



### **Małgorzata Just**

Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu  
Wydział Ekonomiczno-Społeczny  
Katedra Finansów i Rachunkowości  
m.just@up.poznan.pl

## **OCENA PRZYDATNOŚCI MODELI VaR DO SZACOWANIA RYZYKA INWESTYCJI NA RYNKU METALI SZLACHETNYCH**

**Streszczenie:** Celem pracy była analiza przydatności wybranych warunkowych modeli VaR do szacowania ryzyka inwestycji na londyńskim rynku metali szlachetnych. Zbadano przydatność wykorzystania modelu GARCH z rozkładem normalnym,  $t$ -Studenta i skośnym  $t$ -Studenta, modelu GARCH-EVT i GARCH-FHS. Szczególnie użyteczne do szacowania ryzyka inwestycji w metale szlachetne okazały się następujące modele: GARCH z rozkładem  $t$ -Studenta i GARCH-EVT niezależnie od zajmowanej pozycji na rynku metali oraz GARCH z rozkładem skośnym  $t$ -Studenta dla pozycji długiej. Modele te pozwoliły na poprawne szacowanie wartości zagrożonej na rynku metali szlachetnych w okresach największych turbulencji na tym rynku.

**Słowa kluczowe:** wartość zagrożona, ryzyko inwestycyjne, metale szlachetne.

### **Wprowadzenie**

Obserwowany podczas globalnego kryzysu finansowego duży spadek cen instrumentów finansowych oraz wzrost cen towarów wywołał duże zainteresowanie rynkiem towarów, szczególnie rynkiem metali szlachetnych. Istotną korzyścią, związaną z inwestycjami w towary jest dywersyfikacja portfela inwestycyjnego, wynikająca z ujemnej lub słabej dodatniej korelacji między rynkiem towarowym a rynkami finansowymi [Conover i in., 2009; Draper, Faff, Hillier, 2006; Górską, Krawiec, 2009; Górską, Krawiec, 2010]. Wzrosło zainteresowanie nie tylko inwestycjami długoterminowymi w towary, ale także tymi o charakterze spekulacji. Wpłynęło to na wzrost zmienności cen towarów. Duża zmienność cen instrumentów finansowych i towarów zwiększyła zainteresowa-

nie instytucji nadzorujących rynki finansowe oraz teoretyków i praktyków, zajmujących się inwestycjami metodami kwantyfikacji możliwych strat, na które narażone są podmioty dokonujące tych inwestycji.

Podstawową miarą ryzyka, wykorzystywaną do szacowania ryzyka rynkowego przez instytucje finansowe i instytucje nadzorujące jest wartość zagrożona (*Value at Risk*, VaR). W odniesieniu do inwestycji jest to maksymalna strata wartości inwestycji, jakiej można doświadczyć w zadanym horyzoncie czasu z określonym z góry prawdopodobieństwem. Istotnym problemem jest wybór właściwego sposobu szacowania wartości zagrożonej – modelu VaR. Zależy on od własności rozkładu stóp zwrotu z inwestycji oraz horyzontu czasowego, na który jest wyznaczana wartość zagrożona. Instytucje finansowe często preferują bezwarunkowe metody prognozowania ryzyka, aby uniknąć niepożądanych częstych zmian limitów ryzyka dla inwestorów i menedżerów portfeli [Danielsson, de Vries, 2000]. Ponadto strategie inwestycyjne, które są ciągle aktualizowane, generują wysokie koszty transakcji [Cotter, 2007]. Jednak warunkowe modele pozwalają lepiej uchwycić dynamikę zwrotów, co jest szczególnie ważne przy wyznaczaniu prognozy ryzyka w krótkim horyzoncie, jak jeden dzień [Dowd, 2005] lub w ciągu dnia [Danielsson, Payne, 2000].

Wartość zagrożoną można wykorzystać także do szacowania ryzyka inwestycji w metale szlachetne, związanego z niekorzystnymi zmianami cen tych metali. Rozkłady zwrotów z inwestycji w metale cechują się leptokurtycznością i grubymi ogonami, w niektórych przypadkach także skośnością, ponadto w szeregach zwrotów występuje grupowanie zmienności [Giot, Laurent, 2003; Krężolek, 2012; Włodarczyk, 2011]. Stąd celem pracy jest analiza przydatności wybranych warunkowych modeli VaR do szacowania ryzyka inwestycji na rynku metali szlachetnych. W celu weryfikacji przydatności poszczególnych modeli oszacowano jednodniowe wartości zagrożone inwestycji w metale, notowane na Gieldzie Metali w Londynie w okresie od 4 stycznia 2000 r. do 9 września 2013 r. dla inwestora zajmującego pozycję długą i krótką w metalach, a następnie dokonano oceny jakości tych oszacowań. Badania dotyczące szacowania wartości zagrożonej na rynku metali były już przeprowadzone, ale wykorzystywano w nich różne zbiory metod, często wyznaczano VaR jedynie dla inwestora zajmującego długą pozycję lub badanie nie obejmowało okresu ostatniego kryzysu finansowego [Cheng, Hung, 2011; Echaust, Just, 2013; Hammoudeh, Malik, McAleer, 2011; Krężolek, 2012; Włodarczyk, 2011].

