Helena Gaspars-Wieloch
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

PROPOZYCJA HYBRYDY REGUŁ HURWICZA I BAYESA W PODEJMOWANIU DECYZJI W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

Wstęp

Z podejmowaniem decyzji w warunkach niepewności (PDWN) mamy do czynienia wtedy, gdy sytuacja decyzyjna może być scharakteryzowana za pomocą listy decyzji dopuszczalnych (wariantów decyzyjnych, strategii) oraz stanów otaczającej nas rzeczywistości. Stany te w istotny sposób oddziałują na otrzymany wynik, ale w momencie podjęcia decyzji nie wiemy, który z nich wystąpi, i nie mamy na to żadnego wpływu [Pazek, Rozman 2009, s. 45-50; Trzaskalik 2008]. W odróżnieniu od podejmowania decyzji w warunkach ryzyka, PDWN cechuje się tym, iż decydent nie ma możliwości określenia prawdopodobieństwa wystąpienia danego stanu [Groenewald, Pretorius 2011; Render, Stair, Hanna 2006; Siddiqui, Chronopoulos, w druku; Sikora, red., 2008]. Knight [1921] jako pierwszy zaproponował wykorzystanie tak rozumianego ryzyka i niepewności w ekonomii, ale te dwie kategorie zostały formalnie wprowadzone do teorii ekonomii dopiero w 1944 r. przez Neumanna i Morgensterna [Neumann, Morgenstern 1944].

Tabela 1

Macierz wypłat (przypadek ogólny)

Scenariusze	Decyzje		
	D_1	D_j	D_n
S_1	a_{11}	a_{1j}	a_{1n}
S_i	a_{i1}	a_{ij}	a_{in}
S_m	a_{m1}	a_{mj}	a_{mn}

Nasze rozważania będą dotyczyć gry z naturą, czyli sytuacji, w której decydent ma do czynienia ze zjawiskiem (np. pogodą) mogącym przyjmować różne scenariusze (stany). Załóżymy, iż jesteśmy w stanie przewidzieć, jaka korzyść (strata) wynika z kolejnych decyzji przy zaistnieniu poszczególnych stanów natury. Zarówno liczba możliwych decyzji, jak i liczba stanów natury jest skończona (ang. decision making under „scenarios" uncertainty), a każdej kombinacji decyzja-scenariusz odpowiada dokładnie jedna wypłata, zatem owe korzyści można przedstawić w postaci macierzy wypłat (tabela 1, gdzie m – liczba scenariuszy S_1, …, S_i, …, S_m (m>1), n – liczba decyzji D_1, …, D_j , …., D_n (n>1), a_{ij} – wypłata związana z i-tym scenariuszem i j-tą decyzją). Zbiór potencjalnych wypłat dotyczący danej strategii jest też skończony i może być multizbiorem*. Celem decydenta jest wybór strategii maksymalizującej korzyść.

W artykule skoncentrujemy się na wyborze optymalnej strategii czystej, tj. rozwiązania zakładającego, iż decydent wybiera i realizuje tylko jeden wariant decyzyjny [Sikora, red., 2008]. Każda decyzja będzie opisana za pomocą jednego, wspólnego kryterium lub jednego miernika syntetycznego ukazującego realizację różnych celów, zatem rozważania będą dotyczyć problemów jednokryterialnych lub sprowadzalnych do tychże problemów**.

W literaturze można znaleźć opis różnych metod mających zastosowanie przy podejmowaniu decyzji w warunkach niepewności. Jedną z nich jest reguła Hurwicza. Ta zasada prowadzi zazwyczaj do logicznych i racjonalnych odpowiedzi, ale w pewnych szczególnych przypadkach rezultaty otrzymane za pomocą tej metody mogą być zdumiewające.

Artykuł ma następującą strukturę. Pierwsza część zawiera krótki opis najbardziej znanych reguł stosowanych w przypadku PDWN. W części drugiej skupiono się na analizie istoty i mankamentów reguły Hurwicza. W części trzeciej przedstawiono nowe podejście posiadające znamiona reguł Hurwicza i Bayesa. Wnioski zebrano w zakończeniu.

1. Reguły podejmowania decyzji w warunkach niepewności

Reguły PDWN są powszechnie znane w środowisku ludzi zajmujących się teorią podejmowania decyzji i metodami ilościowymi w ekonomii, lecz dla ułatwienia

---

* Jeżeli natomiast scenariuszy jest nieskończenie wiele, to zamiast macierzy wypłat podaje się dla każdej strategii przedział możliwych korzyści [w_j, m_j] (ang. decision making under interval uncertainty) [Huynh, Hu, Nakamori, Kreinovich 2007].

** Wśród interesujących prac dotyczących wielokryterialnego podejmowania decyzji w warunkach niepewności (WPDWN) warto wymienić: Dominiak [2006, 2009].

dalszego wywodu zostaną tu one krótko scharakteryzowane, przy czym z racji podjętego tematu, reguły Hurwicza i Bayesa omówimy nieco dokładniej. Szersze omówienie niżej przedstawionych zasad można znaleźć w licznych pozycjach literaturowych [Ignasiak, red., 1996; Kaufmann, Faure 1974; Pazek, Rozman 2009; Sikora, red., 2008]. Jak będzie można zaobserwować, wybór reguły decyzyjnej powinien zależeć od preferencji decydenta i przyjętych przez niego założeń.

Reguła Walda (reguła maximin) zakłada, iż niezależnie od wybranego wariantu, decydenta spotka zawsze najniższa z wypłat odpowiadających temu wariantowi [Wald 1950a, s. 656-668, 1950b]. Jest więc ona podejściem skrajnie pesymistycznym, sprowadzającym się do wyznaczenia wskaźnika w_j (poziomu bezpieczeństwa) dla każdej alternatywy i do wyboru decyzji maksymalizującej ten wskaźnik. W przeciwieństwie do zasady Walda, reguła maximax jest bardzo optymistycznym podejściem, w którym decydent zawsze spodziewa się wystąpienia najkorzystniejszego stanu natury i wybiera decyzję maksymalizującą wskaźnik maximax m_j (poziom optymizmu).

W regule Hurwicza przyjmuje się, iż decydent powinien przeprowadzić ranking strategii na podstawie średniej ważonej poziomu bezpieczeństwa i poziomu optymizmu [Hurwicz 1952, 1951] zgodnie ze wzorem (1), gdzie h_j to wskaźnik Hurwicza, w_j i m_j to minimalna i maksymalna wypłata związana z j-tą decyzją, a $\alpha \in <0,1>$ oznacza współczynnik pesymizmu (ostrożności). Dla skrajnych optymistów parametr ten jest bliski zeru, z kolei dla skrajnych pesymistów współczynnik α dąży do jedności. Optymalną strategią czystą jest ta, której wartość wskaźnika h_j jest najwyższa* (wzór (2)).

$$h_j = \alpha \cdot w_j + (1-\alpha) \cdot m_j \tag{1}$$

$$h_j^* = \max_j \{h_j\} = \max_j \{\alpha \cdot w_j + (1-\alpha) \cdot m_j\} \tag{2}$$

Reguła Savage'a [1961, s. 173-188] jest także nazywana regułą minimalnego żalu lub regułą minimax i polega na wyborze decyzji minimalizującej maksymalną względną stratę na podstawie macierzy względnych strat.

