ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LIII.1 (1991)

Sur une forme de familles de fonctions commutatives

par ZENON MOSZNER (Kraków)

Résumé. En généralisant un théorème de J. Aczél et A. D. Wallace [1] on démontre des conditions suffisantes et des conditions nécessaires pour qu'une famille de fonctions commutatives soit de la forme (3). On donne aussi des exemples de familles des fonctions commutatives qui ne sont pas de cette forme. En particulier on considère des familles qui sont les solutions de l'équation de translation.

J. Aczél et A. D. Wallace ont démontré dans [1] le théorème suivant: Si $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$, où T et X sont des ensembles arbitraires, est une famille des fonctions $tx\colon T\times X\to X$ telles que

(1) $$\forall t,\ t'\in T\ \forall x\in X\colon\quad t(t'x)=t'(tx)$$

(les fonctions de cette famille seront dites *commutatives*) et

(2) $$\exists a\in X\ \forall x\in X\ \exists t\in T\colon\quad ta=x,$$

dans ce cas X forme un demi-groupe commutatif par rapport à une opération "$*$": $X\times X\to X$ avec l'élément neutre a et tel que

(3) $$\forall t\in T\ \forall x\in X\colon\quad tx=(ta)*x.$$

L'implication (3) $\Rightarrow$ (1) a aussi lieu.

J. Aczél m'a posé le problème de généraliser ce théorème. Dans cette note je donne quelques remarques à ce sujet, en particulier une réponse partielle à ce problème.

I. Remarques préliminaires

1. La famille des fonctions $\{tx\}_{x\in X, t\in T}$, où $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $T=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, données par la table suivante:

$t \backslash x$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	0	4	3
2	2	0	1	3	4
3	0	1	2	4	3
4	1	2	0	3	4
5	2	0	1	4	3

est l'exemple des fonctions de X dans X, commutatives, puisque la fonction tx est une solution de l'équation de translation $t_1(t_2x) = (t_2 \square t_1)x$, où $\square$ désigne l'addition modulo 6, qui ne sont pas de la forme (3). La raison en est la suivante: dans cette famille nous avons 6 fonctions différentes et dans X nous avons seulement 5 éléments, donc nous avons seulement au plus 5 translations à gauche différentes. De plus cette famille pour la même raison ne peut pas être de la forme $g(t)*x$, où g est une fonction de T dans X (remarquons que les fonctions de cette forme sont commutatives).

2. Il existe des familles de fonctions commutatives qui ne remplissent pas la condition (2) et qui sont de la forme (3) (la condition (2) est donc suffisante pour que la fonction soit de cette forme, mais elle n'est pas nécessaire). Telle est par exemple la famille qui a seulement une fonction constant ($f(x) = b$) sur un ensemble X qui a plus d'un point. En effet, soit $*$ une opération sur $X \setminus \{b\}$ telle que $(X \setminus \{b\}, *)$ forme un groupe abélien et posons $b*x = x*b = b$ pour chaque x de X. Dans ce cas $(X, *)$ forme un demi-groupe commutatif et de plus $b = f(x) = b*x$.

3. La condition nécessaire pour que la famille $\{tx\}$ soit de la forme (3) est qu'il existe un a dans X tel que la puissance de l'ensemble $\{ta|\ t \in T\}$ soit supérieure ou égale à la puissance de l'ensemble des fonctions de la famille $\{tx\}$. Cette condition n'est pas satisfaite pour les fonctions dans la table ci-dessus. Elle n'est pas satisfaite non plus si $T = \{0, 1, 3\}$ pour les fonctions de cette table (ici nous avons 3 fonctions différentes et la puissance de chaque ensemble $\{ta|\ t \in \{0, 1, 3\}\}$ pour a arbitraire de $X = \{0, 1, 3, 4\}$ est égale à 2). Dans ce cas il y a moins de fonctions que d'éléments dans X, contrairement à ce qui a lieu pour la table complète.

4. On voit facilement que les fonctions $tx = g(t) \square x$, où $g\colon T \to X$ est une fonction arbitraire et $\square$ est une opération sur $X \times X$ commutative et associative, forment une famille commutative. On peut se passer du fait que cette famille n'est pas de la forme (3) pour une opération $*$. En effet, posons $T = X = \boldsymbol{R}$ et $tx = \min(t, x)$. Si $x \square y := \min(x, y)$ nous avons $tx = t \square x$. Supposons qu'il existait un a de X et une opération $*$ associative tels que $tx = (ta)*x$, c'est-à-dire $t*x = (t*a) \square x$, d'où $\min(t, x) = \min(t, a) \square x$. Il en résulte alors que

$$a = \min(a, a+1) = \min(a, a) \square (a+1) = \min(a+2, a) \square (a+1)$$
$$= \min(a+2, a+1) = a+1,$$

donc une contradiction.

La forme $g(t) \square x$ est donc plus générale que $(ta)*x$ pour la famille des fonctions commutatives, mais ce n'est pas la forme la plus générale.

