A C T A   U N I V E R S I T A T I S   L O D Z I E N S I S
FOLIA OECONOMICA 253, 2011

Iwona Müller-Frączek, Michał Bernard Pietrzak***

ANALIZA STOPY BEZROBOCIA W POLSCE Z WYKORZYSTANIEM PRZESTRZENNEGO MODELU MESS[1]

Streszczenie. W roku 2007 J. P. LeSage oraz R. K. Pace w pracy „A Matrix Exponential Spatial Specification" zaproponowali model przestrzenny z macierzą wykładniczą MESS (*Matrix Exponential Model*). Przestrzenna struktura autoregresyjna zmiennej objaśnianej została w nim zastąpiona transformacją, która jest wyznaczona przez macierz wykładniczą, związaną z macierzą sąsiedztwa. Ta innowacja znacznie ułatwia estymację parametrów modelu, w porównaniu z tradycyjnym podejściem przestrzennym.

Model MESS zostanie w referacie wykorzystany do analizy stopy bezrobocia w Polsce w roku 2007. Wstępne badanie autokorelacji przestrzennej bezrobocia uzasadni wykorzystanie modelu przestrzennego. Dalej zbadane zostaną powiązania tego procesu z innymi procesami ekonomicznymi, takimi jak PKB na osobę, inwestycje na osobę, poziom wynagrodzeń, wydajność pracy oraz liczba przedsiębiorstw na 10000 mieszkańców. Posłużą one do budowy modelu hipotetycznego.

Następnie przeprowadzona zostanie estymacja modeli MESS oraz regresji liniowej. Konfrontacja uzyskanych wyników wskaże na potrzebę uwzględniania zależności przestrzennych w analizie procesów ekonomicznych.

1. WPROWADZENIE

W obszarze zainteresowań autorów artykułu leżą badania nad rozwojem regionalnym, w szczególności dotyczące regionalnych centrów rozwoju. Decydenci poszukują narzędzi, które pomogą im skutecznie walczyć z lokalnymi problemami, w tym z bezrobociem. Potrzebne są modele, które dobrze oddadzą charakter tego zjawiska, m.in. obserwowaną zależność przestrzenną. Stąd podjęta próba wykorzystania w celu opisu stopy bezrobocia modelu przestrzennego z autozależności zmiennej objaśnianej.

Wybrano do analiz model MESS (matrix exponential spatial specification), który został zaproponowany w 2007 r. przez LeSage'a i Pace'a[2] jako kontrpropozycja dla modelu z przestrzenną częścią autoregresyjną (SAR).

Aby podkreślić znaczenie uwzględniania w modelach zależności przestrzennych, wyniki otrzymane w oparciu o model MESS skonfrontowane zostały z wynikami otrzymanymi w oparciu o klasyczny model regresji. Ponadto porównano je z podejściem opartym o modelu SAR.

[*] Dr, Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu.
[**] Dr, Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu.
[1] Druk publikacji został sfinansowany przez Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu w ramach grantu UMK nr 398-E.
[2] W pracy z 2009, J.P. LeSage, R.P. Pace, [2009], *Introduction to Spatial Econometrics*, CRC Press, LeSage i Pace kontynuowali rozważania na temat MESS.

2. METODOLOGIA

Model klasycznej regresji liniowej może zostać uogólniony tak, by przy jego użyciu możliwe było uwzględnienie zależności przestrzennych. Jedną z możliwości jest uwzględnienie w modelu opóźnień przestrzennych zmiennej objaśnianej, które opisują uśredniony wpływ sąsiadów na obserwację w danym punkcie przestrzeni. Model taki,. zwany autoregresyjnym modelem przestrzennym SAR (*spatial autoregressive model*)[3], określają wzory:

$$\mathbf{Y} = \rho\mathbf{WY} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{1}$$

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1}\boldsymbol{\beta}\mathbf{X} + (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W})^{-1}\varepsilon\,, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2\mathbf{I})\,,$$

gdzie $\mathbf{W}$ jest ustaloną z góry macierzą sąsiedztwa, natomiast proces ε jest szumem przestrzennym. Parametr autoregresji przestrzennej ρ odzwierciedla w takim modelu siłę powiązań między obserwacjami zmiennej objaśnianej w różnych lokalizacjach.