Reguła Bayesa, zwana również regułą Laplace'a lub regułą niedostatecznej racji [Render, Stair, Hanna 2006], zakłada, że skoro decydent nie jest w stanie określić, który scenariusz ostatecznie wystąpi, to może on przyjąć, iż wszystkie stany natury są równoprawdopodobne. Wówczas wystarczy obliczyć dla każdej

* Warto podkreślić, że w literaturze parametr α opisuje czasami poziom optymizmu decydenta, a nie poziom jego pesymizmu. Wówczas wzór (1) ma oczywiście nieco inną postać [Huynh, Hu, Nakamori, Kreinovich 2007; Groenewald, Pretorius 2011].

opcji wskaźnik Bayesa jako oczekiwaną wypłatę (3) i wybrać tę decyzję, której wskaźnik przyjmuje największą wartość (4):

$$b_j = \frac{1}{m}\sum_i a_{ij} \tag{3}$$

$$b_j^* = \max_j \{b_j\} \tag{4}$$

Stosowanie poszczególnych reguł PDWN może doprowadzić do uzyskania zupełnie odmiennych rankingów i do wskazania różnych optymalnych strategii. Z wyjątkiem zasady Bayesa, opisane reguły są przeznaczone wyłącznie dla decyzji realizowanych jednokrotnie*. Dodajmy także, że reguła Bayesa mocno odbiega od pozostałych reguł klasycznych, gdyż jako jedyna odwołuje się do rachunku prawdopodobieństwa.

2. Analiza reguły Hurwicza

W tej części artykułu przeprowadzimy dokładną analizę istoty reguły Hurwicza i konsekwencji wynikających z jej stosowania. Jak już zasygnalizowano na początku, korzystanie z tej zasady w podejmowaniu decyzji w warunkach niepewności w większości analizowanych sytuacji decyzyjnych jest rozsądne. Jednak warto zaznaczyć, że ta reguła prowadzi w bardzo specyficznych przypadkach do rezultatów sprzecznych z logiką i deklarowanymi przez decydenta preferencjami.

Przyjrzyjmy się bliżej konstrukcji wzoru (1), który służy do wyznaczenia wskaźnika Hurwicza dla poszczególnych wariantów.

Wzór uwzględnia jedynie skrajne wypłaty. Pośrednie wartości, tj. $a_{ij} \in (w_j, m_j)$, nie są w ogóle brane pod uwagę. Nie ma więc znaczenia, czy wśród pośrednich wyników dotyczących danej strategii większość jest bliska parametrowi w_j bądź m_j, czy też rozkładają się one w miarę symetrycznie. Pozycja konkretnej decyzji w rankingu jest zdeterminowana wyłącznie przez w_j i m_j, przy czym $w_j \neq m_j$.

Powyższa cecha reguły Hurwicza implikuje dla pary wariantów decyzyjnych D_e i D_f następujące konsekwencje:

$$(w_e = w_f) \wedge (m_e > m_f) \wedge (\alpha \in < 0,1)) \Rightarrow (h_e > h_f) \tag{5}$$

* Zaprezentowane zasady omówiono dla problemów maksymalizowanych. Sposoby zastosowania wymienionych reguł w przypadku kryterium minimalizowanego przedstawiono m.in. w pracy Gaspars-Wieloch [2012, s. 303-324].

$$\left(w_e = w_f\right) \wedge (m_e > m_f) \wedge (\alpha = 1) \Rightarrow (h_e = h_f) \tag{6}$$
$$\left(w_e > w_f\right) \wedge (m_e = m_f) \wedge (\alpha \in (0,1>) \Rightarrow (h_e > h_f) \tag{7}$$
$$\left(w_e > w_f\right) \wedge (m_e = m_f) \wedge (\alpha = 0) \Rightarrow (h_e = h_f) \tag{8}$$
$$\left(w_e = w_f\right) \wedge (m_e = m_f) \wedge (\alpha \in <0,1>) \Rightarrow (h_e = h_f) \tag{9}$$

Odnotujmy dodatkowo, że:

$$(h_e > h_f) \Leftrightarrow (\alpha \cdot w_e + (1-\alpha) \cdot m_e > \alpha \cdot w_f + (1-\alpha) \cdot m_f)$$
$$(h_e > h_f) \Leftrightarrow (\alpha \cdot w_e + m_e - \alpha \cdot m_e > \alpha \cdot w_f + m_f - \alpha \cdot m_f)$$
$$(h_e > h_f) \Leftrightarrow (\alpha \cdot (w_e - m_e) + m_e > \alpha \cdot (w_f - m_f) + m_f)$$
$$(h_e > h_f) \Leftrightarrow (\alpha \cdot (-r_e) + m_e > \alpha \cdot (-r_f) + m_f)$$
$$(h_e > h_f) \Leftrightarrow (\alpha \cdot (r_f - r_e) > m_f - m_e) \tag{10}$$

gdzie r_e i r_f oznaczają rozstępy między maksymalną a minimalną wypłatą związanymi odpowiednio z decyzjami D_e i D_f.

Zauważmy, że powyższe implikacje występują zawsze, nawet wówczas, gdy decydent jest pesymistą i zachodzi sytuacja opisana za pomocą wzoru (11) – wszystkie wypłaty pośrednie strategii D_e są niższe od wypłat pośrednich strategii D_f:

$$\left(\underset{\substack{a_{i,e} \neq m_e \\ a_{i,e} \neq w_e}}{\forall} \ \underset{\substack{a_{i,f} \neq m_f \\ a_{i,f} \neq w_f}}{\forall} a_{i,e} < a_{i,f} \right) \wedge \left(\underset{a_{i,e}}{\exists} a_{i,e} = m_e \right) \wedge \left(\underset{a_{i,e}}{\exists} a_{i,e} = w_e \right) \wedge$$
$$\wedge \left(\underset{a_{i,f}}{\exists} a_{i,f} = m_f \right) \wedge \left(\underset{a_{i,f}}{\exists} a_{i,f} = w_f \right) \tag{11}$$

Szczególnym przypadkiem wyżej wspomnianej zależności jest sytuacja, w której nierosnące m-elementowe ciągi wypłat rozpatrywanych wariantów spełniają warunki (12)-(13):

$$\left(S_e = (a_{1,e}, a_{2,e}, \ldots, a_{m,e})\right) \wedge (a_{1,e} = m_e) \wedge (a_{2,e} = \ldots = a_{m-1,e} = a_{m,e} = w_e) \tag{12}$$
$$\left(S_f = (a_{1,f}, a_{2,f}, \ldots, a_{m,f})\right) \wedge (a_{m,f} = w_f) \wedge (a_{1,f} = a_{2,f} = \ldots = a_{m-1,f} = m_f) \tag{13}$$