## 1. Wartość zagrożona

Wartość zagrożona to wielkość straty wartości inwestycji (instrumentu finansowego, towaru lub całego portfela), gdzie prawdopodobieństwo, iż zostanie ona poniesiona lub przekroczona w zadanym horyzoncie czasu jest równe z góry określonej tolerancji. Formalnie VaR definiuje się wzorem:

$$P(P_t \leq P_{t-1} - VaR) = \alpha$$

gdzie:  $P_t$  – wartość inwestycji w instrument finansowy, towar w okresie  $t$ ,  $\alpha$  – zadany poziom tolerancji. Strata z inwestycji może być także określona procentowo, co pozwala na porównywanie ryzyka związanego z inwestycjami w różne aktywa. Jeśli  $r_t$  oznacza procentową logarytmiczną stopę zwrotu z inwestycji w instrument finansowy, towar w okresie  $t$ , to VaR w ujęciu procentowym określa wzór:

$$P(r_t \leq -VaR) = \alpha$$

## 2. Warunkowe modele VaR

Kluczową rolę w szacowaniu wartości zagrożonej odgrywa zmienność instrumentu finansowego, towaru. W warunkowych modelach VaR przez warunkową zmienność instrumentu finansowego, towaru rozumie się warunkowe odchylenie standardowe (warunkową wariancję) stopy zwrotu z instrumentu finansowego, towaru.

Przyjmijmy, iż procentowa logarytmiczna stopa zwrotu z inwestycji w instrument finansowy, towar generowana jest przez proces:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

gdzie:  $\sigma_t$  – warunkowa zmienność w okresie  $t$ ,  $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$  oraz zmienna  $\varepsilon_t$  ma dystrybuantę  $F_{\varepsilon_t}$ .

VaR dla długiej pozycji w instrumencie finansowym lub towarze, przynoszącej stratę, gdy cena tego instrumentu, towaru spada, na poziomie istotności  $\alpha$  można opisać wzorem:

$$VaR_{\alpha,t+1} = -\sigma_t(1)F_{\varepsilon_t}^{-1}(\alpha) \quad (1)$$

gdzie:  $F_{\varepsilon_t}^{-1}(\alpha)$  –  $\alpha$ -kwantyl zmiennej  $\varepsilon_t$ ,  $\sigma_t(1)$  – prognoza warunkowej zmienności na jeden okres naprzód. VaR dla krótkiej pozycji w instrumencie finansowym lub towarze, ponoszącej stratę, gdy cena tego instrumentu, towaru rośnie, wyrażony jest wzorem:

$$VaR_{1-\alpha,t+1} = \sigma_t(1)F_{\varepsilon_t}^{-1}(1-\alpha) \quad (2)$$

W przedstawionym podejściu istotny wpływ na oszacowanie VaR ma jakość prognoz zmienności warunkowej. Jakość tych prognoz zależy od przyjętego modelu zmienności. W następnych punktach pracy przedstawione zostaną modele, które wykorzystano do szacowania wartości zagrożonej.

## 2.1. Model GARCH

Najpopularniejszymi modelami zmienności instrumentów finansowych i towarów są modele z rodziny uogólnionych modeli autoregresyjnej heteroscedastyczności warunkowej (*Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, GARCH). W praktyce najczęściej stosowany jest model GARCH(1,1) [Bollerslev, 1986]:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (3)$$

gdzie:  $\varepsilon_t \sim iid(0,1)$ ,  $\omega, \alpha, \beta > 0$ ,  $\alpha + \beta < 1$ ,  $r_t$  – stopa zwrotu w okresie  $t$ ,  $\sigma_t^2$  – wariancja warunkowa w okresie  $t$ ,  $\varepsilon_t$  – ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym standaryzowanym rozkładzie. Parametr  $\alpha$  decyduje o wpływie na zmienność nowych, napływających informacji zawartych w  $r_{t-1}^2$ , natomiast parametr  $\beta$  odzwierciedla część dynamiki, przedstawiającą oczekiwania rynku odnoszące się do tego, czy proces zmienności będzie przebiegał w przyszłości podobnie jak dotychczas. Model ten jest szczególnie przydatny do modelowania szeregów zwrotów charakteryzujących się występowaniem skupisk zmienności [Doman, Doman, 2009].

Biorąc pod uwagę własności rozkładów zwrotów z inwestycji w metale, w pracy wykorzystany zostanie model GARCH(1,1) z trzema rozkładami innowacji  $\varepsilon_t$ : normalnym,  $t$ -Studenta oraz skośnym  $t$ -Studenta. Modelowanie innowacji za pomocą rozkładu  $t$ -Studenta oraz skośnego  $t$ -Studenta pozwala uwzględnić własność grubych ogonów zwrotów oraz w przypadku drugiego rozkładu także skośność. Dążenie do precyzyjnego opisanie dynamiki zmienności zwrotów oraz bardziej dokładnego modelowania ogonów rozkładów stóp zwrotów zaowocowało powstaniem modelu GARCH-EVT. Innym modelem, pozwalającym uwzględnić dynamikę zmienności zwrotów oraz własności ich empirycznych rozkładów, jest model GARCH-FHS.

## 2.2. Model GARCH-EVT

Model GARCH-Extreme Value Theory (GARCH-EVT) wykorzystuje teorię wartości ekstremalnych do modelowania ogona rozkładu standaryzowanych reszt z modelu GARCH z rozkładem normalnym [McNeil, Frey, 2000]. W modelu GARCH-EVT wyznacza się parametry uogólnionego rozkładu Pareto (*Generalized Pareto Distribution*, GPD) dla standaryzowanych reszt z modelu GARCH, a następnie oblicza VaR dla pozycji krótkiej ze wzoru:

$$VaR_{1-\alpha,t+1} = \sigma_t(1)VaR_{1-\alpha} \quad (4)$$

gdzie:  $\sigma_t(1)$  – prognoza zmienności warunkowej na jeden okres naprzód z modelu GARCH(1,1) z rozkładem normalnym,  $VaR_{1-\alpha}$  – wartość zagrożona wyznaczana z wzoru (9) dla standaryzowanych reszt  $\hat{\varepsilon}_t$  z modelu GARCH(1,1) z rozkładem normalnym.