5. La famille des fonctions $\{tx\}_{t \in T, x \in X}$ satisfaisant à (1) est de la forme (3) si et seulement si cette famille peut se prolonger en une famille $\{tx\}_{t \in T', x \in X}$, où

$T \subset T'$, telle que (1) et (2) sont satisfaites pour T' au lieu de T; ainsi la condition (2) est en un certain sens nécessaire pour que la famille $\{tx\}$ soit de la forme exigée (cette condition est naturellement suffisante d'après [1]). La démonstration du fait que la condition est suffisante est évidente. Pour démontrer qu'elle est nécessaire supposons que (3) ait lieu et soit $X' = X \setminus \{ta|\ t \in T\}$. On peut naturellement supposer que $X' \cap T = \emptyset$. Posons $T' = T \cup X'$ et

$$t'x = \begin{cases} tx & \text{pour } t' = t \in T \text{ et } x \in X, \\ t' * x & \text{pour } t' \in X' \text{ et } x \in X. \end{cases}$$

On peut facilement vérifier que la famille $\{t'x\}_{t' \in T', x \in X}$ est un prolongement de $\{tx\}_{t \in T, x \in X}$ vérifiant (1) et (2).

6. Il résulte de la remarque précédente qu'on peut remplacer la condition (2) dans le théorème de J. Aczél et A. D. Wallace cité plus haut par la condition

$$\exists a \in X \ \forall y \in X \ \exists t_1, \ldots, t_k \in T: \quad t_1(t_2(\ldots t_k a)) = y. \tag{4}$$

La condition (4) est plus faible que (2) comme le montre l'exemple suivant. Soit $X = \boldsymbol{Z}$ (l'ensemble des nombres entiers), $T = \{-1, 1\}$ et considérons la famille des deux fonctions $\{x+1, x-1\}_{x \in \boldsymbol{Z}}$. Dans ce cas (2) n'est pas satisfaite et (4) a lieu.

II. Cas où T forme un groupe. Passons maintenant au cas où T forme un groupe par rapport à l'opération "$+$" et

$$\forall t, t' \in T \ \forall x \in X: \quad t(t'x) = (t'+t)x. \tag{5}$$

Nous allons prouver le

THÉORÈME 1. *Si la famille des fonctions $\{tx\}_{t \in T, x \in X}$, où T forme un groupe avec notation additive, est telle que* (1) *et* (5) *ont lieu et*

$$\forall x, y \in X \ \exists t \in T: \quad \big(T_x \subset t + T_y + (-t) \ \textit{ou} \ T_y \subset t + T_x + (-t)\big), \tag{6}$$

où $T_x = \{t \in T|\ tx = x\}$ pour $x \in X^* = TX = \{tx|\ t \in T$ et $x \in X\}$, et

$$\exists x' \in X \ \forall x \in X: \quad (T_{x'} \subset T_x), \tag{7}$$

alors (3) *a lieu.*

Démonstration. Sous notre hypothèse nous avons (voir [5])

$$tx = g_k^{-1}\big(g_k(f(x)) + t\big) \qquad \text{pour } f(x) \in X_k, \tag{8}$$

où f: $X \to X$ est une fonction telle que $f(f(x)) = f(x)$, $f(X) = \bigcup_{k \in K} X_k$ est une décomposition de $f(X)$ en sous-ensembles X_k (appelées *fibres transitives*), non-vides, disjoints et tels que pour chaque k de K il existe un sous-groupe T_k de T (nommé *sous-groupe de stabilité*) tel que la puissance de la famille T/T_k des classes d'équivalence à droit de T par rapport à T_k soit égale à la puissance de X_k et g_k est une bijection de X_k à T/T_k. De plus on sait que la famille $\{t+T_k+(-t)\}_{k\in K, t\in T}$ est la même que la famille $\{T_x\}_{x\in X}$ (voir [5]). On peut écrire (8) aussi sous la forme

$$tx = g^{-1}\big(g(f(x))+t\big),$$

où $g(y) = g_k(y)$ pour y de X_k.

Supposons d'abord que le groupe T soit abélien. Posons pour x, y de X

$$x * y = g^{-1}\big(g(f(x))+g(f(y))\big) = g^{-1}\big(\{t+t' \mid t\in g(f(x)) \text{ et } t'\in g(f(y))\}\big).$$

L'opération $*$ est bien définie, puisque si $f(x)\in X_k$, $f(y)\in X_p$ alors $g(f(x))\in T/T_k$, $g(f(y))\in T/T_p$ et d'aprés (2), $T_k \subset T_p$ ou $T_p \subset T_k$. Supposons par exemple que $T_k \subset T_p$. Dans ce cas il résulte de la commutativité de T que $g(f(x))+g(f(y))\in T/T_p$, donc $g^{-1}\big(g(f(x))+g(f(y))\big)$ est bien définie et est un élément de X_p. L'opération $*$ est évidemment commutative. On peut démontrer facilement qu'elle est aussi associative.