Wymienione przypadki, choć niezwykle rzadko występujące w praktyce, uzmysławiają nam zatem bardzo jasno, iż reguła Hurwicza, niezależnie od wartości współczynnika pesymizmu, pomija istotną informację, jaką jest częstotliwość występowania, w multizbiorze wszystkich wypłat związanych z danym wariantem decyzyjnym, wypłat bliskich parametrom w_j i m_j. Wracając do analizowanej pary decyzji D_e i D_f, można stwierdzić, że zaobserwowane następstwa wynikające z zastosowania zasady Hurwicza są dość krzywdzące dla decyzji D_f w przypadku relatywnie wyższych wypłat pośrednich, ponieważ nawet wówczas nie będzie mogła zająć wyższej pozycji w rankingu niż strategia D_e[*].

Analizując specyfikę reguły Hurwicza, warto również sprawdzić, jakie znaczenie mają wspomniane konsekwencje dla poszczególnych decydentów.

Decydent optymista (o współczynniku pesymizmu bliskim lub równym zero), a więc osoba zakładająca, iż czeka ją najwyższa bądź prawie najwyższa wypłata związana z podjętą decyzją, nie przejmuje się zbytnio wielkością pozostałych, niższych wypłat. Taki decydent nie poszukuje za wszelką cenę bezpiecznych wariantów decyzyjnych (przyjęto tu, iż decyzja jest tym bardziej bezpieczna, im jej wypłaty pośrednie są bliższe wypłacie maksymalnej). Rekomendowane przez regułę Hurwicza strategie dla decydenta optymisty odzwierciedlają więc raczej jego preferencje. Poważny problem pojawia się dopiero wtedy, gdy współczynnik pesymizmu (zwany również współczynnikiem ostrożności) decydenta rośnie, a więc gdy w procesie decyzyjnym udział bierze pesymista. Postawa pesymisty wyraża się w skłonności do dostrzegania tylko ujemnych stron życia, negatywnej oceny rzeczywistości oraz przyszłości. Stosunek pesymisty do świata jest nacechowany lękiem i poczuciem bezsilności [http://wikipedia.pl]. Pesymista spodziewa się, iż spotka go raczej scenariusz związany z niską wypłatą. Skoro tak jest, to pesymista stara się unikać decyzji, dla których większość scenariuszy oferuje niskie wypłaty. Takie warianty decyzyjne będziemy nazywać w skrócie strategiami niebezpiecznymi[**]. Tymczasem okazuje się, że im wyższy współczynnik ostrożności, tym gorzej jest uwzględniane w rankingu ustalonym na podstawie zasady Hurwicza ostrożnościowe podejście decydenta. Powróćmy do rozpatrywanej wcześniej pary decyzji D_e i D_f. Ze wzorów (5) i (7) wynika, że ta reguła nigdy nie zarekomenduje osobom o wysokim współczynniku pesymizmu decyzji D_f, nawet wtedy, gdyby wystąpił przypadek (11) lub (12)-(13), a różnice $m_e - m_f$ (wzór 5) i $w_e - w_f$ (wzór 7) były bliskie zeru, choć wiadomo, że pesymista postępuje ostrożnie i woli wybierać decyzje bezpieczne.

Kolejna kwestia warta poruszenia dotyczy strategii niezdominowanych. Jeżeli potencjalne decyzje są Pareto-optymalne, to oczekiwalibyśmy, że ranking tych decyzji będzie, wraz ze zmianą poziomu współczynnika ostrożności, również ulegał

[*] Przykładowo jeżeli $S_e = (5,1,1,1,1)$ i $S_f = (5,5,5,5,1)$, to $h_e = h_f = \alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot 5 = 5 - 4\alpha$.

[**] Jeżeli przyjmiemy (zgodnie z definicją podaną na stronie http://wikipedia.pl), że ryzyko to niebezpieczeństwo wynikające z możliwych konsekwencji podjęcia danej decyzji, to dla strategii niebezpiecznej można używać zamiennie pojęcia „strategia ryzykowna”.

zmianom. Tymczasem wzór (10) pokazuje, że kolejność wariantów decyzyjnych, poza współczynnikiem pesymizmu, zależy tylko od wartości maksymalnych i od rozstępów wypłat poszczególnych decyzji, które są stałe, co oznacza, iż dla niektórych sytuacji decyzyjnych ranking będzie się zmieniał bardzo rzadko.

Skoro w regule Hurwicza ważne są tylko skrajne wypłaty, nasuwa się wniosek, iż powinno się ją raczej stosować w problemach, w których dla każdej j-tej decyzji wszystkie (a nie tylko niektóre) wypłaty z przedziału $<w_j,m_j>$ są możliwe, a więc gdy liczba scenariuszy jest nieskończona. Natomiast w przypadku zadań ze skończoną liczbą wypłat reguła Hurwicza owszem dobrze uwzględnia preferencje decydenta, lecz jedynie wtedy, gdy dla każdego wariantu decyzyjnego rozkład wypłat jest w miarę symetryczny, tj. gdy nie występują w nadmiarze wartości zbliżone do jednej ze skrajnych wypłat [Gaspars-Wieloch 2013].

Zanim przejdziemy do przedstawienia propozycji nowego podejścia, które będzie uwzględniać nie tylko preferencje decydenta i skrajne wypłaty dotyczące poszczególnych strategii, lecz także wartości wszystkich wypłat pośrednich, co umożliwi uzyskanie sensownych rekomendacji dla szerszego spektrum problemów decyzyjnych, zilustrujemy sformułowane wcześniej wnioski fikcyjnym przykładem.

Załóżmy, że inwestorzy A i B zamierzają wybrać najlepszy projekt, mając do dyspozycji cztery różne biznesplany (P1, P2, P3, P4), przy czym eksperci przewidują, iż w przyszłości może wystąpić jeden z sześciu scenariuszy (S1, S2, S3, S4, S5, S6). Inwestor A jest umiarkowanym optymistą i określił swój współczynnik pesymizmu α_A na poziomie 0.3. Inwestor B lubi postępować ostrożnie – jego współczynnik pesymizmu α_B wynosi 0.7. W tabeli 2 podano przewidywane roczne zyski (w tys. euro) dla poszczególnych projektów w zależności od scenariusza.