Istnieją dwa podejścia do analizy zdarzeń ekstremalnych. Pierwsze oparte jest na modelu maksimumów blokowych, drugie – częściej stosowane – to model przekroczeń (*Peaks over Threshold Model*, POT). Model przekroczeń pozwala na estymację ogona rozkładu zwrotów, zamiast modelowania rozkładu ich ekstremów, co umożliwi dokładniejsze estymowanie ogona rozkładu. Punktem wyjścia jest w tym rozwiązaniu warunkowy rozkład przekroczeń zmiennej losowej  $X$  pewnej progowej wartości  $u$ , zdefiniowany za pomocą wzoru:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (5)$$

gdzie  $F$  jest nieznaną dystrybuantą zmiennej losowej  $X$ . Według twierdzenia Pickandsa-Balkema-de Haana [Balkema, de Haan, 1974] dla wystarczająco dużego  $u$  dystrybuanta  $F_u$  ma rozkład graniczny, którym jest uogólniony rozkład Pareto z dystrybuantą:

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \beta)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x / \beta) & \xi = 0 \end{cases} \quad (6)$$

gdzie:  $\beta > 0$ ,  $x \geq 0$  dla  $\xi \geq 0$  i  $0 \leq x \leq -\beta/\xi$  dla  $\xi < 0$ . Rozkład ten ma tylko dwa parametry:  $\beta$  – parametr skali,  $\xi$  – parametr odpowiadający za grubość ogona. W celu oszacowania dystrybuanty rozkładu Pareto należy wybrać wartość progę  $u$ . Wybór wartości progowej ma wpływ na otrzymywane wartości estymatorów. Zbyt duża wartość progowa  $u$  spowoduje, iż niewiele obserwacji przekroczy próg  $u$ , co skutkuje dużą wariancją, zbyt mała jej wartość spowoduje duże obciążenie estymatorów. Z wzorów (5)-(6) otrzymuje się dystrybuantę zmiennej  $X$ :

$$F(x) = (1 - F(u))G_{\xi,\beta}(x - u) + F(u), \quad x > u \quad (7)$$

Należy jeszcze wartość  $F(u)$  zastąpić estymatorem empirycznym  $\hat{F}(u) = 1 - N_u / n$ , gdzie  $n$  to liczba obserwacji, a  $N_u$  to liczba przekroczeń  $u$ . Otrzymuje się wówczas następujący estymator dystrybuanty  $F$ :

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left( 1 + \hat{\xi} \frac{(x-u)}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\xi}} \quad (8)$$

Wyznaczając  $x$  z (8) można wyznaczyć VaR dla pozycji krótkiej:

$$VaR_{1-\alpha} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{n}{N_u} \alpha \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (9)$$

gdzie  $\alpha$  jest poziomem tolerancji dla VaR. Aby wyznaczyć VaR dla pozycji długiej należy przeprowadzić obliczenia dla standaryzowanych reszt pomnożonych przez minus jeden.

### 2.3. Model GARCH-FHS

Model GARCH-Filtered Historical Simulation (GARCH-FHS) stosuje metodę symulacji historycznej do standaryzowanych reszt z modelu GARCH [Hull, White, 1998]. Oznacza to, że w podejściu tym wyznacza się kwantyl empiryczny dla standaryzowanych reszt, otrzymanych z modelu GARCH, a następnie oblicza się VaR. Dla pozycji długiej i krótkiej VaR wyznacza się odpowiednio z wzorów:

$$VaR_{\alpha,t+1} = -\sigma_t(1)F_{\hat{\varepsilon}_t}^{-1}(\alpha) \quad , \quad VaR_{1-\alpha,t+1} = \sigma_t(1)F_{\hat{\varepsilon}_t}^{-1}(1-\alpha) \quad (10)$$

gdzie:  $\sigma_t(1)$  – prognoza zmienności warunkowej na jeden okres naprzód z modelu GARCH(1,1),  $F_{\hat{\varepsilon}_t}^{-1}(\alpha)$  –  $\alpha$ -kwantyl empiryczny standaryzowanych reszt  $\hat{\varepsilon}_t$  z modelu GARCH(1,1).

### 3. Opis danych

Wartości zagrożone szacowano dla inwestycji w cztery najpopularniejsze metale szlachetne: złoto, srebro, platynę, pallad. W tym celu wykorzystano szeregi dziennych kursów zamknięcia metali szlachetnych z Giełdy Metali w Londynie [www 1], wyrażonych w USD za uncję kruszcu, od 5 stycznia 1999 r. do 6 września 2013 r. VaR szacowano na podstawie dziennych procentowych logarytmicznych stóp zwrotu wyznaczonych z wzoru:  $r_t = 100 \ln(P_t/P_{t-1})$ , gdzie  $P_t$  oznacza kurs zamknięcia metalu w okresie  $t$ .

W tabeli 1 przedstawiono statystyki opisowe analizowanych szeregów stóp zwrotu i wartości testu Jarque'a-Bery.