Model przestrzenny SAR jest szczególnym przypadkiem modelu, w którym zmienna zależna podlega transformacji liniowej *SY*:

$$\mathbf{SY} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2\mathbf{I})\,.$$

W modelu SAR transformacja liniowa określona jest jako $\mathbf{S}$=$\mathbf{I}$-$\rho\mathbf{W}$, możliwe są jednak inne, które nadadzą odmienną postać funkcji autokowariancyjnej modelu.

LeSage oraz Pace pod wpływem rozważań Chiu, Leonarda i Tsui[4] zaproponowali inną specyfikację modelu określonego równaniem (3). Za $\mathbf{S}$ przyjęli transformację wyznaczoną przez macierz wykładniczą, definiowaną równaniem:

$$\mathbf{S} = e^{\alpha\mathbf{W}} = \sum_{i=o}^{\infty} \frac{\alpha^i \mathbf{W}^i}{i!}\,, \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{W}^i$ wyznacza sąsiedztwo i-tego rzędu. Otrzymany w ten sposób model przestrzenny, nazwany *matrix exponential spatial specification* (MESS), określają wzory:

$$e^{\alpha\mathbf{W}}\mathbf{Y} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon}\,, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2\mathbf{I})\,,$$

gdzie $\mathbf{W}$ oznacza macierz sąsiedztwa, a proces $\boldsymbol{\varepsilon}$ jest szumem przestrzennym.

W modelu MESS parametr α odzwierciedla siłę autozależności przestrzennej między sąsiadami pierwszego rzędu zmiennej objaśnianej. Zaś funkcja autokowariancji przestrzennej, odzwierciedlająca również zależności wyższych rzędów przyjmuje postać wykładniczą, inaczej niż w modelu SAR, gdzie jej opadanie jest geometryczne.

Dla estymacji modelu określonego wzorem (1), jak i modelu określonego wzorem (5) wykorzystywana jest metoda największej wiarygodności. Jednak zaletą modelu MESS jest znaczne uproszczenie procedury w oparciu o własność:

---

[3] Nazwę tę przyjęto za autorami pracy J.P. LeSage, R.P. Pace, [2007], *A Matrix Exponentials Spatial Specifications*, Journal of Econometrics, 140:1, s. 190-214.

[4] Y.M. Chiu, T. Leonard, K. Tsui, [1996], *The Matrix-Logarythmic Covariance Model*, Journal of Computational and Graphical Statistics, 15, s. 1-17.

$$e^{\alpha \mathbf{W}} = e^{tr(\alpha \mathbf{W})} = e^0 = 1. \tag{6}$$

Dla modelu MESS logarytm funkcji wiarygodności redukuje się do postaci:

$$\ln L = -(\frac{n}{2})\ln(\pi\sigma^2) - \frac{u'u}{2\sigma^2}, \tag{7}$$

gdzie:

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} - \rho\mathbf{W}\mathbf{y} - \boldsymbol{\beta}\mathbf{X}, \tag{8}$$

podczas gdy dla modelu SAR zawiera on dodatkowy, kłopotliwy w obliczeniach, składnik:

$$\ln\left|\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}\right|. \tag{9}$$

Walory estymacyjne modelu MESS oraz postać umożliwiająca interpretację ekonomiczną parametrów kwalifikują go jako atrakcyjne narzędzie w badaniach, szczególnie wtedy, gdy mamy do czynienia z dużą liczbą obserwacji w przestrzeni.

3. DANE

Dane, wykorzystane w badaniu, związane były ze stopą bezrobocia w Polsce w roku 2007. Każda z rozważanych zmiennych składała się z 379 obserwacji, tylu ile jest powiatów.[5]

Początkowa faza analizy dotyczyła wyłącznie zmiennej objaśnianej, czyli stopy bezrobocia. Wstępnie zbadano istnienie trendu przestrzennego, opisanego równaniem:

$$\mathbf{Y} = \sum_{i+j \le s} \gamma_{i,j} x^i y^j + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}),$$

w którym **x** i **y** oznaczają współrzędne geograficzne. Zidentyfikowano liniowy trend przestrzenny. Wartości jego parametrów zamieszczono w tabeli 1.

Tab. 1. Wyniki estymacji parametrów modelu przestrzennego trendu liniowego dla stopy bezrobocia

Parametry	Oceny	Statystyka t	*P*-value
γ_{00}	7,948	5,288	2,10e-07
γ_{10}	0,169	0,873	0,383
γ_{01}	1,174	5,840	1,13e-08

Źródło: opracowanie własne.