Tabela 2

Macierz wypłat (studium przypadku)

Scenariusz	Projekt			
	P1	P2	P3	P4
S1	5	1	1.5	1
S2	1	4.8	3	1
S3	1	4.8	1.5	4.8
S4	1	4.8	3	1
S5	1	4.8	2	4.8
S6	1	4.8	2	1

Analizę porównawczą rozpatrywanych projektów ułatwi nam tabela 3, w której zebrano następujące informacje:

w_j – wskaźnik Walda, poziom bezpieczeństwa (wypłata minimalna),

m_j – wskaźnik maximax, poziom optymizmu (wypłata maksymalna),
r_j – rozstęp (m_j – w_j),
N_j – liczba scenariuszy, w których j-ty projekt uzyskuje najlepszy wynik,
n_j – liczba scenariuszy, w których j-ty projekt uzyskuje najgorszy wynik.

Tabela 3

Porównanie projektów (studium przypadku)

Charakterystyki	Projekt			
	P1	P2	P3	P4
w_j	1	1	**1.5**	1
m_j	**5**	4.8	3	4.8
r_j	4	3.8	**1.5**	3.8
N_j	1	**5**	0	2
n_j	5	1	**0**	4

Tabela 4

Wskaźniki Hurwicza (studium przypadku)

Projekty	Inwestor	
	A (umiarkowany optymista) ($\alpha_A = 0.3$)	B (umiarkowany pesymista) ($\alpha_B = 0.7$)
P1	$h_{P1}^{A} = 0.3 \cdot 1 + 0.7 \cdot 5 = 3.80$	$h_{P1}^{B} = 0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot 5 = 2.20$
P2	$h_{P2}^{A} = 0.3 \cdot 1 + 0.7 \cdot 4.8 = 3.66$	$h_{P2}^{B} = 0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot 4.8 = 2.14$
P3	$h_{P3}^{A} = 0.3 \cdot 1.5 + 0.7 \cdot 3 = 2.55$	$h_{P3}^{B} = 0.7 \cdot 1.5 + 0.3 \cdot 3 = 1.95$
P4	$h_{P4}^{A} = 0.3 \cdot 1 + 0.7 \cdot 4.8 = 3.66$	$h_{P4}^{B} = 0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot 4.8 = 2.14$
Ranking	I. P1 II. P2 i P4 III. P3	I. P1 II. P2 i P4 III. P3

Jak widać, największym rozstępem charakteryzuje się projekt P1 (r_1 = 4). To także ten właśnie projekt ma szansę wygenerować najwyższe zyski (m_1 = 5). Jego słabą cechą jest to, iż tylko w przypadku jednego scenariusza (S1) plasuje się on na pierwszym miejscu. W pozostałych pięciu stanach odnotowuje najgorsze wyniki. Projekty P2 i P4 mają trzy wspólne cechy (rozstęp, wartość minimalną oraz wartość maksymalną), lecz różnią się istotnie pod względem liczby najwyższych i najniższych zysków. W przypadku tych dwóch kryteriów projekt P2 jest zdecydowanie lepszy. Projekt P3, niezależnie od stanu, przynosi dość zbliżone i relatywnie małe korzyści. Jednakże w przypadku tego właśnie projektu aż trzy charakterystyki ujęte w tabeli 3 wypadają najlepiej.

Teraz przyjrzyjmy się wskaźnikom Hurwicza obliczonym dla poszczególnych projektów w zależności od preferencji inwestora oraz ostatecznym rankingom (tabela 4). Analizując otrzymane rezultaty, dochodzimy do następujących, momentami absurdalnych, wniosków, które jednak potwierdzają wymienione wcześniej konsekwencje wynikające ze stosowania reguły Hurwicza:

1) Ranking projektów jest identyczny dla umiarkowanego optymisty i pesymisty, co może być trochę zaskakujące, biorąc pod uwagę specyfikę poszczególnych biznesplanów.
2) Niezależnie od rozpatrywanego inwestora wartości wskaźników Hurwicza dla projektów P2 i P4 są parami takie same, choć doskonale wiadomo, iż projekt P2 dominuje nad P4 (patrz dwie ostatnie charakterystyki ujęte w tabeli 3). Para projektów P2 i P4 ilustruje przypadek opisany za pomocą wzoru (9).
3) Projekt P1 zdobył pierwsze miejsce w obu rankingach. Oznacza to, że zgodnie z regułą Hurwicza jest to rekomendowana optymalna strategia czysta dla obu inwestorów, nawet dla umiarkowanego pesymisty. Jest to o tyle zdumiewające, że projekt P1 jest przecież dość niebezpieczny. Owszem, można w przypadku stanu S1 liczyć na najwyższą wypłatę (aż 5 tys. euro), ale jeżeli wystąpi jakikolwiek inny scenariusz, zyski z realizacji projektu P1 będą najniższe. Wybór projektu P1 jest więc dla pesymisty raczej nieracjonalnym posunięciem. Posunięciem sprzecznym z deklarowanym przez niego współczynnikiem ostrożności. Projekt P1 ustępuje w rankingu projektowi P3 dopiero przy współczynniku pesymizmu przekraczającym 0.8.
4) Reguła Hurwicza wyżej plasuje projekt P1 niż P2, co w przypadku inwestora pesymisty także budzi kontrowersje. To przecież projekt P2 wydaje się bardziej pożądany dla inwestora B, gdyż w aż pięciu przypadkach na sześć daje możliwość realizacji całkiem wysokiego zysku. Dodajmy, iż nawet gdyby współczynnik ostrożności pesymisty wzrósł do 0.99, to i tak projekt P1 nadal uzyskiwałby wyższą wartość wskaźnika niż projekt P2. Relacja pomiędzy projektami P1 i P2 odpowiada właśnie sytuacji opisanej za pomocą wzorów (5), (11)-(13) i nawiązuje do sformułowanego wcześniej ogólnego wniosku dotyczącego rankingów gorzej uwzględniających preferencje decydentów o wysokich współczynnikach pesymizmu.

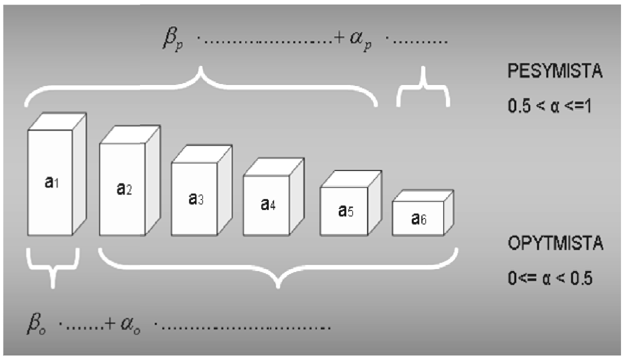
3. Reguła H+B, czyli hybryda reguły Hurwicza i reguły Bayesa – prezentacja podejścia

W dotychczasowych rozważaniach stwierdziliśmy, że rekomendacje uzyskiwane za pomocą reguły Hurwicza mogą nie do końca odzwierciedlać upodobania decydenta. Wniosek ten jednak dotyczył jedynie sytuacji, w której przynajmniej jeden z wariantów decyzyjnych charakteryzuje się zbiorem wypłat z przeważającą liczbą zysków albo bliskich m_j, albo bliskich w_j. W pozostałych przypadkach (tj. gdy wypłaty są rozłożone w miarę symetrycznie) zasada Hurwicza proponuje sensowne rozwiązania.