**Tabela 1.** Statystyki opisowe szeregów stóp zwrotu i wartość testu Jarque'a-Bery (JB) dla badanych metali szlachetnych w okresie 6.01.1999-6.09.2013

	Liczba obserwacji	Średnia	Odchylenie standardowe	Maksimum	Minimum	Skośność	Kurtoza	JB
<b>Złoto</b>	3704	0,0426	1,1678	7,0060	-9,5962	-0,2709*	8,7614*	5168
<b>Srebro</b>	3703	0,0418	2,1467	18,2786	-18,6926	-0,6001*	12,8755*	15270
<b>Platyna</b>	3703	0,0385	1,5375	11,1288	-17,2773	-0,7775*	13,0749*	16034
<b>Pallad</b>	3702	0,0201	2,2751	16,7992	-17,8590	-0,4232*	9,9547*	7571

\* odrzucenie hipotez zerowych: skośność wynosi 0 (test skośności – D'Agostino), kurtoza wynosi 3 (test kurtozy – Anscombe-Glynn) na poziomie istotności 0,0001.

Największą zmiennością, mierzoną rozstępem i odchyleniem standardowym, charakteryzowały się zwroty ze srebra oraz palladu, co wskazuje na ich silną dynamikę. Najmniejszą zmiennością cechowały się stopy zwrotu ze złota. W przypadku wszystkich analizowanych metali szlachetnych średnia stopa zwrotu była bliska zeru. Wszystkie rozkłady stóp zwrotu badanych metali szlachetnych charakteryzowały się bardzo słabą lub słabą ujemną skośnością. Wysokie wartości kurtozy świadczą, iż rozkłady stóp zwrotu analizowanych metali charakteryzowały się grubymi ogonami, a więc częstym pojawianiem się ekstremalnych wartości w szeregach. Oznacza to, że rozkłady stóp zwrotu metali nie były rozkładami normalnymi. Odrzucenia hipotezy o normalności rozkładów badanych zwrotów dokonano na podstawie testu Jarque'a-Bery.

#### 4. Przydatność warunkowych modeli VaR w szacowaniu ryzyka inwestycji w metale szlachetne

Wartości zagrożone inwestycji wyznaczano dla inwestora zajmującego pozycję długą i krótką w metalach szlachetnych, czyli dla lewych oraz prawych ogonów rozkładów stóp zwrotu z metali. VaR szacowano codziennie w dni robocze od 4 stycznia 2000 r. do 9 września 2013 r., wykorzystując 250 dziennych logarymicznych stóp zwrotu z metali poprzedzających ten dzień. Obliczenia przeprowadzono dla trzech poziomów istotności: 0,01; 0,025; 0,05. Wyznaczono VaR wykorzystując pięć warunkowych modeli: GARCH z rozkładem normalnym (GARCH-NORM), GARCH z rozkładem *t*-Studenta (GARCH-ST), GARCH z rozkładem skośnym *t*-Studenta (GARCH-SST), GARCH-EVT – przyjmując próg na poziomie 90% (oznacza to, że największy 10% pozytywnych i negatywnych standaryzowanych reszt uważane było za ekstremalne obserwacje), GARCH-FHS.

Model VaR jest przydatny do szacowania ryzyka inwestycji, jeśli poprawnie szacuje to ryzyko. Oceny przydatności modeli VaR do szacowania ryzyka można dokonać za pomocą tzw. testowania wstecznego (*backtesting*). Przydatność modelu ocenia się na podstawie liczby przekroczeń oszacowanych wartości zagrożonych. Wyznaczając VaR na poziomie tolerancji  $\alpha$ , wymaga się, by udział przekroczonych poziomów VaR przez empiryczne zwroty do wszystkich w próbie wynosił  $\alpha$ . Jeżeli udział przekroczeń jest wyższy od założonego, to model niedoszacowuje ryzyka, w przypadku przeciwnym model VaR jest zbyt ostrożny, a ryzyko rzeczywiste jest niższe niż wskazuje na to model. Trafnie szacujący ryzyko model VaR, powinien charakteryzować się także równomiernym rozkładem przekroczeń wartości zagrożonych przez empiryczne stopy zwrotu. W sytuacji, gdy przekroczenia występują seriami, model naraża inwestora na kumulację strat.

W celu sprawdzenia przydatności wybranych modeli do szacowania wartości zagrożonej inwestycji na rynku metali szlachetnych, wyznaczono oczekiwaną ( $ET$ ) oraz rzeczywistą ( $T_1$ ) liczbę przekroczeń oszacowanych VaR przez rzeczywiste stopy zwrotu oraz zastosowano testy: P. Kupca [1995] ( $LR\_UC$ , hipoteza zerowa: udział przekroczeń VaR przez rzeczywiste stopy zwrotu jest zgodny z założonym  $\alpha$ ), P. Christoffersena [Christoffersen, 1998] ( $LR\_CC$ , hipoteza zerowa: udział przekroczeń VaR przez rzeczywiste stopy zwrotu jest zgodny z założonym  $\alpha$  i przekroczenia są niezależne – pierwsze przekroczenie) oraz P. Christoffersena i D. Pelletiera [2004] ( $LR\_D$ , hipoteza zerowa: okresy między przekroczeniami wartości zagrożonych przez rzeczywiste stopy zwrotu są niezależne) w analizowanym okresie. Wyniki przedstawiono w tab. 2-5 (pogrubioną czcionką zaznaczono przypadki, w których odrzucano hipotezy zerowe w zastosowanych testach na poziomie istotności 0,05; w związku z trudnościami w kilku przypadkach z obliczeniem wartości testów w całym okresie, dokonano podziału tego okresu w tych przypadkach).

