ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LII (1990)

# О решениях системы полных сингулярных интегральных уравнений с аналитическими ядрами и отражением

Нгуен Ван Мау (Łódź)

**Abstract.** We present an algebraic method for obtaining a representation of solutions to the system of singular integral equations (1) in terms of the canonical matrix of a Riemann problem.

Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений вида

$$(1)\qquad a_+(t)\,\varphi(t)+\frac{b_+(t)}{\pi i}\int_R\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+a_-(t)\,\varphi(-t)+\frac{b_-(t)}{\pi i}\int_R\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau+t}+\int_R l(\tau,t)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t);$$

где $a_\pm(t)$; $b_\pm(t)$ — функциональные $(n\times n)$-матрицы, элементы которых удовлетворяют условию Гёльдера; $\varphi(t)$; $f(t)\in L_p^n$, $p>1$.

В [1] доказано, что система (1) при условиях

$$(2)\qquad a_-(t)\pm b_-(t)\equiv 0$$

и $[a_+(t)\pm b_+(t)]^{-1}\,l(\tau,t)$ — функции классов $H^{\pm\pm}_{p,n\times n}$ типа Харди [1], [3], [4], может быть решена в замкнутой форме в терминах канонической матрицы некоторой краевой задачи Римана.

В этой заметке укажем один алгебраический способ, позволяющий получить выше указанный результат для общей системы (1) без ограничения вида (2).

1. Введём следующие обозначения:

$$P_{1,2}=\tfrac{1}{2}(I\pm S);\qquad Q_{1,2}=\tfrac{1}{2}(I\pm W)$$

где

$$(W\varphi)(t)=\varphi(-t),\qquad (S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_R\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}.$$

Легко проверить справедливость следующих равенств:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &P_iP_j=\delta_{ij}P_j;\qquad Q_iQ_j=\delta_{ij}Q_j;\qquad \delta_{ij}\text{— символ Кронекера};\\ &SW=-WS;\qquad SQ_1=Q_2S;\qquad SQ_2=Q_1S.\end{aligned}$$

Тогда можем представить $L_p^n$ в виде

$$L_p^n = L_{p,1}^n \oplus L_{p,2}^n = L_{p,+}^n \oplus L_{p,-}^n \tag{4}$$

где $L_{p,j}^n = Q_j L_p^n$; $j = 1,2$; $L_{p,+}^n = P_1 L_p^n$; $L_{p,-}^n = P_2 L_p^n$.

Ниже будут использоваться свойства интегральных операторов с ядрами из классов $H_{p,n\times n}^{\pm\pm}$ типа Харди, введённых в [1], [3], [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что $l(\tau, t)$ принадлежит $H_p^{++}$ если

(а) $l(z, \zeta)$ аналитична в верхней полуплоскости по каждому переменному (при фиксированном значении другого — в замкнутой верхней полуплоскости);

(б) почти для всех $x$ выполняется оценка

$$\int_R |l(\tau+iy, t)|^r d\tau \leqslant \text{const}, \qquad r > 1,$$

где постоянная не зависит от $y$; $y \geqslant 0$.

(в) нормы $\|l_y\|_{L_p \to L_p}$ операторов

$$(l_y \varphi)(x+iy) = \int_R l(\tau, x+iy)\, \varphi(\tau)\, d\tau$$

ограничены сверху: $\|l_y\| < \text{const}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что $(n\times n)$-матрица $l(\tau, t)$ принадлежит классу $H_{p,n\times n}^{++}$, если каждый её элемент принадлежит классу $H_p^{++}$

Аналогично определяется класс $H_{p,n\times n}^{--}$ для нижней полуплоскости. Для интегральных операторов $l$ с ядрами $l(\tau, t) \in H_{p,n\times n}^{\pm\pm}$ справедливы равенства [1], [3], [4]

$$l^2 = 0; \qquad Sl = \pm l; \qquad lS = \mp l. \tag{5}$$

Перепишем (1) в виде

$$a_1(t)(Q_1 \varphi)(t) + a_2(t)(Q_2 \varphi)(t) + b_1(t)(SQ_1\varphi)(t) + b_2(t)(SQ_2\varphi)(t) + (l_1 Q_1 \varphi)(t) + (l_2 Q_2 \varphi)(t) = f(t) \tag{6}$$