W tej części artykułu zostanie zaprezentowana pewna istotna modyfikacja analizowanej reguły, dzięki której będzie można znacząco zredukować skutki zaobserwowanego mankamentu i otrzymać logiczne odpowiedzi dla szerszego spektrum problemów decyzyjnych. Proponowana zasada, podobnie jak reguła Hurwicza, pozwala wskazać optymalną strategię czystą przy założeniu, że liczba stanów jest skończona oraz że decydent jest w stanie określić swój współczynnik pesymizmu. Metoda ta bierze pod uwagę nie tylko postawę decydenta, lecz także specyfikę zbiorów wypłat wszystkich alternatyw.

Idea proponowanego podejścia, tj. reguły H+B, jest bardzo prosta. Podobnie jak w przypadku oryginalnej wersji reguły Hurwicza, tu również trzeba będzie wyznaczyć dla każdej decyzji pewną średnią ważoną wypłat, a następnie wskazać tę decyzję, której wskaźnik jest najwyższy. Jednak zupełnie inaczej będzie obliczany ten właśnie wskaźnik, nazwijmy go wskaźnikiem H+B, czyli hb_j. Na początek trzeba będzie przedstawić zbiór wypłat w postaci nierosnącego ciągu wypłat. Gdy deklarowany współczynnik pesymizmu będzie się mieścić w przedziale <0, 0.5>, to parametr α będziemy mnożyć nie przez najniższą wypłatę, lecz przez sumę $(m - 1)$ najniższych wyrazów tego ciągu (gdzie m oznacza liczbę scenariuszy), natomiast współczynnik optymizmu (czyli β) – jedynie przez najwyższą wypłatę. Z kolei gdy deklarowany współczynnik pesymizmu będzie należeć do przedziału <0.5, 1>, to parametr α będziemy mnożyć przez najmniej korzystną wypłatę, a współczynnik optymizmu – przez sumę $(m - 1)$ najwyższych wypłat (przy $\alpha = 0.5$ nie ma znaczenia, którą metodę zastosujemy). Jak widać, przy obliczeniach weźmiemy pod uwagę wszystkie wypłaty, a takie założenie jest z kolei charakterystyczne dla zasady Bayesa. Dlatego właśnie proponowaną regułę nazwano hybrydą reguł Hurwicza i Bayesa. Aby wskaźniki hb_j mieściły się w przedziale $<w_j, m_j>$, wspomniane sumy odpowiednio zważonych wypłat zostaną na koniec podzielone przez sumę wszystkich wag.

Powyższa propozycja wymaga wyjaśnienia. Otóż dzięki takiemu podejściu mamy możliwość uwzględnienia częstotliwości występowania wypłat najwyższych i najniższych. Oznacza to, że pesymiście zostanie wskazana ta strategia, której najniższa wypłata jest względnie najwyższa lub której najwyższe wypłaty występują stosunkowo często (taki rozkład jest preferowany przez pesymistów, gdyż daje poczucie bezpieczeństwa), ponieważ jego współczynnik optymizmu będzie wagą dla każdej wypłaty oprócz jednej, tej, która znajduje się na końcu nierosnącego ciągu wypłat. Z kolei optymiście, zgodnie z regułą H+B, zostanie zarekomendowana ta strategia, której najwyższa wypłata jest względnie największa, lecz której najkorzystniejsze wypłaty występują niekoniecznie często, ponieważ optymista takiego zabezpieczenia nie potrzebuje – liczy na to, że będzie miał szczęście i że wystąpi akurat najlepszy scenariusz dla wybranej decyzji. Współczynnik pesymizmu będzie w tym przypadku wagą dla każdej wypłaty oprócz jednej, tej, która zajmuje pierwszą pozycję w ciągu wypłat (patrz rys. 1).



Rys. 1. Ważenie wypłat w regule H+B

Stosowanie reguły H+B sprowadza się do realizacji następujących kroków:

Krok 1. Wyznaczyć dla każdej decyzji nierosnący ciąg wypłat Sq_j:

$$Sq_j = (a_{1j},...,a_{sj},...,a_{mj}) \tag{14}$$

gdzie:

– s jest numerem wyrazu tego ciągu,

– $a_{s,j} \geq a_{s+1,j}$ (s = 1, 2, …, m-1), $a_{1j} = m_j$, $a_{mj} = w_j$.

Krok 2. Obliczyć dla każdej decyzji wskaźnik hb_j (hb_j^p, hb_j^o lub $hb_j^{0.5}$ w zależności od parametru α).

1) Jeżeli $\alpha \in (0.5,1>$, obliczyć wskaźnik hb_j^p zgodnie ze wzorem (15):

$$hb_j^p = \frac{\alpha_p \cdot a_{mj} + \beta_p \cdot \sum_{s=1}^{m-1} a_{sj}}{(m-1)(1-\alpha)+\alpha} \tag{15}$$

2) Jeżeli $\alpha \in <0{,}0.5)$, obliczyć wskaźnik hb_j^o zgodnie ze wzorem (16):

$$hb_j^o = \frac{\alpha_o \cdot \sum_{s=2}^{m} a_{sj} + \beta_o \cdot a_{1j}}{(m-1)\cdot\alpha + 1 - \alpha} \tag{16}$$

3) Jeżeli $\alpha = 0.5$, obliczyć dla każdej decyzji wskaźnik hb_j^{05}, korzystając ze wzoru (17):

$$hb_j^{0.5} = hb_j^p = hb_j^o = b_j \tag{17}$$

Jak widać, w tym przypadku nie ma znaczenia, która formuła zostanie zastosowana (hb_j^p czy hb_j^o), ponieważ oba wzory prowadzą do uzyskania tych samych wartości, które są zresztą równe wskaźnikom Bayesa, gdyż wagi dla wszystkich wypłat są identyczne.

Krok 3. Wybrać tę strategię, która spełnia warunek (18):

$$hb_j^* = \max_j\{hb_j\} \tag{18}$$

Z konstrukcji metody wynika, że w odróżnieniu od reguły Hurwicza, suma wszystkich współczynników użytych jako wagi dla poszczególnych wypłat będzie zazwyczaj większa od jedności. Aby więc otrzymać wskaźniki spełniające warunek (19), co oczywiście nie zmienia rankingu decyzji, lecz jedynie proporcjonalnie obniża wartości wszystkich wskaźników, warto podzielić ważone sumy wypłat przez sumę wszystkich użytych wag. W przypadku pesymisty raz jest stosowany współczynnik pesymizmu (α) i (m – 1) razy jest wykorzystywany współczynnik optymizmu ($\beta = 1 - \alpha$), co w sumie daje $(m - 1)(1 - \alpha) + \alpha$ (patrz mianownik we wzorze (15)). Natomiast w przypadku optymisty jedna wypłata jest mnożona przez współczynnik optymizmu ($\beta = 1 - \alpha$), a (m – 1) wypłat mnożymy przez współczynnik ostrożności (α), czyli suma wszystkich wag wynosi $(m-1)\cdot\alpha + 1 - \alpha$ (patrz mianownik we wzorze (16)).