Oceniając jakość oszacowanych wartości zagrożonych dla zwrotów ze złota, na podstawie testów P. Kupca i P. Christoffersena (tab. 2) można stwierdzić, iż najgorsze rezultaty uzyskano dla modelu GARCH z rozkładem normalnym. Liczba przekroczeń VaR oszacowanych za pomocą tego modelu dla poziomu tolerancji 0,01 i 0,025 przez rzeczywiste stopy zwrotu przewyższała dopuszczalny poziom zarówno dla pozycji długiej, jak i krótkiej w tym towarze. Oznacza to, że VaR wyznaczone tą metodą były zaniżone. Dla pozycji długiej w złocie poprawę oszacowań VaR uzyskano wykorzystując model GARCH-FHS, GARCH-EVT, GARCH z rozkładem  $t$ -Studenta oraz GARCH z rozkładem skośnym  $t$ -Studenta, przy czym oszacowania otrzymane z ostatniego modelu były najdokładniejsze. Dla pozycji krótkiej w złocie, lepsze oszacowania VaR uzyskano stosując model



GARCH-EVT oraz GARCH z rozkładem  $t$ -Studenta. Należy także zauważyć, że najkorzystniej prezentowały się modele VaR dla poziomu tolerancji 0,05 niezależnie od zajmowanej pozycji w złocie, dla tych modeli w prawie wszystkich przypadkach nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o zgodności udziału przekroczeń z zadanyim poziomem tolerancji i ich niezależności w czasie. Wyniki testu P. Christoffersena oraz D. Pelletiera wskazują, iż w przypadku oszacowań VaR za pomocą wszystkich zastosowanych modeli nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o niezależności liczby dni między kolejnymi przekroczeniami.

**Tabela 2.** Ocena jakości oszacowań VaR dla złota

GARCH-NORM	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>i</sub></i>	66	106	172	55	115	185	
<i>LR UC</i>	<b>22,8267</b>	<b>4,2696</b>	0,0034	<b>10,3643</b>	<b>8,8277</b>	0,8946	
<i>LR CC</i>	<b>23,2106</b>	5,1349	0,2573	<b>11,5098</b>	<b>10,0038</b>	1,9228	
<i>LR D</i>	0,9562	0,0130	0,3192	1,2472	0,9124	0,5724	
GARCH-ST	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05 <sup>1</sup>	0,05 <sup>2</sup>
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	86	86
<i>T<sub>i</sub></i>	42	95	185	33	99	103	90
<i>LR UC</i>	1,5183	0,8560	0,8946	0,0713	1,8088	3,1915	0,1559
<i>LR CC</i>	1,9198	1,5625	1,0382	1,0395	4,6831	4,5237	0,5332
<i>LR D</i>	0,4582	0,3558	0,7488	0,8586	0,9110	0,0178	0,4870
GARCH-SST	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05 <sup>1</sup>	0,05 <sup>2</sup>
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	86	86
<i>T<sub>i</sub></i>	34	83	170	40	117	101	108
<i>LR UC</i>	0,0089	0,1370	0,0463	0,8264	<b>10,0426</b>	2,4870	<b>5,2845</b>
<i>LR CC</i>	0,6649	0,6267	0,4018	<b>7,2964</b>	<b>12,1005</b>	3,2470	5,3835
<i>LR D</i>	0,0588	0,2624	1,1326	2,2934	0,5546	1,2048	0,2800
GARCH-EVT	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>i</sub></i>	48	95	179	46	105	182	
<i>LR UC</i>	<b>4,7171</b>	0,8560	0,2354	3,4719	<b>3,8582</b>	0,5128	
<i>LR CC</i>	<b>6,5785</b>	1,5625	0,5954	5,5160	4,7958	1,1428	
<i>LR D</i>	1,0888	0,3650	0,5432	0,5572	0,5254	2,0888	
GARCH-FHS	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>i</sub></i>	52	104	189	55	117	188	
<i>LR UC</i>	<b>7,7081</b>	3,4664	1,5634	<b>10,3643</b>	<b>10,0426</b>	1,3793	
<i>LR CC</i>	<b>9,2671</b>	4,5185	1,6175	<b>11,4664</b>	<b>12,1005</b>	2,7871	
<i>LR D</i>	0,0008	0,3554	1,4068	0,0006	0,4914	0,6052	

<sup>1</sup> dla okresu 4.01.2000-2.11.2006; <sup>2</sup> dla okresu 3.11.2006-9.09.2013.

