ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVI (1985)

Экстремальная плюрисубгармоническая функция единичного шара $\bar{B} \subset \boldsymbol{R}^n$

А. Садуллаев (Ташкент)

Franciszek Leja in memoriam

Резюмэ. В работе приводится геометрическое описание множества уровня $G_R = \{V(z, \bar{B}) < \ln R\}$ функции Грина $V(z, \bar{B})$ для единичного n — мерного шара $\bar{B}$ лежащего на вещественном подпространстве $\boldsymbol{R}^n$. Интересно отметить, что при $n > 1$ граница ∂G_R области G_R является не гладкой поверхностью.

Пусть K — компакт, лежащий в комплексном пространстве $\boldsymbol{C}^n$, а $e_m(f, K) = \inf\{\|f-P\|_K\colon \deg P \leqslant m\}$ — отклонение заданной на K функции f от наилучшего приближения многочленами степени $\leqslant m$. Если $V(z, K)$ — функция Грина компакта K (как обычно предполагается, что K регулярный), то имеет место следующее утверждение, известное при $n = 1$ как теорема Бернштейна-Уолша:

$$\varlimsup_{m\to\infty} e_m^{1/m}(f, K) \leqslant 1/R, \qquad R > 1,$$

тогда и только тогда, когда f аналитически продолжается на открытое множество $G_R = \{V(z, K) < \ln R\} \subset \boldsymbol{C}^n$. В многомерном случае эта теорема доказана И. Сичаком [1] (см. также работы [2]-[4]).

В вопросах полиномиальной аппроксимации наибольший интерес представляет случай, когда компакт K лежит в вещественном пространстве $\boldsymbol{R}^n \subset \boldsymbol{C}^n$. Здесь мы будем иметь дело с аппроксимацией функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ вещественных аргументов $x_j = \operatorname{Re} z_j$ (отметим, что любая непрерывная функция f на компакте $K \subset \boldsymbol{R}^n$ равномерно приближаются многочленами). Традиционными компактами в $\boldsymbol{R}^n$ являются (единичные) куб I^n, шар $\bar{B}^n$ и симплекс S^n, и вычисление для них экстремальных функций Грина важно с точки зрения практического прменения теоремы Бернштейна-Уолша.

В случае куба I^n функция $V(z, I^n)$ просто выражается через функции Грина отрезка $I \subset \boldsymbol{C}$ (см. [2]). Для шара $\bar{B}$, её выражение существенно более сложное, однако, уровни функции $V(z, \bar{B})$ имеет наглядное геометрическое описание. Прежде чем сформулировать основной результат, мы определим один класс областей.

1. Области $\mathscr{E}(a, b)$. Пусть $\mathfrak{U}$ — совокупность унитарных преобразований в C^n, для которых вещественное пространство R^n является инвариантным (отметим, что матрицы таких преобразований являются вещественными). Рассмотрим в пространстве C^n переменных $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \ldots, n$, цилиндрическую область

$$E = \left\{z \in C^n \colon \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1\right\} = \left\{z_1 \colon \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1\right\} \times C^{n-1},$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $y_j = \operatorname{Im} z_j$. Положим

$$\mathscr{E}(a, b) = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} [UE],$$

где UE — образ E относительно преобразования U. Область $\mathscr{E}(a, b)$ — очевидно, ограниченная, выпуклая (не строго) и, кроме того нетрудно видеть — не гладкая. В качестве примера опишем область $\mathscr{E}(1, 1)$ при $n = 2$. В этом случае матрицы преобразований $U \subset \mathfrak{U}$ имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

и поэтому

$$\mathscr{E}(1, 1) = \bigcap_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} \{z \colon |z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha|^2 < 1\} =$$
$$= \{z \colon \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} |z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha|^2 < 1\}.$$

Непосредственным вычислением находим, что

$$V(z) \overset{\text{def}}{=} \sup_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} |z_1 \cos\alpha + z_2 \sin\alpha|^2 = \tfrac{1}{2}|z|^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{(|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 + (2\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2)^2}.$$