Soit p tel que $T_p = T_x$, et soit a tel que $g_p(a) = T_p$. Nous avons $a\in X_p$ et par suite $f(ta) = ta$. De plus pour $f(x)$ dans X_k,

$$\begin{aligned} x*(ta) &= g^{-1}\big(g(f(x))+g(f(ta))\big) \\ &= g_k^{-1}\{g_k(f(x))+g_p[g_p^{-1}(g_k(f(a))+t)]\} = g_k^{-1}\{g_k(f(x))+g_p(a)+t\} \\ &= g_k^{-1}\{g_k(f(x))+T_p+t\} = g_k^{-1}\{g_k(f(x))+t\} = tx, \end{aligned}$$

puisque d'après (7), $T_p \subset T_k$, ce qui termine la démonstration du théorème 1 pour T abélien.

Passons maintenant au cas où le groupe T n'est pas nécessairement abélien. On sait [2] que le groupe quotient T/N doit être dans ce cas abélien, où $N = \{t\in T \mid \forall x\in X\colon tx = x\}$. On voit facilement que $N \subset T_x$ pour chaque x de X. En désignant par $[t]$ l'élément de T/N et $[t]x := tx$, nous constatons d'après (8) que la fonction $[t]x$ est bien définie et que la famille $\{[t]x\}_{[t]\in T/N, x\in X}$ satisfait aux conditions

$$[t]([t']x) = [t']([t]x) \quad \text{et} \quad [t]([t']x) = ([t']+[t])x.$$

Si les conditions (6) et (7) sont satisfaites, la famille $\{[t]x\}_{[t]\in T/N, x\in X}$ remplit aussi les conditions (6) et (7) et par suite d'après la première partie de la démonstration la condition (3) a lieu pour cette famille, c'est-à-dire il existe un a de X et une opération $*$ tels que $[t]x = ([t]a)*x$. Il en résulte que

$$tx = [t]x = ([t]a)*x = (ta)*x,$$

donc (3) a lieu aussi pour la famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$. ∎

Remarques

7. Si dans (8) la puissance de K est égale à 1, c'est-à-dire si

$$\forall x, y\in X^* \ \exists t\in T\colon \quad tx = y,$$

alors les hypothèses du théorème 1 sont remplies. La condition (2) n'est pas nécessairement remplie dans ce cas.

8. On peut construire facilement des familles des fonctions qui remplissent les hypothèses du théorème 1, en ne remplissant pas la condition (2).

Nous démontrerons le

THÉORÈME 2. *Si pour la famille* $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$, *où* T *forme un groupe, les conditions* (1), (5), (7) *sont satisfaites et*

$$\exists x^* \in X\colon \quad T_{x^*} = T, \tag{9}$$

c'est-à-dire

$$\exists x^* \in X\colon \quad \{t \in T \mid tx^* = x^*\} = T \tag{9'}$$

(x^* *est le point fixe de chaque fonction* tx), *alors la propriété* (3) *est satisfaite.*

Démonstration. Supposons d'abord que T soit abélien.

En reprenant les notations de la démonstration du théorème 1 posons pour x, y de X

$$x*y = \begin{cases} g^{-1}\big(g(f(x))+g(f(y))\big) & \text{si } f(x)\in X_p \text{ ou } f(y)\in X_p, \\ x^* & \text{si } f(x)\notin X_p \text{ et } f(y)\notin X_p. \end{cases}$$

On peut montrer comme dans la démonstration du théorème 1 que l'opération $*$ est bien définie et qu'il existe un a de X_p tel que $tx = (ta)*x$. De plus l'opération $*$ est commutative. Nous allons démontrer qu'elle est associative.

Soient x, y, z de X; notons $G = (x*y)*z$, $D = x*(y*z)$ et considérons les cas suivants.

(α) $f(x), f(y), f(z) \in X_p$; dans ce cas

$$\begin{aligned} G &= g^{-1}\{g[f(g^{-1}(g(f(x))+g(f(y))))]+g(f(z))\} \\ &= g^{-1}\{g(f(x))+g(f(y))+g(f(z))\} \\ &= g^{-1}\{g(f(x))+g[f(g^{-1}(g(f(y))+g(f(z))))]\} = D, \end{aligned}$$

puisque $f_{|TX} = \mathrm{id}_{|TX}$.

(β) $f(x)\notin X_p$, $f(y), f(z)\in X_p$; nous sommes alors dans la même situation que ci-dessus, puisque

$$f(y*z) = f[g^{-1}(g(f(y))+g(f(z)))] = y*z \in X_p.$$

(γ) $f(x), f(z)\in X_p$, $f(y)\notin X_p$; situation analogue à (α).

(δ) $f(x), f(y)\in X_p$, $f(z)\notin X_p$; situation analogue à (α) puisque $f(x*y)\in X_p$.