Tabela 3. Ocena jakości oszacowań VaR dla srebra

GARCH-NORM	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>t</sub></i>	60	105	167	50	93	167	
<i>LR UC</i>	<b>15,5372</b>	<b>3,8693</b>	0,2001	<b>6,1405</b>	0,5126	0,2001	
<i>LR CC</i>	<b>15,5390</b>	4,0711	0,3654	<b>7,6098</b>	4,2821	0,3129	
<i>LR D</i>	0,1788	0,0106	1,1188	0,2452	1,1778	0,1048	
GARCH-ST	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>t</sub></i>	43	99	186	38	84	177	
<i>LR UC</i>	1,9420	1,8164	1,0529	0,3391	0,0662	0,1118	
<i>LR CC</i>	2,2724	3,2545	1,0530	1,1848	1,6217	0,1125	
<i>LR D</i>	0,2510	0,8598	2,9356	0,0960	0,6686	0,0124	
GARCH-SST	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05 <sup>1</sup>	0,05 <sup>2</sup>
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	86	86
<i>T<sub>t</sub></i>	39	94	176	40	100	97	106
<i>LR UC</i>	0,5584	0,6760	0,0660	0,8296	2,1077	1,3319	<b>4,4027</b>
<i>LR CC</i>	1,0956	1,4137	0,0661	1,3096	2,5089	1,7895	4,4388
<i>LR D</i>	0,1040	1,0838	<b>4,0538</b>	0,6438	0,2282	0,0140	1,2320
GARCH-EVT	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>t</sub></i>	45	97	176	36	85	185	
<i>LR UC</i>	2,9210	1,2963	0,0660	0,0615	0,0218	0,9021	
<i>LR CC</i>	4,1094	1,8522	1,1035	0,8201	1,4800	1,3913	
<i>LR D</i>	0,0072	0,5010	0,6238	0,5794	0,0210	0,0240	
GARCH-FHS	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05 <sup>1</sup>	0,05 <sup>2</sup>
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	86	86
<i>T<sub>t</sub></i>	50	106	185	41	100	100	99
<i>LR UC</i>	<b>6,1405</b>	<b>4,2813</b>	0,9021	1,1514	2,1077	2,1662	1,8666
<i>LR CC</i>	<b>7,6098</b>	5,1455	1,3655	2,1368	2,5089	2,4335	1,8948
<i>LR D</i>	0,5248	0,1212	2,7810	0,1028	0,0764	0,1594	0,0524

<sup>1</sup> dla okresu 4.01.2000-3.11.2006; <sup>2</sup> dla okresu 6.11.2006-9.09.2013.

Oszacowania VaR dla srebra (tab. 3) otrzymane za pomocą zastosowanych modeli były bardziej dokładne niż dla złota. Liczba przekroczeń VaR na ogół mieściła się w dopuszczalnych granicach (w 26 z 32 analizowanych przypadków) oraz przekroczenia były równomiernie rozmieszczone (w 31 z 32 analizowanych przypadków). Szczególnie użyteczne okazały się modele: GARCH z rozkładem *t*-Studenta, GARCH-EVT, GARCH z rozkładem skośnym *t*-Studenta, niezależnie od zajmowanej pozycji w srebrze oraz GARCH-FHS w przypadku pozycji krótkiej. Modele te w większości badanych przypadków uchwyciły własności empirycznych rozkładów stóp zwrotu z srebra.

Tabela 4. Ocena jakości oszacowań VaR dla platyny

GARCH-NORM	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>t</sub></i>	65	95	153	48	100	172	
<i>LR UC</i>	<b>21,5471</b>	0,8612	2,4559	<b>4,7250</b>	2,1077	0,0030	
<i>LR CC</i>	<b>28,5315</b>	<b>11,4097</b>	<b>12,8453</b>	<b>6,5268</b>	3,4539	0,3399	
<i>LR D</i>	0,2702	1,2418	0,2264	2,0412	<b>4,9812</b>	0,2420	
GARCH-ST	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>t</sub></i>	46	89	175	37	95	188	
<i>LR UC</i>	3,4786	0,0826	0,0321	0,1730	0,8612	1,3886	
<i>LR CC</i>	<b>16,5783</b>	<b>15,5471</b>	<b>12,0091</b>	0,8363	1,5352	1,4510	
<i>LR D</i>	3,2292	2,6340	0,0008	1,9510	<b>6,1464</b>	1,2296	
GARCH-SST	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05 <sup>1</sup>	0,05 <sup>2</sup>
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	86	86
<i>T<sub>t</sub></i>	36	78	148	42	110	117	91
<i>LR UC</i>	0,0615	0,8555	<b>3,8997</b>	1,5226	<b>6,1222</b>	<b>10,3572</b>	0,2592
<i>LR CC</i>	3,6558	<b>10,4374</b>	<b>15,7170</b>	1,8993	<b>7,7040</b>	<b>10,4699</b>	1,2600
<i>LR D</i>	1,6134	1,0512	0,0032	1,1622	<b>4,9768</b>	0,0250	0,3392
GARCH-EVT	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>t</sub></i>	43	86	170	43	90	177	
<i>LR UC</i>	1,9420	0,0015	0,0447	1,9420	0,1561	0,1118	
<i>LR CC</i>	4,3868	<b>13,2927</b>	<b>7,9549</b>	2,2724	1,1807	0,5405	
<i>LR D</i>	1,2954	1,9458	0,3144	2,6318	2,9918	0,1368	
GARCH-FHS	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>t</sub></i>	54	97	180	49	103	188	
<i>LR UC</i>	<b>9,4525</b>	1,2963	0,3206	<b>5,4121</b>	3,1044	1,3886	
<i>LR CC</i>	<b>19,5987</b>	<b>11,1191</b>	<b>10,8815</b>	<b>7,1004</b>	3,3774	2,7940	
<i>LR D</i>	<b>5,1796</b>	1,4970	0,2650	1,6282	3,6594	0,0878	

<sup>1</sup> dla okresu 4.01.2000-3.11.2006; <sup>2</sup> dla okresu 6.11.2006-9.09.2013.

Wyniki uzyskane dla kolejnego metalu szlachetnego – platyny (tab. 4) były gorsze niż dla pozostałych metali. Dla platyny liczba przekroczeń VaR na ogół mieściła się w dopuszczalnych granicach (w 24 przypadkach z 31). Wyjątek stanowiły oszacowania VaR z modelu GARCH z rozkładem normalnym, GARCH-FHS dla poziomu tolerancji 0,01 dla lewego i prawego ogona oraz z modelu GARCH z rozkładem skośnym *t*-Studenta dla poziomu tolerancji 0,025 oraz 0,05 dla prawego ogona. Jednak wyniki testów Christoffersena i Pelletiera wskazują, że w większości przypadków (w 19 przypadkach z 31 analizowanych) przekroczenia VaR nie były niezależne. Najkorzystniej wypadł, biorąc pod uwagę wyniki wszystkich zastosowanych testów, model GARCH-EVT. Ponieważ

skupia się na estymacji ogona rozkładu, jest szczególnie przydatny do szacowania wartości zagrożonej dla rozkładów charakteryzujących się leptokurtycznością i grubymi ogonami oraz skośnością. Takie cechy posiadały w szczególności rozkłady zwrotów z platyny i srebra.