Заметим, что на гиперповерхности $\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2 = 0$ функция $V(z)$ равна $\max\{|z_1|^2, |z_2|^2\}$. Следовательно, пересечение $\{\operatorname{Re} z_1\bar{z}_2 = 0\} \cap \partial\mathscr{E}(1, 1)$ представляет собой двумерный цикл s^2 лежащий на границе единичного поликруга U^2, причем на остове поликруга этот цикл имеет излом (множество негладкости) по крывой

$$l = \{(e^{i\varphi}, e^{i(\varphi \pm \pi/2)}),\ \varphi \in [0, 2\pi]\} \subset s^2.$$

2. Теорема. *Пусть K — замкнутый единичный шар в вещественном подпространстве $R^n \subset C^n$, а $V(z, K)$ — его функция Грина. Тогда*

(a) $V(z, K) = \sup\{\tilde{V}([Uz]_1: U \in \mathfrak{U}\}$, *где* $\tilde{V}(z_1)$ — *функция Грина отрезка* $[-1, 1] \subset C$, *а* $[Uz]_1$ — *первая компонента преобразования* U: $Uz = ([Uz]_1, \ldots, [Uz]_n)$;

(b) *область* $G_R = \{V(z, K) < \ln R\}$, $R > 1$, *совпадает с* $\mathscr{E}_R = \mathscr{E}\left(\frac{1}{2}(R + 1/R), \frac{1}{2}(R - 1/R)\right)$.

Замечание 1. Утверждения (a) и (b) легко вытекают друг от друга. Здесь утверждение (b) приведено отдельно ввиду того, что область G_R в (b) имеет более наглядный вид, чем функция $V(z, K)$ в (a). Отметим также, что при $n = 2$ соотношение (a) установлено раньше М. Ландином (препринт) ([1]).

Замечание 2. Так как в (a) используется только первая компонента $[Uz]_1$ преобразования U, то здесь в фигурной скобке класс $\mathfrak{U}$ можно заменить произвольным подклассом $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}$ таким, что для любых взаимно перпендикулярных прямых l', $l'' \subset R^n$ проходящих через O найдется $U \in \mathfrak{U}_1$ переводящее l' в l''. В доказательстве теоремы воспользуемся этим утверждением.

Доказательство теоремы. Так как функция $\tilde{V}([Uz]_1)$ для любого $U \in \mathfrak{U}$ плюрисубгармонична в C^n, причем $\tilde{V}|_K = 0$, то

$$V(z, K) \geqslant \mathscr{E}(z), \tag{1}$$

где через $\mathscr{E}(z)$ обозначена функция, стоящая в правой части (a).

Для доказательства обратного соотношения $V(z, K) \leqslant \mathscr{E}(z)$ нам достаточно показать неравенство $|P_m(z)| \leqslant R^m$ при $z \in \partial\mathscr{E}_R$ для любого полинома $P_m(z)$ степени m такого что норма $\|P_m\|_K$ не превосходит 1.

Фиксируем пару взаимно перпендикулярных прямых $l_1, l_2 \in RP^{n-1}$ полагая для определенности, что l_1 совпадает с Ox_1, а l_2 — с Ox_2. Берем семейство аналитических кривых

$$A(a, b) = \left\{z_1 = \frac{a}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right),\ z_2 = \frac{b}{2o}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right),\ z_3 = \ldots = z_n = 0\right\},$$

$\xi \in C$ — параметр, $a, b \in R$, $\max\{|a|, |b|\} = 1$. Чтобы оценить поли-

---

([1]) Editor's remark. There exists a paper by M. Lundin (*The extremal plurisubharmonic functions for the complement of convex symmetric subsets of* R^N, Dept. of Math., The University of Göteborg, Preprint No. 8 (1983), pp. 1–9), which contains — as a special case — a formula for the extremal function $V(z, K)$ of the closed unit ball in R^N, $N > 2$.