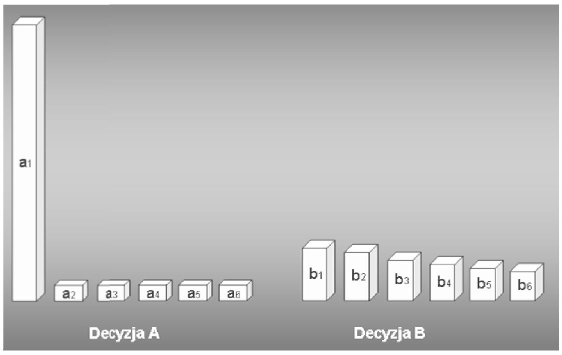
$$w_j \le hb_j \le m_j \tag{19}$$

Z konstrukcji proponowanych wzorów (15) i (16) wynika, że we wskaźnikach ustalanych dla pesymisty wraz ze wzrostem liczby scenariuszy maleje znaczenie minimalnej wypłaty i rośnie znaczenie sumy (m – 1) najwyższych wypłat, zaś we wskaźnikach obliczanych dla optymisty maleje znaczenie maksymalnej wypłaty i rośnie znaczenie sumy (m – 1) najniższych wypłat. Taka zależność nie występuje w pierwotnej wersji reguły Hurwicza – niezależnie od liczby stanów ważne są tylko dwie wypłaty: maksymalna i minimalna. Tu natomiast jest widoczny wpływ zasady Bayesa, z której wynika, że szansa wystąpienia danego scenariusza (także tego najbardziej i najmniej korzystnego) maleje, im scenariuszy jest więcej. Reguła H+B daje więc następuje korzyści:

– dla pesymisty: im więcej jest stanów, tym wyższy wskaźnik otrzyma wariant decyzyjny, dla którego większość scenariuszy oferuje wypłaty bliskie wartości maksymalnej związanej z tym wariantem (jest to pewna forma zabezpieczenia dla pesymisty),
– dla optymisty: im więcej jest scenariuszy, tym mniejszy wskaźnik otrzyma wariant decyzyjny, dla którego większość stanów oferuje wypłaty bliskie wartości minimalnej związanej z tym wariantem (dzięki temu optymiście zostanie zarekomendowana strategia, której najwyższe wypłaty są znacznie wyższe od najwyższych wypłat innych strategii).

Ostatecznie więc możemy stwierdzić, że wskaźniki H+B uwzględniają dwie informacje: 1) poziom pesymizmu (bądź optymizmu) decydenta (cecha charakterystyczna dla reguły Hurwicza), 2) szanse realizacji poszczególnych wypłat (cecha reguły Bayesa).

Ważenie wszystkich wypłat, a nie tylko skrajnych wartości, daje istotną przewagę reguły H+B nad regułą Hurwicza np. wówczas, gdy decydent ma do wyboru dwie decyzje (D_a i D_b) o zbiorach wypłat przedstawionych na rys. 2. Decyzja D_a charakteryzuje się jedną bardzo wysoką wypłatą (kilkakrotnie przewyższającą maksymalną wypłatę związaną z decyzją D_b), natomiast pozostałe jej wypłaty są kilkakrotnie niższe od minimalnej wypłaty decyzji D_b. Z kolei wypłaty decyzji D_b są dość wyrównane i, poza jednym scenariuszem, wyższe od wypłat decyzji D_a.



Rys. 2. Zbiór wypłat dla decyzji D_a i D_b

Decydent o nastawieniu mocno pesymistycznym powinien raczej być zainteresowany realizacją strategii D_b, której rozkład wypłat jest bardziej bezpieczny. Reguła Hurwicza i reguła H+B zaproponują decydentowi strategię D_a, gdy maksymalna wypłata tej decyzji będzie spełniać odpowiednio warunek (20) i (21):

$$(1-\alpha)\cdot a_1+\alpha\cdot a_6>(1-\alpha)\cdot b_1+\alpha\cdot b_6$$
$$a_1>\frac{(1-\alpha)\cdot b_1+\alpha\cdot(b_6-a_6)}{1-\alpha} \qquad (20)$$

$$\frac{(1-\alpha)\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)+\alpha\cdot a_6}{5\cdot(1-\alpha)+\alpha}>\frac{(1-\alpha)\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)+\alpha\cdot b_6}{5\cdot(1-\alpha)+\alpha}$$
$$a_1>\frac{(1-\alpha)\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5-a_2-a_3-a_4-a_5)+\alpha\cdot(b_6-a_6)}{1-\alpha} \qquad (21)$$

Jak widać, minimalny poziom parametru a_1 dla reguły Hurwicza jest znacznie niższy od minimalnego poziomu tego parametru dla reguły H+B (wynika to m.in. z tego, że w liczniku we wzorze (21) występują ze znakiem dodatnim wszystkie wypłaty decyzji D_b, a nie tylko skrajne wartości). Zatem konkluzja jest taka, że klasyczna reguła Hurwicza sugeruje pesymistom decyzje o rzadkich wysokich wypłatach przy stosunkowo małej przewadze maksymalnej wypłaty nad maksymalnymi wypłatami innych strategii.

Reguła H+B stanowi pewne pośrednie narzędzie decyzyjne między regułą Hurwicza a regułą Bayesa. Dla współczynników α oscylujących wokół wartości 0.5 prezentowana zasada proponuje takie same rankingi, jak rankingi generowane za pomocą reguły Bayesa, co jest zrozumiałe, gdyż podobnie są ważone wszystkie wypłaty. W przypadku skrajnych pesymistów bądź optymistów rankingi H+B przypominają rankingi uzyskiwane na podstawie zasady Hurwicza, zwłaszcza wówczas, gdy liczba scenariuszy jest mała. W pozostałych sytuacjach, a więc gdy mamy do czynienia z umiarkowanymi pesymistami bądź optymistami lub gdy liczba stanów natury jest duża, ranking wariantów proponowany przez zasadę H+B nie przypomina już rankingów otrzymywanych za pomocą wspomnianych reguł klasycznych. W przypadku decyzji niezdominowanych rankingi generowane przez zasadę H+B będą bardziej wrażliwe na poziom parametru α, niż ma to miejsce przy regule Hurwicza, gdyż zmiana współczynnika ostrożności będzie wymagać zmiany wag dla wszystkich wypłat (a nie tylko skrajnych) we wskaźniku hb_j.