(ε) $f(x)\in X_p$, $f(y)$, $f(z)\notin X_p$; dans ce cas soit $f(y)\in X_k$ $(\neq X_p)$, donc $x*y\in X_k$ et par suite $f(x*y) = x*y\notin X_p$. Il en résulte que $G = x^*$. De plus $y*z = x^*$ et il existe un t de T tel que $ta = f(x)$, donc d'après (9)

$$\begin{aligned} D = x*x^* &= g^{-1}\big(g(f(x))+g(f(x^*))\big) = g^{-1}\big(g(f(f(x)))+g(f(x^*))\big) \\ &= f(x)*x^* = (ta)*x^* = tx^* = x^*. \end{aligned}$$

(ζ) $f(x), f(z) \notin X_p, f(y) \in X_p$; dans ce cas nous avons, comme dans le cas (ε), $f(x*y) \notin X_p$, donc $G = x^*$. Pour la même raison $f(y*z) \notin X_p$, donc $D = x^*$.

(η) $f(x), f(y) \notin X_p$, $f(z) \in X_p$; dans ce cas d'après (ε)

$$(x*y)*z = z*(x*y) = z*(y*x) = (z*y)*x = x*(z*y) = x*(y*z).$$

(υ) $f(x)$, $f(y)$, $f(z) \notin X_p$; d'où $G = x^* = D$.

L'associativité de $*$ est vérifiée et la démonstration du théorème 2 dans le cas où T est abélien est donc terminée.

La démonstration dans le cas où T n'est pas nécessairement abélien est analogue à la fin de la démonstration du théorème 1.

9. Remarque. Les domaines d'application des conditions (6) et (9) se rencontrent, même sous l'hypothèse (7), donc aucune d'elles n'est nécessaire pour que la famille $\{tx\}$ soit de la forme (3).

Nous allons donner un exemple d'application du théorème 2. Pour une famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$ remplissant (5) et (7), la famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X\cup\{x'\}}$, où $x' \notin X$ et $tx' = x'$ pour chaque t de T et qui de plus est un prolongement de la famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$, remplit les conditions (5), (7) et (9), donc elle est de la forme (3).

Nous avons le

Théorème 3. *Si la famille des fonctions $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$, où T forme un groupe, est telle que* (3) *et* (5) *ont lieu, alors* (7) *est vérifiée.*

Démonstration. Nous avons d'après (3)

$$\forall t, t' \in T\colon\ [ta = t'a \Rightarrow \forall x \in X\colon (tx = t'x)],$$

c'est-à-dire tx est disjointe au point a. Il en résulte d'après [7] que pour tx de la forme (8),

$$T_p = N := \bigcap_{k\in K} \bigcap_{t\in T} [t + T_k + (-t)] \quad \text{pour } f(a) \in X_p.$$

De là $T_p \subset t + T_k + (-t)$ pour tout k de K et puisque les familles $\{t + T_k + (-t)\}_{k\in K, t\in T}$ et $\{T_x\}_{x\in X}$ sont idéntiques, nous avons (7). ∎

Voici les exemples d'application des théorèmes démontrés.

Soit $X \subset \boldsymbol{R}$ et $T = (\boldsymbol{R}, +)$. Si une solution $tx\colon X \times T \to X$ de l'équation de translation (5) est continue par rapport à t pour chaque x de X (la topologie dans X et T est simple), alors elle est de la forme (3). Pour prouver cela nous allons démontrer que chaque sous-groupe de stabilité de la solution tx, qui n'est pas de la forme $\{0\}$, doit être égal à $\boldsymbol{R}$. En effet, soit x_0 de X et $t_0 \neq 0$ de T tels que $t_0 x_0 = x_0$. Ainsi $0x_0 = 0(t_0 x_0) = (0 + t_0)x_0 = t_0 x_0 = x_0$ et puisque la fonction tx_0 est continue il existe t_1 et t_2 tels que la différence $t_1 - t_2$ soit arbitrairement petite et $t_1 x_0 = t_2 x_0$. On a

$$[t + (-t_2 + t_1)]x_0 = (t - t_2)(t_1 x_0) = (t - t_2)(t_2 x_0) = \{t - t_2 + t_2\}x_0 = tx_0,$$

donc la fonction continue tx_0 a une période arbitrairement petite, alors cette fonction tx_0 doit être stable. Il en résulte que $tx_0 = x_0$ pour chaque t de T, donc le sous-groupe de stabilité de x_0 est égal à $\boldsymbol{R}$. Les groupes de stabilité de tx forment donc une chaîne, les hypothèses du théorème 1 sont remplies, donc la fonction tx doit avoir la forme (3).