Warto zauważyć, że parametry przy trendzie świadczące o globalnej przestrzennej tendencji wzrostu stopy bezrobocia w Polsce w kierunku północno-wschodnim, dobrze odzwierciedlają rzeczywistą sytuację słabszego rozwoju tych obszarów kraju.

Analiza reszt z modelu trendu wykazała ich autokorelację przestrzenną i uzasadniła stosowanie do opisu stopy bezrobocia modeli przestrzennych. Wartość współczynnika

[5] Dane zostały zaczerpnięte ze strony internetowej www.stat.gov.pl.

determinacji, wartość globalnej statystyki Morana oraz ocenę jej istotności zamieszczono w tabeli 2.

Tab. 2. Własności modelu trendu liniowego dla stopy bezrobocia

R^2	*I*	(*I*-*E*(*I*))/*S*(*I*)	*P*-value
0,083	0,471	13,868	< 2,2e-16

Źródło: opracowanie własne.

Przy konstrukcji modelu przestrzennego wzięto pod uwagę zmienne wyszczególnione w tabeli 2. Tylko dwie spośród nich, $\mathbf{X_1}$ oraz $\mathbf{X_2}$, okazały się statystycznie istotne. W oparciu o nie skonstruowano model wykorzystany do dalszej analizy bezrobocia.

Tab. 3. Zmienne rozważane przy budowie modeli bezrobocia

Zmienna	Oznaczenie
Stopa bezrobocia (%)	Y
Inwestycje na mieszkańca (1000 zł)	X_1
Liczba podmiotów gospodarczych na 10 000 mieszkańców	X_2
Wynagrodzenia (zł)	X_3
Udział zatrudnionych w rolnictwie do ogółu zatrudnionych (%)	X_4

Źródło: opracowanie własne.

4. REZULTATY

Zgodnie z wyznaczonym celem, jako pierwszy rozważony został model MESS z trendem przestrzennym postaci:

$$e^{\alpha \mathbf{W}}\mathbf{Y} = \sum_{i+j\le s} \gamma_{i,j}\mathbf{x}^i\mathbf{y}^j + \boldsymbol{\beta}\mathbf{X} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2\mathbf{I}),$$

w którym macierz **W** charakteryzuje geograficzne sąsiedztwo powiatów w sensie wspólnej granicy. Po estymacji parametrów modelu istotne okazały się tylko współczynniki przy trendzie pierwszego rzędu. Stąd, ostateczna wersja modelu dla stopy bezrobocia przyjęła postać:

$$e^{\alpha \mathbf{W}}\mathbf{Y} = \gamma_{00} + \gamma_{10}\mathbf{x} + \gamma_{01}\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{X}_1 + \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{X}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2\mathbf{I}).$$

Otrzymane w wyniku estymacji parametry modelu MESS z trendem liniowym dla stopy bezrobocia w Polsce w 2007 r. przedstawiono w tabeli 3, natomiast w tabeli 4 zamieszczono własności modelu.

Tab. 4.Wyniki estymacji modelu MESS dla stopy bezrobocia

Parametry	Oceny	Statystyka t	*P*-value
α	-0,753	-11,613	3,517012e-31
γ_{00}	12,686	7,974	1,531322e-15
γ_{10}	-0,436	-2,832	4,622456e-03
γ_{01}	0,556	3,675	2,373907e-04
β_1	-0,716	-6,154	7,534226e-10
β_2	-0,571	-5,518	3,418502e-08

Źródło: opracowanie własne.

Tab. 5. Własności modelu MESS dla stopy bezrobocia

R^2	I	$(I\text{-}E(I))/S(I)$	*P*-value
0,521	-0,006	-0,098	0,539

Źródło: opracowanie własne.

5. DYSKUSJA

Omówienie, otrzymanych w poprzednim podrozdziale wyników, najlepiej jest przeprowadzić na tle klasycznego modelu regresji z trendem liniowym, dopasowanego do tych samych danych empirycznych. W tabeli 6 przedstawiono parametry takiego modelu, a w tabeli 7 opisano jakość jego dopasowania.