Tabela 5

Wskaźniki H+B (studium przypadku)

Projekty	Inwestor	
	A (umiarkowany optymista) ($\alpha_A = 0.3$)	B (umiarkowany pesymista) ($\alpha_B = 0.7$)
P1	$h^o_{P1} = \frac{0.3 \cdot 5 + 0.7 \cdot 5}{(6-1) \cdot 0.3 + (1-0.3)} = 2.27$	$h^p_{P1} = \frac{0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot 9}{0.7 + (6-1)(1-0.7)} = 1.55$
P2	$h^o_{P2} = \frac{0.3 \cdot 20.2 + 0.7 \cdot 4.8}{(6-1) \cdot 0.3 + (1-0.3)} = 4.28$	$h^p_{P2} = \frac{0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot 24}{0.7 + (6-1)(1-0.7)} = 3.59$
P3	$h^o_{P3} = \frac{0.3 \cdot 10 + 0.7 \cdot 3}{(6-1) \cdot 0.3 + (1-0.3)} = 2.32$	$h^p_{P3} = \frac{0.7 \cdot 1.5 + 0.3 \cdot 11.5}{0.7 + (6-1)(1-0.7)} = 2.05$
P4	$h^o_{P4} = \frac{0.3 \cdot 8.8 + 0.7 \cdot 4.8}{(6-1) \cdot 0.3 + (1-0.3)} = 2.73$	$h^p_{P4} = \frac{0.7 \cdot 1 + 0.3 \cdot 12.6}{0.7 + (6-1)(1-0.7)} = 2.04$
Ranking	I. P2 II. P4 III. P3 IV. P1	I. P2 II. P3 III. P4 IV. P1

Na koniec tej części powróćmy do przykładu analizowanego wcześniej. W tabeli 5 pokazano sposób wyznaczania wskaźników H+B dla umiarkowanego optymisty i umiarkowanego pesymisty:

1) Tym razem rankingi wygenerowane dla obu inwestorów nieco się różnią. Wynika to z faktu, że zmiana wartości parametru α powoduje zmianę wartości wag dotyczących wszystkich wypłat (a nie tylko skrajnych).
2) W obu przypadkach jest rekomendowany projekt P2, i jest to raczej rozsądny wybór, gdyż ani inwestor A nie jest skrajnym optymistą, by zdecydować się na projekt P1, ani inwestor B nie jest radykalnym pesymistą, by zdecydować się na projekt P3. A projekt P2 z jednej strony, o ile wystąpią korzystne scenariusze, daje wysokie wypłaty, a z drugiej jest relatywnie bezpieczny, gdyż częstotliwość pożądanych wyników jest tutaj najwyższa.
3) Projekt P4 uzyskuje niższą wartość wskaźnika H+B niż projekt P2, co jest logiczne, gdyż projekt P4 jest zdominowany przez ten projekt. Na taką dominację nie wskazywały natomiast rezultaty otrzymane za pomocą klasycznej reguły Hurwicza. Tam zawsze $h_{P2} = h_{P4}$.

Zakończenie

W pierwszych dwóch częściach artykułu pokazano, iż w niektórych przypadkach reguła Hurwicza stosowana przy PDWN może prowadzić do dość zaskakujących wyników, proponując rankingi słabo uwzględniające preferencje decydentów (zwłaszcza pesymistów). Zasugerowano również, by tę regułę wykorzystywać tylko w przypadku problemów, w których: 1) liczba scenariuszy jest skończona, ale rozkład wypłat dla poszczególnych decyzji jest w miarę symetryczny lub gdy 2) liczba scenariuszy jest nieskończona i każda wypłata z przedziału $<w_j, m_j>$ jest możliwa.

Natomiast w trzeciej części zaproponowano regułę H+B, która stanowi hybrydę reguły Hurwicza i reguły Bayesa. Opracowano ją głównie z myślą o zadaniach ze skończoną liczbą stanów natury i ze skończonym zbiorem wypłat dla każdej decyzji, choć przy odpowiedniej modyfikacji zaproponowanych wzorów zaprezentowaną regułę można także stosować w zadaniach z ciągłym rozkładem wypłat. Reguła H+B była testowana nie tylko w ramach omówionego studium przypadku, lecz także w innych problemach decyzyjnych (z typowymi i nietypowymi rozkładami wypłat). Przy typowych rozkładach rankingi uzyskiwane za pomocą reguły Hurwicza i podejścia zmodyfikowanego są bardzo zbliżone i racjonalne. Ze względu na to, iż reguła H+B uśrednia, choć różnymi wagami, wszystkie wypłaty, może ona być przydatna zarówno przy jednokrotnej, jak i wielokrotnej realizacji wybranej decyzji, choć w tej drugiej sytuacji należy być ostrożnym, gdyż w dłuższym okresie współczynnik pesymizmu decydenta może się zmienić! Reguła H+B nie tylko pozwala deklarować swoje preferencje, ale je faktycznie uwzględnia w proponowanych rankingach. Bierze ona bowiem pod uwagę współczynnik ostrożności decydenta oraz częstotliwość występowania korzystnych i niekorzystnych wypłat. Dzięki takiej konstrukcji, nawet w przypadku problemów z dość specyficzną tabelą wypłat, rankingi otrzymane za pomocą tej metody lepiej odzwierciedlają faktyczne preferencje decydentów, a więc mogą być dla nich skutecznym narzędziem wspierającym proces decyzyjny.

Na koniec dodajmy, że zaproponowana koncepcja poszukiwania optymalnej strategii czystej nie jest całkowicie nowym pomysłem. W literaturze można znaleźć wiele opracowań zawierających opisy różnych metod stanowiących hybrydę kryterium Hurwicza i kryterium Baysesa (lub hybrydę innych klasycznych reguł PDWN). Warto jednak podkreślić, że istniejące już procedury wykorzystujące oba podejścia charakteryzują się odmienną konstrukcją i przeznaczeniem (dotyczą one raczej podejmowania decyzji w warunkach ryzyka ze względu na wprowadzenie prawdopodobieństwa) niż reguła H+B. Przykładowo w książce Ellsberga [2001] można znaleźć opis metody nazwanej „the restricted Bayes/Hurwicz criterion”, w której wybór optymalnego wariantu jest uzależniony nie tylko od współczynnika pesymizmu $\alpha \in <0,1>$, lecz także od współczynnika niejednoznaczności $\rho \in <0,1>$ (ang. *degree of ambiguity*). Determinuje on prawdopodobieństwa poszczególnych wypłat. Im niższy, tym większe znaczenie przypisuje się wartościom skrajnym. Z kolei Basili i Zappia [2010, s. 449-474] oraz Ghiradato i inni [2004, s. 133-173] proponują kryterium „α-MEU ” (ang. α-*maxmin expected utility decision criterion*), w którym uwzględnia się zarówno prawdopodobieństwa dla poszczególnych wypłat, jak i poziom pesymizmu [Marinacci 2002, s. 755-764]. Na podstawie koncepcji CEU (ang. *Choquet expected utility*) Basili opracował także metodę przypisującą inne prawdopodobieństwa wartościom pośrednim i inne prawdopodobieństwa wartościom skrajnym [Basili 2006, s. 1721-1728; Basili, Chateauneuf, Fontini 2008, s. 485-491; Gilboa 2009]. Obok wymienionych już podejść warto wspomnieć też o pracy Nakamury [1986, s. 147-162][*], w której zaprezentowano pewne rozmyte rozszerzenie reguły Hurwicza oparte na odległości Hamminga między dwoma zbiorami (g.u.s i g.l.s, ang. *the greatest upper set, the greatest lower set*) rozmytej użyteczności.