Remarquons que l'hypothèse que tx est continue par rapport à x pour chaque t de T ne suffit pas ici, même si $X = \boldsymbol{R}$. Nous allons construire un exemple pour le montrer. Soit $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ les fonctions additives, qui ont seulement les valeurs rationnelles et pour lesquelles on a ni $N_1 = \{t \in \boldsymbol{R} | \varphi(t) = 0\} \subset N_2 = \{t \in \boldsymbol{R} | \psi(t) = 0\}$ ni $N_2 \subset N_1$ et posons

$$tx = \begin{cases} \varphi(t) + x & \text{si } x \text{ est rationnel,} \\ \psi(t) + x & \text{si } x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

On voit facilement que la fonction tx satisfait à l'équation (5) et que les sous-groupes de stabilité de cette solution sont les ensembles N_1 et N_2. Il en résulte qu'il n'existe pas de groupe de stabilité minimal, donc d'après la théorème 3 la famille $\{tx\}_{t \in T, x \in X}$ ne peut pas être de la forme (3).

En liaison avec le théorème 3 se pose le problème si l'existence d'un sous-groupe de stabilité minimal, c'est-à-dire la propriété (7), suffit pour que la famille $\{tx\}_{t \in T, x \in X}$ soit de la forme (3)? La réponse est négative. En effet, $T = \{1, 2, 3, 4\}$ avec l'opération "+" donée par la table ci-dessous forme un groupe (le groupe de Klein d'ordre 4)

+	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

avec $T_1 = \{1, 2\}$ et $T_2 = \{1, 3\}$ comme sous-groupes. Posons dans la suite $X_1 = T$, $X_2 = \{5, 6\}$, $X_3 = \{7, 8\}$, $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, $f = \mathrm{id}_{|X}$, $g_{|X_1} = \mathrm{id}_{|X_1}$, $g(5) = T_1$, $g(6) = \{3, 4\}$, $g(7) = T_2$, $g(8) = \{2, 4\}$ et $tx = g^{-1}(g(x) + t)$ pour t dans T et x dans X. Puisque la fonction tx est de la forme (8) et que le groupe T est abélien, (1) et (5) sont vérifiées. Les sous-groupes de stabilité sont les sous-groupes $\{1\}$, T_1, T_2, donc il existe un sous-groupe de stabilité minimal. Supposons qu'il existe un a de X et une opération $*$ associative et commutative sur $X \times X$ tels que (3) ait lieu. Il résulte de la démonstration du théorème 3 que a doit appartenir à la fibre transitive correspondant au sous-groupe de stabilité minimal, c'est-à-dire $a \in X_1$. La relation $(ta) * x = tx$ pour t dans T et x dans X avec la commutativité de $*$ nous donne la forme de $*$ sur $(X_1 \times X) \cup (X \times X_1)$. Par exemple pour $a = 1$ on a $2 = 2 + 1 = 21$ (c'est-à-dire tx pour $t = 2$ et $x = 1$), d'où

$$2 * 6 = (21) * 6 = 26 = g^{-1}(g(6) + 2) = g^{-1}(\{3, 4\} + 2) = g^{-1}(\{3, 4\}) = 6.$$

Pour $a = 1$ nous obtenons par cette méthode la table suivante pour l'opération $*$:

$*$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	4	3	5	6	8	7
3	3	4	1	2	6	5	7	8
4	4	3	2	1	6	5	8	7
5	5	5	6	6				
6	6	6	5	5				
7	7	8	7	8				
8	8	7	8	7				

D'après l'hypothèse faite cette table doit être prolongeable à l'opération $*$ sur $X \times X$ commutative et associative. Nous allons montrer que cela nous donne une contradiction. En effet, nous aurions

$$\begin{aligned} 5*7 &= (3*6)*(3*7) = (3*3)*(6*7) = 1*(6*7) = 6*7 = (2*6)*(2*8) \\ &= (2*2)*(6*8) = 1*(6*8) = 6*8 = (3*5)*(3*8) \\ &= (3*3)*(5*8) = 1*(5*8) = 5*8, \end{aligned}$$

donc

$$5*7 = 6*7 = 6*8 = 5*8.$$

D'après la table nous avons l'implication

$$\forall x \in X\colon\ 2*x = x \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = 6.$$

Il en résulte puisque

$$2*(5*7) = (2*5)*7 = 5*7$$

que

$$5*7 = 5 \text{ ou } 5*7 = 6.$$

Dans le premier cas

$$5 = 5*7 = 6*8 = (4*5)*8 = 4*(5*8) = 4*(5*7) = 4*5 = 6,$$

ce qui est contradictoire.

Dans le deuxième cas

$$6 = 5*7 = 6*7 = (4*5)*7 = 4*(5*7) = 4*6 = 5,$$

donc là aussi une contradiction. Cette dernière table et les contradictions ci-dessus sont données par A. Grząślewicz.