Tab. 6. Wyniki estymacji modelu regresji liniowej dla stopy bezrobocia

Parametry	Oceny	Statystyka t	*P*-value
γ_{00}	19,847	10,601	2e-16
γ_{10}	-0,544	-2,896	0,004
γ_{01}	1,164	6,468	3,11e-10
β_1	-0,001	-6,064	3,24e-09
β_2	-0,007	-5,827	1,22e-08

Źródło: opracowanie własne.

Tab. 7. Własności reszt modelu regresji liniowej dla stopy bezrobocia

R^2	I	$(I\text{-E}(I))/\text{S}(I)$	*P*-value
0,292	0,465	13,700	< 2,2e-16

Źródło: opracowanie własne.

W wyniku nieuwzględnienia autozależności zmiennej objaśnianej, parametry przy trendzie w modelu regresji, choć zachowały odpowiednie znaki, są na zupełnie innym poziomie niż w modelu MESS. Parametry przy zmiennych objaśniających są zawyżone i mogą prowadzić do fałszywych wniosków. Ponadto dopasowanie jest dużo słabsze niż w modelu MESS i wynosi 0,292. Statystycznie istotna jest również statystyka Morana I, która świadczy o istnieniu autokorelacji w resztach.

Walory poznawcze modelu MESS są szczególnie widoczne przy badaniu wpływu zmiennych objaśniających na zmienną objaśnianą. W przypadku zmiennych rozważanych w artykule zagadnienie to ma szczególne znaczenie praktyczne. W polityce regionalnej, przy znacznie ograniczonej ilości środków, duże znaczenie ma wiedza na temat efektów związanych ze wzrostem nakładów na inwestycje w danym powiecie. Decydenci chcą wiedzieć, gdzie inwestować, aby korzyść dla całej lokalne społeczności była jak największa

Dla przykładu w oparciu o dwa modele, model MESS oraz model regresji liniowej, nieuwzględniający zależności przestrzennych, oszacowano jaki wpływ na stopę bezrobocia w poszczególnych powiatach województwa kujawsko-pomorskiego miałby wzrost inwestycji w Toruniu o 1000 zł na osobę oraz przyrost 100 podmiotów gospodarczych w tym mieście na 10000 jego mieszkańców. Toruń został wybrany jako jedno z centów rozwoju województwa. Wyniki rozważań przedstawiono w tabeli 8.

Tab. 8. Wpływ zmiany poziomu inwestycji oraz ilości podmiotów gospodarczych w Toruniu na stopę bezrobocia w powiatach województwa kujawsko-pomorskiego

Powiat	Model MESS			Model regresji liniowej		
	Efekt			Efekt		
	Łączny	Inwest.	Podm.	Łączny	Inwest.	Podm.
Aleksandrowski	-0,192	-0,107	-0,085	0,000	0,000	0,000
Brodnicki	-0,021	-0,012	-0,009	0,000	0,000	0,000
Bydgoski	-0,133	-0,074	-0,059	0,000	0,000	0,000
Chełmiński	-0,186	-0,104	-0,083	0,000	0,000	0,000
Golubsko-dobrzyński	-0,196	-0,109	-0,087	0,000	0,000	0,000
Grudziądzki	-0,018	-0,010	-0,008	0,000	0,000	0,000
Inowrocławski	-0,146	-0,081	-0,065	0,000	0,000	0,000
Lipnowski	-0,134	-0,074	-0,059	0,000	0,000	0,000
Mogileński	-0,012	-0,007	-0,005	0,000	0,000	0,000
Nakielski	-0,032	-0,018	-0,014	0,000	0,000	0,000
Radziejowski	-0,025	-0,014	-0,011	0,000	0,000	0,000
Rypiński	-0,025	-0,014	-0,011	0,000	0,000	0,000
Sępoleński	-0,024	-0,013	-0,011	0,000	0,000	0,000
Świecki	-0,028	-0,016	-0,012	0,000	0,000	0,000
Toruński	-0,170	-0,095	-0,076	0,000	0,000	0,000
Tucholski	-0,031	-0,017	-0,014	0,000	0,000	0,000
Wąbrzeski	-0,198	-0,110	-0,088	0,000	0,000	0,000
Włocławski	-0,016	-0,009	-0,007	0,000	0,000	0,000
Żniński	-0,034	-0,019	-0,015	0,000	0,000	0,000
Bydgoszcz	-0,364	-0,203	-0,162	0,000	0,000	0,000
Grudziądz	-0,005	-0,003	-0,002	0,000	0,000	0,000
Toruń	-1,381	-0,768	-0,613	-1,593	-0,860	-0,733
Włocławek	-0,025	-0,014	-0,011	0,000	0,000	0,000

Źródło: opracowanie własne.