**Tabela 5.** Ocena jakości oszacowań VaR dla palladu

GARCH-NORM	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>1</sub></i>	74	108	167	54	86	159	
<i>LR UC</i>	<b>34,3285</b>	<b>5,1764</b>	0,1967	<b>9,4639</b>	0,0013	1,1655	
<i>LR CC</i>	<b>35,3805</b>	5,9044	0,6688	<b>10,6519</b>	0,3239	1,5610	
<i>LR D</i>	0,4446	0,2148	0,1052	2,9802	3,4460	2,1694	
GARCH-ST	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>1</sub></i>	43	102	183	35	82	182	
<i>LR UC</i>	1,9470	2,7612	0,6411	0,0064	0,2260	0,5241	
<i>LR CC</i>	2,2771	3,0735	1,2102	3,7924	0,2274	0,7439	
<i>LR D</i>	0,7130	0,0892	0,0118	3,5246	2,1498	2,1714	
GARCH-SST	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>1</sub></i>	45	92	171	40	85	189	
<i>LR UC</i>	2,9272	0,3747	0,0166	0,8328	0,0210	1,5833	
<i>LR CC</i>	3,1749	0,4958	2,3561	3,7299	0,0254	1,8656	
<i>LR D</i>	0,0434	0,2860	0,0888	3,7358	2,7432	2,2626	
GARCH-EVT	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05	
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	172	
<i>T<sub>1</sub></i>	52	95	175	45	86	183	
<i>LR UC</i>	<b>7,7286</b>	0,8663	0,0335	2,9272	0,0013	0,6411	
<i>LR CC</i>	<b>9,1034</b>	2,7051	0,0356	5,0980	0,3239	1,2102	
<i>LR D</i>	0,4826	0,3736	0,6776	2,5678	1,8064	1,5238	
GARCH-FHS	Lewy ogon			Prawy ogon			
	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05 <sup>1</sup>	0,05 <sup>2</sup>
<i>ET</i>	34	86	172	34	86	86	86
<i>T<sub>1</sub></i>	55	104	184	50	108	107	90
<i>LR UC</i>	<b>10,3883</b>	3,4875	0,7696	<b>6,1496</b>	<b>5,1764</b>	<b>4,8469</b>	0,1648
<i>LR CC</i>	<b>11,4891</b>	5,7173	0,8457	<b>7,7284</b>	<b>6,9593</b>	<b>7,6391</b>	0,9367
<i>LR D</i>	0,3294	1,5312	1,0450	2,0564	<b>6,4232</b>	0,4666	0,7116

<sup>1</sup> dla okresu 4.01.2000-3.11.2006; <sup>2</sup> dla okresu 6.11.2006-9.09.2013.

Oszacowania VaR dla palladu (tab. 5), wyznaczone za pomocą modeli GARCH z rozkładem normalnym i GARCH-FHS, były najmniej dokładne. Wyniki testu Christoffersena i Pelletiera wskazują, podobnie jak dla złota oraz srebra, że w przypadku oszacowań VaR za pomocą wszystkich zastosowanych modeli na ogół nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o niezależności liczby dni

między kolejnymi przekroczeniami. Ponownie, najdokładniejsze oszacowania VaR uzyskano dla modeli GARCH z rozkładem  $t$ -Studenta, GARCH z rozkładem skośnym  $t$ -Studenta oraz modelu GARCH-EVT.

Przeprowadzona analiza pozwoliła wskazać klasę warunkowych modeli VaR (GARCH z rozkładem  $t$ -Studenta i GARCH-EVT dla pozycji długiej i krótkiej, GARCH z rozkładem skośnym  $t$ -Studenta dla pozycji długiej), które dały poprawne oszacowania wartości zagrożonych inwestycji na rynku metali szlachetnych w okresach największych turbulencji.

## Podsumowanie

Celem pracy była analiza przydatności wybranych warunkowych modeli VaR do szacowania ryzyka inwestycji na rynku metali szlachetnych. Do wyznaczenia wartości zagrożonej inwestycji w metale wykorzystano modele: GARCH z rozkładem normalnym,  $t$ -Studenta, skośnym  $t$ -Studenta, GARCH-EVT oraz GARCH-FHS. Zdecydowanie najgorsze oszacowania wartości zagrożonych otrzymano dla modeli GARCH z rozkładem normalnym oraz GARCH-FHS dla niskich poziomów tolerancji. Szczególnie użyteczne okazały się modele zmienności warunkowej GARCH z rozkładem  $t$ -Studenta i GARCH-EVT niezależnie od zajmowanej pozycji w metalach oraz model GARCH z rozkładem skośnym  $t$ -Studenta dla pozycji długiej.