Soit a un des nombres 2, 3, 4 et désignons par σ la permutation de l'ensemble X tel que $\sigma(1) = a$, $\sigma(a) = 1$, σ change les éléments de l'ensemble $\mathfrak{X}\setminus\{1, a\}$ et $\sigma_{|x_2 \cup x_3} = \mathrm{id}_{|x_2 \cup x_3}$. Si nous écrivons de la même manière les tables pour l'opération $*$ et pour $a = 2, 3, 4$ et si nous posons $x \# y = \sigma^{-1}(\sigma(x)*\sigma(y))$ nous obtenons pour l'opération $\#$ encore une fois la table précédente. Puisque l'opération $\#$ n'est pas prolongeable en une opération associative et commutative sur $X \times X$ tout entier, l'opération $*$ est la même que l'opération $\#$. Ceci achève la démonstration que notre famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$ ne peut pas être de la forme (3) avec l'opération $*$ associative et commutative sur $X \times X$ tout entier.

Remarquons encore que si nous avons pour T abélien un sous-groupe T_{k_0} de stabilité minimal, nous pouvons définir par $x \# y = g^{-1}(g(f(x)) + g(f(y)))$ l'opération binaire $\#$: $(X_{k_0} \times X) \cup (X \times X_{k_0}) \to X$ qui est commutative, associative dans ce sens que si les expressions $(x \# y) \# z$ et $x \# (y \# z)$ sont définies on a $(x \# y) \# z = x \# (y \# z)$ et (3) est satisfaite. Notre problème de l'existence de l'opération $*$ associative et commutative sur $X \times X$ et satisfaisant à (3) est donc équivalent au problème du prolongement de notre opération $\#$ à cette opération $*$. Comme nous l'avons vu plus haut ce prolongement n'est pas toujours possible, donc il serait intéressant de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de ce prolongement.

Nous avons aussi le

THÉORÈME 4. *Pour une famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$ satisfaisant à* (5), *les conditions* (3) *et*

(10) *il existe h: $T \to X^* = TX$ et une opération $*$ associative et commutative telles que*

$$tx = h(t) * x, \tag{11}$$

sont équivalentes.

Il suffit de montrer que (10) $\Rightarrow$ (3). Soit e l'élément neutre de T. Nous avons $h(e) * tx = e(tx) = (e+t)x = tx$ et donc $h(t) = h(e) * h(t) = h(t) * h(e) = th(e)$. ∎

Faisons encore les trois remarques suivantes.

10. On peut se passer du fait que les familles $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$ et $\{tx\}_{t\in T, x\in X'}$ sont de la forme (3), mais la famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X\cup X'}$ n'est même pas de la forme (11). Cela donne un exemple de famille dans la table, puisque si nous prenons $X = \{0, 1, 2\}$ et $X' = \{3, 4\}$, les familles transitives sont de la forme (3) et la famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X\cup X'}$, comme nous le savons, n'est pas de la forme (11).

11. On peut se passer aussi du fait que la famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X\cup X'}$ est de la forme (3), même si la famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$ n'est pas de la forme (11). En effet, soit T un groupe tel qu'il existe une chaine de sous-groupes T_n telle qu'il n'existe pas dans cette chaîne de sous-groupe minimal par rapport à l'inclusion. Par exemple soit $T = (\mathbf{R}, +)$, $\{b'_n\}$ une suite d'éléments différents de la base de Hamel H de T et

$$T_n := \{w_1 b_1 + \ldots + w_k b_k | \ w_\nu \in Q, \ b_\nu \in H, \ b_\nu \in \{b'_1, \ldots, b'_n\}\}.$$

Soit à présent X'_n un ensemble dont la puissance est égale à l'indice de T_n et tel que les X'_n sont disjoints pour $n = 1, 2, \ldots$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X'_n$ et soit X' un ensemble de la puissance du continu disjoint de X. Dans ce cas nous pouvons construire une famille de fonctions $\{tx\}_{t\in T, x\in X\cup X'}$ qui satisfait à (5) et qui a pour sous-groupes de stabilité $\{0\}$, T_1, T_2, ... et pour fibres transitives les ensembles X', X'_1, X'_2, ... Cette famille est de la forme (3) d'après le théorème 1 et la famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$ n'est pas de la forme (11), puisque dans le cas contraire elle devrait être de la forme (3) (d'après le théorème 4) et dans ce cas d'après le théorème 3 la condition (7) devrait être remplie pour la chaîne $\{T_n\}$.

En ajoutant dans l'exemple ci-dessus aux groupes de stabilité le groupe T tout entier et aux fibres transitives un ensemble E n'ayant qu'un point et disjoint de $X'\cup X$, nous obtenons une famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X\cup E\cup X'}$, satisfaisant à (5), (6), (7), (9), donc ayant la forme (3), pour laquelle la famille $\{tx\}_{t\in T, x\in X\cup E}$ satisfait aux conditions (5), (6), (9), en ne vérifiant pas de la condition (7), donc n'ayant pas la forme (3).