Można zauważyć, że model klasycznej regresji nie uwzględnia istnienia zależności przestrzennych. Nie dość, że pomija on oczywisty wpływ bodźców działających w jednym powiecie na bezrobocie w innych powiatach, to jeszcze przecenia ich wpływ na poziom bezrobocia w miejscu działania.

Niedoskonałość modelu regresji jest jeszcze bardziej widoczna, gdy rozważymy taki sam wzrost wartości zmiennych objaśniających w dwóch głównych ośrodkach rozwoju regionu, Bydgoszczy i Toruniu, które geograficznie leżą w niedalekiej odległości. Sytuację tę przedstawia tabela 9.

Tab. 9. Wpływ zmiany poziomu inwestycji oraz ilości podmiotów gospodarczych w Bydgoszczy i w Toruniu na stopę bezrobocia w powiatach województwa kujawsko-pomorskiego

Powiat	Model MESS			Model regresji liniowej		
	Efekt			Efekt		
	Łączny	Inwest.	Podm.	Łączny	Inwest.	Podm.
Aleksandrowski	-0,243	-0,135	-0,108	0,000	0,000	0,000
Brodnicki	-0,025	-0,014	-0,011	0,000	0,000	0,000
Bydgoski	-0,297	-0,165	-0,132	0,000	0,000	0,000
Chełmiński	-0,379	-0,211	-0,168	0,000	0,000	0,000
Golubsko-dobrzyński	-0,240	-0,133	-0,106	0,000	0,000	0,000
Grudziądzki	-0,035	-0,019	-0,015	0,000	0,000	0,000
Inowrocławski	-0,298	-0,166	-0,132	0,000	0,000	0,000
Lipnowski	-0,163	-0,091	-0,073	0,000	0,000	0,000
Mogileński	-0,035	-0,019	-0,015	0,000	0,000	0,000
Nakielski	-0,226	-0,126	-0,100	0,000	0,000	0,000
Radziejowski	-0,038	-0,021	-0,017	0,000	0,000	0,000
Rypiński	-0,028	-0,016	-0,013	0,000	0,000	0,000
Sępoleński	-0,174	-0,097	-0,077	0,000	0,000	0,000
Świecki	-0,161	-0,090	-0,072	0,000	0,000	0,000
Toruński	-0,326	-0,181	-0,144	0,000	0,000	0,000
Tucholski	-0,224	-0,125	-0,099	0,000	0,000	0,000
Wąbrzeski	-0,252	-0,140	-0,112	0,000	0,000	0,000
Włocławski	-0,019	-0,010	-0,008	0,000	0,000	0,000
Żniński	-0,202	-0,112	-0,090	0,000	0,000	0,000
Bydgoszcz	-1,750	-0,973	-0,777	-1,593	-0,860	-0,733
Grudziądz	-0,030	-0,017	-0,013	0,000	0,000	0,000
Toruń	-1,904	-1,059	-0,845	-1,593	-0,860	-0,733
Włocławek	-0,029	-0,016	-0,013	0,000	0,000	0,000

Źródło: opracowanie własne.

Gdy wzrost zmiennych objaśniających dotyczył tylko jednego ośrodka rozwoju (tabela 8), wywołany przez niego efekt był mniejszy niż wynikający z regresji liniowej. Gdy natomiast wzrost dotyczył dwóch ośrodków położonych w niedalekiej odległości (tabela 9) wpływ zmian był większy niż szacowany zwykłą regresją. Bodźce działające w powiązanych ze sobą ośrodkach mają większy efekt, niż gdyby tych powiązań nie było. Zjawisko to zostało dobrze odzwierciedlone w modelu MESS, natomiast nie odzwierciedlił go model regresji.

Oba rozważane przykłady wskazują również na ostrożność przy interpretacji parametrów przy zmiennych objaśniających w modelu MESS. Efekt zmian np. zmiennej X_1 nie jest mierzony jedynie parametrem β_1, ma na niego również wpływ siła powiązań między jednostkami przestrzennymi.

