relacji preferencji metody PROMETHEE II zostały rozwiązane zadania programowania liniowego (8), wartości optymalne odpowiednich funkcji celu są podane w tabeli 3.

Na podstawie wartości podanych w tabeli 3 zgodnie z (9) można stwierdzić, że zachodzą takie odporne relacje dominacji określone na podstawie relacji przewyższania metody PROMETHEE II: $B \succ_{W II} A, B \succ_{W II} D, B \succ_{W II} E, C \succ_{W II} A, C \succ_{W II} D, C \succ_{W II} E, C \succ_{W II} F, E \succ_{W II} D$.

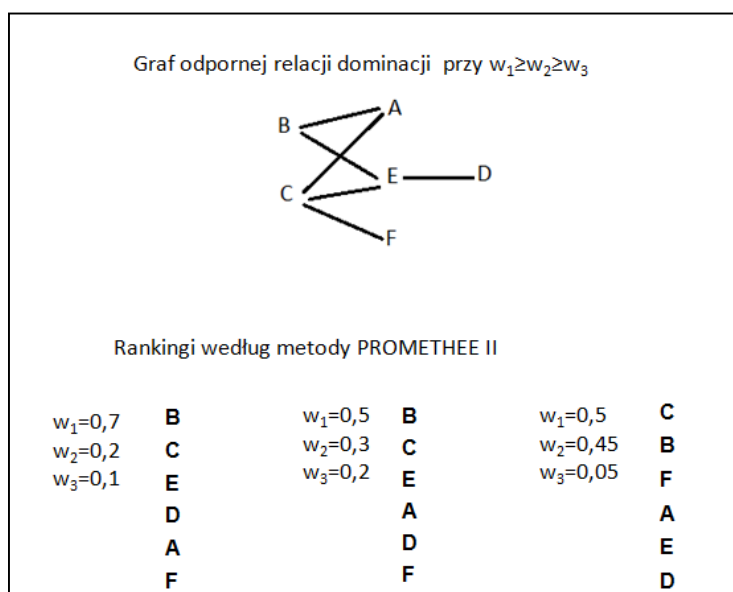


Rys. 1. Porównanie grafu odpornej relacji dominacji \succsim_{WI} przy $w_1 \geq w_2 \geq w_3$ do grafów relacji przewyższania \succsim_{SI} dla zadanych wartości wag kryteriów

Tabela 3

Wartości $\min_{w \in W} (\varphi(a_i) - \varphi(a_j))$

	A	B	C	D	E	F
A		-7,4	-3,75	-1,25	-3,3	-0,9
B	0,7		-1,18	0,88	0,2	-0,2
C	1,58	-3,65		1,67	0,5	1
D	-1,38	-6,15	-3,25		-2	-2,3
E	-0,88	-4,15	-2,75	0,5		-1,8
F	-1,25	-8,65	-5	-2,5	-4,5	



Rys. 2. Porównanie grafu odpornej relacji dominacji \succsim_{WII} przy $w_1 \geq w_2 \geq w_3$ oraz rankingów na podstawie relacji przewyższania \succsim_{SII} dla zadanych wartości wag kryteriów

Podsumowanie

W pracy zdefiniowano pojęcie odpornej relacji dominacji w celu przeprowadzenia analizy odporności wyników wielokryterialnego porządkowania metodą PROMETHEE. Zaproponowano metodę wyznaczenia odpornej relacji dominacji na podstawie relacji przewyższania metod PROMETHEE I oraz PROMETHEE II, która pozwala wyznaczyć odpowiednie relację przewyższania, które nie zmieniają się na przeciwne przy wszystkich dopuszczalnych zmianach wag kryteriów.

Literatura

- Brans J.P., Vincke Ph.: A Reference Ranking Organization Method (The PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision-Making. „Management Science” 1985, Vol. 31.
- Fishburn P.C.: Analysis of Decisions with Incomplete Knowledge of Probabilities. „Operation Research” 1965, Vol. 13.

- Jessop A.: Sensitivity and Robustness in Selection Problems. „Computers & Operations Research” 2004, Vol. 31.
- Kofler E., Kmietowicz Z.W., Pearman A.D.: Decision Making with Linear Partial Information (L.P.I.). „Journal of Operational Research Society” 1984, Vol. 35.
- Park K.S., Kim S.H.: Tools for Interactive Multiattribute Decision Making with Incompletely Identified Information. „European Journal of Operational Research” 1997, Vol. 98.

A PROMETHEE-BASED MULTICRITERIA RANKING ROBUST TO CHANGES OF CRITERIA WEIGHTS

Summary

The approach described in article is based on the Linear Partial Information (LPI) by E. Kofler. The robust multicriteria ranking is based on the robust dominance relations, which holds under all admissible combinations of criteria weights. In the article the robust dominance relation is defined and the robust ranking method based on the PROMETHEE outranking relations is proposed.