12. Si $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$ est de la forme (3) (ou (11)) alors $\{tx\}_{t\in T'\subseteq T, x\in X}$ est naturellement aussi de cette forme. L'inverse n'a pas lieu. En effet, pour la démonstration il suffit de considérer la famille de la table et de prendre $T' = \{0\}$, l'addition mod 5 pour $*$ et $a = 0$.

III. Cas de l'ensemble T arbitraire. On peut généraliser les théorèmes 1–3 pour T arbitraire sous l'hypothèse (1). Dans l'ensemble de toutes les suites $(t_1, \ldots, t_n)$ de n éléments de T pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ (pour $n = 0$ nous avons la suite vide, désignée par 0, et nous posons $0x = x$ pour chaque x de X) considérons la relation ϱ définie de la manière suivante:

$(t_1, \ldots, t_n)\, \varrho\, (t'_1, \ldots, t'_n)$ si et seulement s'il existe une permutation σ de $(1, \ldots, n)$ telle que $t'_\nu = t_{\sigma(\nu)}$ pour ν de $\{1, \ldots, n\}$

et désignons par $M(T)$ la famille des classes d'équivalence de cette relation. Posons $\tau x = t_1 \ldots t_n x$ pour x de X et $(t_1, \ldots, t_n)\in\tau$. La fonction τx est bien définie sur $M(T)\times X$ d'après l'hypothèse (1). De plus $M(T)$ forme un demi-groupe commutatif avec l'élément neutre 0 par rapport à l'opération $*$ déterminée par la concaténation des suites et de plus $\tau(\tau' x) = (\tau' * \tau)x$, donc τx est une solution de l'équation de translation sur $M(T)\times X$. Il en résulte d'après [3] qu'on peut obtenir τx par la construction C suivante:

(a) Soit K un ensemble d'indices et soit, pour chaque k de K, $\{W_{ik}\}_{i\in I_k}$ une décomposition invariante de $M(T)$, c'est-à-dire

$$\forall i\in I_k\colon\ W_{ik}\neq\emptyset,\qquad M(T) = \bigcup_{i\in I_k} W_{ik},$$
$$\forall i, j\in I\colon\ \ (i\neq j\ \Rightarrow\ W_{ik}\cap W_{jk} = \emptyset),$$
$$\forall i\in I_k\ \ \forall\tau\in M(T)\ \ \exists j\in I_k\colon\ \ W_{ik}*\tau\subset W_{jk},$$

et telle que la somme des puissances des I_k soit égale à la puissance de X.

(b) Soit $h_k\colon \{W_{ik}\}_{i\in I_k}\to X$ une injection telle qu'en désignant $X_k := h_k(\{W_{ik}\})$, nous avons $\bigcup_{k\in K} X_k = X$. Définissons la fonction $h'_k\colon M(T)\to X_k$ de la manière suivante:

$$h'_k(x) = h_k(W_{ik})\qquad \text{pour } x \text{ de } W_{ik}$$

et supposons que h'_k remplissent la condition de compatibilité suivante:

(12) $\quad \forall k, l \in K \ \forall x \in X_k \cap X_l \ \forall \tau \in M(T)$: $\ h'_k(h'^{-1}_k(\{x\}) * \tau) = h'_l(h'^{-1}_l(\{x\}) * \tau)$.

(c) Posons

(13) $$\tau x = h'_k(h'^{-1}_k(\{x\}) * \tau) \quad \text{pour } x \text{ de } X_k.$$

Si nous supposons que $X_k \cap X_l = \emptyset$ pour $k \neq l$, c'est-à-dire que

(14) $$\forall x, y \in X: \ [M(T)x := \{\tau x | \ \tau \in M(T)\} = M(T)y \text{ ou } M(T)x \cap M(T)y = \emptyset],$$

la condition (12) est évidemment remplie.

Nous allons montrer le

THÉORÈME 5. *Si pour la famille des fonctions* $\{tx\}_{t\in T, x\in X}$ *dans la construction* C *de la famille* $\{\tau x\}_{\tau\in M(T), x\in X}$ *on a* (14) *et on peut choisir les décompositions* $\{W_{ik}\}_{i\in I_k, k\in K}$ *telles que*

$$\forall k, l \in K: \ [\forall i \in I_k \ \exists j \in I_l: \ W_{ik} \subset W_{jl} \ ou \ \forall j \in I_l \ \exists i \in I_k: \ W_{jl} \subset W_{ik}],$$

$$\exists l \in K \ \forall k \in K \ \forall i \in L_l \ \exists j \in I_k: \ W_{il} \subset W_{jk},$$

alors (3) *est satisfaite.*

Démonstration. Remarquons que pour chaque l de K et j, m de I_l, $W_{jl} * W_{ml}$ est un élément de la famille $\{W_{il}\}_{i\in I_l}$. Cela résulte de (13) puisque d'après [3] cette famille est la famille des contre-images des ensembles de la forme $\{x\}$, où $x \in X_l$, par la fonction tx_1 comme fonction de t, avec x_1 fixé dans X_l.