Kolejnym rozważanym zagadnieniem jest porównanie modelu MESS z modelem SAR. Podczas estymacji modelu SAR, analogicznie jak dla modelu MESS, okazało się, że istotny jest tylko trend liniowy. Ostatecznie model ten przyjął postać:

$$\mathbf{Y} = \rho\mathbf{W}\mathbf{Y} + \gamma_{00} + \gamma_{10}\mathbf{x} + \gamma_{01}\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}_1\mathbf{X}_1 + \boldsymbol{\beta}_2\mathbf{X}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (13)$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2\mathbf{I}).$$

W tabeli 10 zamieszczono wyniki estymacji parametrów modelu SAR, natomiast jakość dopasowania przedstawia tabela 11.

Tab. 10. Wyniki estymacji modelu SAR dla stopy bezrobocia

Parametry	Oceny	Statystyka t	*P*-value
ρ	0,639	14,412	2,22E-16
γ_{00}	11,416	7,338	2,167E-13
γ_{10}	-0,427	-2,934	0,003
γ_{01}	0,420	2,825	0,005
β_1	-0,677	-6,1520	7,651E-10
β_2	-0,553	-5,572	2,509E-08

Źródło: opracowanie własne.

Tab. 11. Własności reszt modelu SAR dla stopy bezrobocia

R^2	I	$(I-E(I))/S(I)$	*P*-value
0,572	0,013	0,467	0,320

Źródło: opracowanie własne.

Zarówno w modelu MESS jak i w modelu SAR parametry przy trendzie przestrzennym oraz przy zmiennych objaśniających są na podobnym poziomie. Różnica występuje natomiast w parametrach odpowiedzialnych za autozależność przestrzenną. Związek pomiędzy tymi parametrem α modelu MESS a parametrem ρ modelu SAR powinien być w przybliżeniu równy[6]

$$\rho \approx 1 - e^{\alpha}. \quad (14)$$

Z zależności (14) wynika wartość parametru autoregresji ρ na poziomie 0,53 zamiast otrzymanej na poziomie 0,63. Ponieważ dopasowanie modelu SAR jest lepsze niż modelu MESS, oznacza to, że w rozważanym przypadku model MESS nie doszacował autozależności i model SAR lepiej opisuje zależności przestrzenne.

6. WNIOSKI

Przeprowadzone badania wykazały skuteczność modelu MESS jako narzędzia analiz zjawisk charakteryzujących się autozależnością przestrzenną. Jakość dopasowania modelu, gorsza niż dla modelu SAR, wskazuje jednak na ostrożność przy jego stosowaniu. Mimo to, łatwość estymacji modelu MESS może mieć duże znaczenie, gdy analizie poddawana będzie większa liczba danych. Taka sytuacja może mieć miejsce, gdy autorzy rozważą dane w układzie przestrzenno-czasowym, co będzie stanowiło dalszy kierunek ich badań.

[6] Por. J.P. LeSage, R.P. Pace, [2007].

LITERATURA

Chiu, Y.M., Leonard T., Tsui K., [1996], *The Matrix-Logarithmic Covariance Model*, Journal of Computational and Graphical Statistics, 15, s. 1-17.

LeSage J.P., Pace R.P., [2007], *A Matrix Exponentials Spatial Specifications*, Journal of Econometrics, 140:1, s. 190-214.

LeSage J.P., Pace R.P., [2009], *Introduction to Spatial Econometrics*, CRC Press.

Szulc, E., [2007], *Ekonometryczna analiza wielowymiarowych procesów gospodarczych*, Wydawnictwo UMK, Toruń 2007.

SPATIAL MATRIX EXPONENTIAL MODEL OF THE UNEMPLOYMENT RATE IN POLAND

J. P. LeSage and R. K. Pace have proposed Matrix Exponential Model (MESS) in 2007. A spatial autoregressive process, in the conventional specification, has been replaced by a matrix exponential transformation connected with a spatial weight matrix. This alternative has a computational advantage.

The article will present an analysis of the unemployment rate in Poland in 2007 by means of MESS. Spatial approach to modeling of this process will be justified by previous research of the spatial autocorrelation. A connection between the unemployment and other economic processes will be examined in order to construct a hypothetical model.

Finally, MESS and regression model will be compared. The confrontation of the results will show that spatial dependence should be taken into consideration in the analysis of economic processes.