Bibliografia

Basili M., 2006: A Rational Decision Rule with Extreme Events. „Risk Analysis", Vol. 26, 1721-1728.

Basili M., Chateauneuf A., Fontini F., 2008: Precautionary Principle as a Rule of Choice with Optimism on Windfall Gains and Pessimism on Catastrophic Losses. „Ecological Economics", Vol. 67, 485-491.

Basili M., Zappia C., 2010: Ambiguity and Uncertainty in Ellsberg and Shackle. „Cambridge Journal of Economics", 34(3), 449-474.

Dominiak C., 2006: Multicriteria Decision Aid under Uncertainty. W: Multiple Criteria Decision Making' 05. T. Trzaskalik (ed.). Publisher of the Karol Adamiecki University of Economics, Katowice.

Dominiak C., 2009: Multicriteria Decision Aiding Procedure under Risk and Uncertainty. W: Multiple Criteria Decision Making' 08. T. Trzaskalik (ed.). Publisher of the Karol Adamiecki University of Economics, Katowice.

Ellsberg D., 2001: Risk, Ambiguity and Decision. Garland Publishing, New York, NY, USA.

Gaspars-Wieloch H., 2013: Modifications of the Hurwicz's Decision Rule. „Central European Journal of Operations Research", Springer, DOI 10.1007/s10100-013-0302-y, May.

Gaspars-Wieloch H., 2012: Ograniczona skuteczność metod optymalizacyjnych w rozwiązywaniu ekonomicznych problemów decyzyjnych. „Ekonomista", 3, 303-324.

Ghirardato P., Maccheroni F., Marinacci M., 2004: Differentiating Ambiguity and Ambiguity Attitude. „Journal of Economic Theory", Vol. 118, 133-173.

Gilboa I., 2009: Theory of Decision under Uncertainty. Cambridge University Press.

[*] Opis podejścia Nakamury można znaleźć też w pracy Piaseckiego [1990].

Groenewald M.E., Pretorius P.D., 2011: Comparison of Decision-making under Uncertainty Investment Strategies with the Money Market. „Journal of Financial Studies and Research".

Hurwicz L., 1952: A Criterion for Decision Making under Uncertainty. „Technical Report 355", Cowles Commission.

Hurwicz L., 1951: The Generalized Bayes Minimax Principle: A Criterion for Decision Making Under Uncertainty. Cowles Commission, „Discussion Paper Statistics 335".

Huynh V.N., Hu C., Nakamori Y., Kreinovich V., 2007: On Decision Making under Interval Uncertainty: A New Justification of Hurwicz Optimism-Pessimism Approach and Its Use in Group Decision Making. „Departmental Technical Reports (CS)", Paper 107.

Ignasiak E. (red.), 1996: Badania operacyjne. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Kaufmann A., Faure R., 1974: Invitations a la recherche operationnelle. Paris, Dunod.

Knight F.H., 1921: Risk, Uncertainty, Profit. Hart, Schaffner & Marx, Houghton Mifflin Co Boston, MA.

Marinacci M., 2002: Probabilistic Sophistication and Multiple Priors. „Econometrica", Vol. 70, 755-764.

Nakamura K., 1986: Preference Relations on a Set of Fuzzy Utilities as a Basis for Decision Making. „Fuzzy Sets and Systems", Vol. 20, 147-162.

Neumann J., Morgenstern O., 1944: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.

Pazek K., Rozman C., 2009: Decision Making under Conditions of Uncertainty in Agriculture: A Case Study of Oil Crops. „Poljoprivreda (Osijek)", Vol. 15(1), 45-50.

Piasecki K., 1990: Decyzje i wiarygodne prognozy. Zeszyty Naukowe nr 106, Akademia Ekonomiczna, Poznań.

Render B., Stair R.M., Hanna M.E., 2006: Quantitative Analysis for Management. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.

Savage L.J., 1961: The Foundations of Statistics Reconsidered. W: Studies in Subjective Probability. H.E. Kyburg, H.E. Smokler (eds.). New York, Wiley, 173-188.

Siddiqui A., Chronopoulos M.: Optimal Investment and Operational Decision Making under Risk Aversion and Uncertainty. „European Journal Operations Research" (w druku).

Sikora W. (red.), 2008: Badania operacyjne. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Trzaskalik T., 2008: Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem. Wydanie II zmienione. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Wald A., 1950a: Basic Ideas of a General Theory of Statistical Decisions Rules. W: Selected Papers in Statistics and Probability. A. Wald (ed.). McGraw-Hill, New York, 656-668.

Wald A., 1950b: Statistical Decision Functions. Wiley, New York.

A HYBRID OF THE HURWICZ AND BAYES RULES IN THE DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTY

Summary

The Hurwicz rule and the Bayes rule are classical approaches applied in the decision making under uncertainty. This situation occurs when the decision maker may choose one of several alternatives and he or she is only able to assign to each of them an interval of potential payoffs or a set of possible profits. In both cases the answer obtained depends on the state of nature (scenario) which will happen, but in the first case the set of scenarios is infinite and in the second one – it is finite. The Hurwicz measure, with the aid of the coefficient of pessimism and the coefficient of optimism, enables to find the optimal pure strategy when the decision selected is performed only once. Meanwhile the Bayes criterion is designed to indicate the optimal pure or mixed strategy when the variant chosen is performed once or many times.

In the first part of the article the author analyzes the Hurwicz rule and illustrates cases when the use of this criterion leads to quite unexpected results which seem to be contradictory with the logic and do not reflect the decision maker's preferences. In the second part a proposal of an approach for optimal pure strategy searching (by means of formulas considering both the coefficients of pessimism and optimism, as well as the whole set of payoffs) is presented. This procedure (H+B rule) combines elements of the Hurwicz criterion and the Bayes criterion, but is deprived of disadvantages typical of the Hurwicz rule. The rule suggested takes into consideration both extreme payoffs and intermediate payoffs, which enables to receive rational recommendations for a larger spectrum of decision problems. The H+B rule may be applied in the decision making process under uncertainty when the number of potential scenarios and the set of possible payoffs are finite, however a slight modification of the equations proposed enables to use this procedure in problems with continuous payoffs.