Soit $x \in X_k$, $y = X_l$ et soit

$$\forall i \in I_k \ \exists j \in I_l: \ W_{ik} \subset W_{jl},$$

$h'^{-1}_k(x) = W_{ik} \subset W_{jl}$ et $h'^{-1}_l(y) = W_{ml}$. De là

$$h'^{-1}_l(y) * h'^{-1}_k(x) = W_{ml} * W_{ik} \subset W_{jl} * W_{ml}.$$

Il résulte du raisonnement précédent et de (14) que l'opération $\#$ définie comme suit:

$$x \# y = h'_l\{h'^{-1}_l(y) * h'^{-1}_k(x)\},$$

est bien définie sur $X \times X$. Le reste de la démonstration est analogue à celle du théorème 1.

Remarques

13. On voit que dans les applications du théorème 5 les décompositions invariantes des demi-groupes jouent un rôle fondamental. Nous connaissons ces décompositions dans le cas du demi-groupe des éléments négatifs du groupe ordonné archimédien (voir [6]) ou plus généralement dans le cas du demi-groupe du groupe abélien linéairement ordonné (voir [4]).

14. Si les fonctions τx remplissent la condition (2) alors d'après la construction C nous avons $X_p = X$ pour p tel que $a \in X_p$. D'après (12) les autres k ($k \neq p$) sont inutiles pour avoir (13), il suffit pour avoir (13) de prendre K de puissance 1, donc nous pouvons avoir seulement une décomposition invariante dans la construction C. Il en résulte que les hypothèses du théorème 5 sont remplies dans ce cas.

On peut formuler le théorème 5 comme suit. Définissons pour x dans X la relation ϱ_x sur $M(T)$: $\tau \varrho_x \tau' \Leftrightarrow (\tau x = \tau' x)$.

On sait d'après [3] que pour les décompositions $\{W_{ik}\}_{i \in I_k}$ on peut prendre les classes d'équivalence des relations ϱ_x. Le théorème suivant est donc vrai:

THÉORÈME 6. *Si pour une famille* $\{tx\}_{t \in T, x \in X}$ *satisfaisant à* (14)

$$\forall x, y \in X: \quad (\varrho_x \subset \varrho_y \text{ ou } \varrho_y \subset \varrho_x)$$

et

$$\exists x' \in X \ \forall x \in X: \quad \varrho_{x'} \subset \varrho_x,$$

alors (3) *est vérifiée.*

De la même manière on peut généraliser le théorème 2:

THÉORÈME 7. *Si la famille* $\{tx\}_{t \in T, x \in X}$ *satisfait à* (9'), (14) *et* (15) *alors* (3) *est vérifiée.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 2 (voir aussi la démonstration du théorème 5).

On peut aussi généraliser le théorème 3. Définissons pour x de X la relation ϱ'_x sur T: $t \varrho'_x t' \Leftrightarrow (tx = t'x)$. On a le

THÉORÈME 8. *Si la famille des fonctions* $\{tx\}_{t \in T, x \in X}$, *où* T *et* X *sont les ensembles arbitraires, vérifie* (3), *alors*

$$\exists a \in X \ \forall x \in X: \quad \varrho'_a \subset \varrho'_x.$$

Démonstration. Elle est évidente puisque d'après (3) nous avons

$$(t, t') \in \varrho'_a \Leftrightarrow ta = t'a \Rightarrow (ta) * x = (t'a) * x \Leftrightarrow tx = t'x \Leftrightarrow (t, t') \in \varrho'_x.$$

Travaux cités

[1] J. Aczél and A. D. Wallace, *A note on generalizations of transitive systems of transformations*, Colloq. Math. 17 (1967), 29–34.

[2] E. Barcz, M. Kania et Z. Moszner, *Sur les automates commutatifs*, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Mat. 19 (1977), 195–199.

[3] A. Krupińska, *Solution de l'équation de translation sur une catégorie* (en polonais), Zeszyty Nauk. WSP w Rzeszowie 2 (18) (1972), 13–106.

[4] A. Mach, *Sur les décompositions invariantes du demi-groupe du groupe abélien linéairement ordonné*, Rocznik Nauk.-Dydakt. WSP w Krakowie, Travaux Math. 11 (1985), 119–146.

[5] Z. Moszner, *Structure de l'automate plein, réduit et inversible*, Aequationes Math. 9 (1973), 46–59.

[6] —, *Décompositions invariantes du demi-groupe des éléments non-négatifs du groupe archimédien*, Tensor 34 (1) (1980), 8–10.

[7] —, *Sur les propriétés complémentaires des solutions de l'équation de translation*, Ann. Polon. Math. 52 (1990), 27–36.

INSTYTUT MATEMATYKI, WSP KRAKÓW
INSTITUT DES MATHÉMATIQUES
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CRACOVIE
Podchorążych 2, 30-084 Kraków, Pologne

Reçu par la Rédaction le 16.01.1989