Należy jednak zauważyć, iż przedstawione wyniki dotyczą weryfikacji warunkowych modeli VaR na rynku metali szlachetnych w bardzo krótkim, bo jednodniowym horyzoncie czasowym. P. Christoffersen i F. Diebold [2000] pokazali, że jakość prognoz wariancji warunkowej, wyznaczanych na podstawie modeli klasy ARCH pogarsza się wraz z wydłużeniem horyzontu prognozy. Oznacza to, że gdy badaniu poddana zostanie dokładność prognoz VaR na rynku metali szlachetnych w dłuższym okresie, to wyniki mogą być różne od przedstawionych w niniejszej pracy. Pojawia się tutaj także problem skalowania VaR, wyznaczonego na podstawie dziennych danych oraz poprawności reguły pierwiastka kwadratowego. Wskazana klasa warunkowych modeli VaR jest więc odpowiednia do szacowania ryzyka inwestycji w metale szlachetne w przypadku krótkiego okresu przetrzymania inwestycji.

## Literatura

- Balkema A.A., Haan L. de (1974), *Residual Life Time at Great Age*, „Annals of Probability”, Vol. 2, No. 5.
- Bollerslev T. (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, „Journal of Econometrics”, Vol. 31, No. 3.
- Cheng W.-H., Hung J.-CH. (2011), *Skewness and Leptokurtosis in GARCH-type VaR Estimation of Petroleum and Metal Asset Returns*, „Journal of Empirical Finance”, Vol. 18.
- Christoffersen P. (1998), *Evaluating Interval Forecasts*, „International Economic Review”, Vol. 39, No. 4.
- Christoffersen P., Diebold F. (2000), *How Relevant is Volatility Forecasting for Financial Risk Management?* „Review of Economics and Statistics”, Vol. 82, No. 1.
- Christoffersen P., Pelletier D. (2004), *Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach*, „Journal of Financial Econometrics”, Vol. 2, No. 1.
- Conover C.M., Jensen G.R., Johnson R.R., Mercer J.M. (2009), *Can precious Metals Make Your Portfolio Shine?* „Journal of Investing”, Vol. 18, No. 1.
- Cotter J. (2007), *Varying the VaR for Unconditional and Conditional Environments*, „Journal of International Money and Finance”, Vol. 26, No. 8.
- Danielsson J., Vries C.G. de (2000), *Value-at-Risk and Extreme Returns*, „Annales d'Economie et de Statistique”, ENSAE, No. 60.
- Danielsson J., Payne R. (2000), *Dynamic Liquidity in Electronic Limit Order Markets*, Mimeo, London School of Economics.
- Doman M., Doman R. (2009), *Modelowanie zmienności i ryzyka. Metody ekonometrii finansowej*, Oficyna, Kraków.
- Dowd K. (2005), *Measuring Market Risk*, John Willey&Sons Ltd, West Sussex.
- Draper P., Faff R.W., Hillier D. (2006), *Do Precious Metals Shine? An Investment Perspective*, „Financial Analysts Journal”, Vol. 62, No. 2.
- Echaust K., Just M. (2013), *Conditional versus Unconditional Models for VaR Measurement*, <http://papers.ssrn.com> (dostęp: 27.12.2013).
- Giot P., Laurent S. (2003), *Market Risk in Commodity Markets: A VaR Approach*, „Energy Economics”, Vol. 25.
- Górska A., Krawiec M. (2009), *Inwestowanie w towary jako forma dywersyfikacji portfela*, „Problemy Rolnictwa Światowego”, Zeszyty Naukowe Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego, t. 7 (XXII).
- Górska A., Krawiec M. (2010), *Inwestowanie w towary jako forma dywersyfikacji portfela w warunkach odmiennej koniunktury giełdowej*, „Rynek Kapitałowy. Skuteczne inwestowanie, Finanse, Rynki Finansowe, Ubezpieczenia”, nr 28, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, nr 612.
- Hammoudeh S., Malik F., McAleer M. (2011), *Risk Management of Precious Metals*, „The Quarterly Review of Economics and Finance”, Vol. 51, No. 4.

- Hull J., White A. (1998), *Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for VaR*, „Journal of Risk”, Vol. 1, No. 1.
- Krężolek D. (2012), *Non-classical Measures of Investment Risk on the Market of Precious Non-ferrous Metals Using the Methodology of Stable Distributions*, „Dynamic Econometric Models”, Vol. 12.
- Kupiec P. (1995), *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models*, „Journal of Derivatives” 1995, Vol. 3.
- McNeil A.J., Frey R. (2000), *Estimation of Tail-related Risk for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach*, „Journal of Empirical Finance”, Vol. 7, No. 3.
- Włodarczyk A. (2011), *Wykorzystanie metody VaR do oceny ryzyka inwestycji w metale szlachetne*, „VISNIK L'vivs'koi Komeracijnoi Akademii Ser. Ekonomiczna”, Vip. 37.
- [www 1] [www.kitco.com](http://www.kitco.com) (dostęp: 12.09.2013).

#### ASSESSMENT OF THE USEFULNESS OF VaR MODELS FOR ESTIMATING THE INVESTMENT RISK ON PRECIOUS METALS MARKET

**Summary:** The aim of the paper was to analyze the usefulness of selected conditional Value at Risk (VaR) models for estimating the investment risk in the London precious metals market. The usefulness of the following models: GARCH with normal distribution, Student-*t* distribution, skewed Student-*t* distribution, GARCH-EVT and GARCH-FHS was evaluated. Particularly useful for estimating the investment risk on the precious metals market proved to be the following models: GARCH with the Student-*t* distribution and GARCH-EVT irrespective of the position on the metals market and GARCH with skewed Student-*t* distribution for the long position. They enable to estimate the VaR correctly in very turbulent times on the market of precious metals.

**Keywords:** Value at Risk, investment risk, precious metals.