ном $P_m(z)$ на $A(a, b)$ рассмотрим полином

$$q_{2m}(\xi) = \xi^m \cdot P^m|_{A(a,b)} = \xi^m P_m\left(\frac{a}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right), \frac{b}{2i}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right), 0, \ldots, 0\right).$$

Так как значениям $|\xi| = 1$ соответствует эллипс $A(a, b) \cap K$, то $|q_{2m}(\xi)| \leqslant 1$ при $|\xi| = 1$. Следовательно, по классической теореме Бернштейна–Уолша

$$|q_{2m}(\xi)| \leqslant |\xi|^{2m}, \qquad |\xi| \geqslant 1.$$

В частности, $|P_m(z)| \leqslant R^m$ на линии уровне $s_R(a, b) \subset A(a, b)$, соответствующей значениям параметра $|\xi| = R$. Отсюда множество $s_R(a, b)$ а значит и их объединение s_R по всем указанным значениям a, b, также принадлежит замыканию $\bar{G}_R$.

С другой стороны легко видеть, что s_R лежит вне множества $\mathscr{E}_R = \mathscr{E}\left(\frac{1}{2}(R+1/R), \frac{1}{2}(R-1/R)\right)$. Кроме того, согласно (1) $\mathscr{E}_R \supset G_R$ и, поэтому $s_R \subset \partial\mathscr{E}_R \cap \partial G_R$. Отметим, что двумерный цикл s_R мы построили для фиксированной пары прямых Ox_1 и Ox_2. Построим его для каждой пары взаимно перпендикулярных прямых l_1, l_2. Обозначим эти циклы через $s(l_1, l_2)$. Тогда объединение

$$S_R = \bigcup_{l_1, l_2} s_R(l_1, l_2)$$

принадлежит $\partial\mathscr{E}_R \cap \partial G_R$ и замкнуто. Нетрудно доказать, что оно и открыто на $\partial\mathscr{E}_R$. Поэтому $S_R = \partial\mathscr{E}_R$. Отсюда $\partial\mathscr{E}_R \subset \partial G_R$ и, следовательно $G_R = \mathscr{E}_R$. Теорема доказана.

Замечание 3. Попутно нами было установлено, что граница $\partial\mathscr{E}_R$ области $\mathscr{E}_R$ расслаивается на двумерные циклы $s_R(l_1, l_2)$. Рассмотрим один из этих циклов, например $s_R(Ox_1, Ox_2) = s_R$. Цикл s_R представляется в виде объединения двух множеств: $s_R = s_R^{(1)} \cup s_R^{(2)}$, где

$$s_R^{(1)} = \left\{z_1 = \frac{1}{2}\left(Re^{i\varphi} + \frac{1}{Re^{i\varphi}}\right),\ z_2 = \frac{b}{2i}\left(Re^{i\varphi} - \frac{1}{Re^{i\varphi}}\right),\right.$$
$$\left. 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -1 \leqslant b \leqslant 1\right\},$$

$$s_R^{(2)} = \left\{z_1 = \frac{a}{2}\left(Re^{i\varphi} + \frac{1}{Re^{i\varphi}}\right),\ z_2 = \frac{1}{2i}\left(Re^{i\varphi} - \frac{1}{Re^{i\varphi}}\right),\right.$$
$$\left. 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -1 \leqslant a \leqslant 1\right\}.$$

Отсюда видно, что во первых, цикл s_R состоит из объединения отрезков прямых и во — вторых, s_R имеет излом по множеству $s_R^{(1)} \cap s_R^{(2)}$.

Литература

[1] J. Siciak, *On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 322-357.

[2] —, *Extremal plurisubharmonic functions in C^n*, Proc. of the First Finnish — Polish summer School in complex Analysis at Podlesice, Łódź 1977, 115–152.

[3] В. П. Захарюта, *Экстремальные плюрисубгармонические функции, ортогональные полиномы и теорема Бернштейна–Уолша для аналитических функций многих комплексных переменных*, Ann. Polon. Math. 33 (1976), 137–148.

[4] А. Садуллаев, *Оценка полиномов на аналитических множествах*, Известия АН СССР, сер. Матем. 46 : 3 (1982), 524–534.

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ЛЕНИНА

Reçu par la Rédaction le 15.03.1984