где

$$l_{1,2}(\tau, t) = \tfrac{1}{2}[l(\tau, t) \pm l(-\tau, t)],$$

$$a_{1,2}(t) = a_+(t) \pm a_-(t); \qquad b_{1,2}(t) = b_+(t) \mp b_-(t).$$

С помощью разложения (4), система (5) допускает следующее представление:

$$\begin{aligned} &a_1^+ \varphi_1 + a_2^- \varphi_2 + b_1^-(S\varphi_1) + b_2^+(S\varphi_2) + l_1^+(\varphi_1) + l_2^+(\varphi_2) = f^+, \\ &a_1^- \varphi_1 + a_2^+ \varphi_2 + b_1^+(S\varphi_1) + b_2^-(S\varphi_2) + l_1^-(\varphi_1) + l_2^-(\varphi_2) = f^-, \end{aligned} \tag{7}$$

где

(8) $$\varphi_j = Q_j\varphi; \quad j=1,2,$$

(9) $$a_j^{\pm}(t)=\tfrac{1}{2}[a_j(t)\pm a_j(-t)]; \quad b_j^{\pm}(t)=\tfrac{1}{2}[b_j(t)\pm b_j(-t)];$$
$$f^{\pm}(t)=\tfrac{1}{2}[f(t)\pm f(-t)]; \quad j=1,2.$$

Отсюда, решение $(\varphi_1,\varphi_2)$ системы (7) должно искаться в специально выбранных пространствах $(L^n_{p,1},L^n_{p,2})$, т.е. $\varphi_j\in L^n_{p,j}$; $j=1,2$.

Покажем, что такое решение системы (7) в $(L^n_{p,1},L^n_{p,2})$ всегда можно выделить из общего решения системы (7) в обыкновенном пространстве $(L^n_p,L^n_p)$. Именно справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Если* $(\varphi_1,\varphi_2)$ — *решение системы* (7) *в пространстве* $(L^n_p,L^n_p)$, *то* $(Q_1\varphi_1,Q_2\varphi_2)$ *будет её решением в* $(L^n_{p,1},L^n_{p,2})$, *где* $L^n_{p,j}$ *определяются по формуле* (4).

Доказательство. Пользуясь представлением $\varphi_j=\varphi_j^+ + \varphi_j^-$; $\varphi_j^+ = Q_{1,2}\varphi_j$, запишем (7) в виде

$$-(a_1^+\varphi_1^+ + a_2^-\varphi_2^- + b_1^-(S\varphi_1^+)+b_2^+(S\varphi_2^-)+l_1^+(\varphi_1^+)+l_2^+(\varphi_2^-)-f^+$$
$$= a_1^+\varphi_1^- + a_2^-\varphi_2^+ + b_1^-(S\varphi_1^-)+b_2^+(S\varphi_2^+),$$
$$-(a_1^-\varphi_1^- + a_2^+\varphi_2^+ + b_1^+(S\varphi_1^-)+b_2^-(S\varphi_2^+)$$
$$= a_1^-\varphi_1^+ + a_2^+\varphi_2^- + b_1^+(S\varphi_1^+)+b_2^-(S\varphi_2^-)+l_1^-(\varphi_1^+)+l_2^-(\varphi_2^-)-f^-$$

Легко видеть, что левые части последней системы принадлежат пространству $L^n_{p,1}$, а правые части принадлежат пространству $L^n_{p,2}$. Отсюда, в силу того, что $(\varphi_1,\varphi_2)$ являлся решением (7) в $(L^n_p,L^n_p)$, следует, что обе части каждого соотношения равны нулю. Лемма доказана.

Таким образом, чтобы получить решения заданной системы достаточно решить систему (7) в обыкновенном пространстве $(L^n_p,L^n_p)$.

Перепишем (7) в виде

(10) $$A\Phi + B(S\Phi)+L(\Phi)=F,$$

где

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_1^+(t) & a_2^-(t)\\ a_1^-(t) & a_2^+(t)\end{pmatrix}; \quad B(t)=\begin{pmatrix} b_1^-(t) & b_2^+(t)\\ b_1^+(t) & b_2^-(t)\end{pmatrix};$$

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix}; \quad F(t)=\begin{pmatrix} f^+(t)\\ f^-(t)\end{pmatrix};$$

(10′) $$L(\tau,t)=\begin{pmatrix} l_1^+(\tau,t) & l_2^+(\tau,t)\\ l_1^-(\tau,t) & l_2^-(\tau,t)\end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} l_j^{\pm}(\tau,t) &= \tfrac{1}{2}[l_j(\tau,t)\pm l_j(\tau,-t)];\\ l_{1,2}(\tau,t) &= \tfrac{1}{2}[l(\tau,t)\pm l(-\tau,t)].\end{aligned}$$

Справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть система* (10) *удовлетворяет условию*

$$[A(t)\pm B(t)]^{-1}L(\tau,t)\in H^{\pm\pm}_{0,2n\times 2n}. \tag{11}$$

*Тогда она представима в виде*

$$(AI+BS)(I+M)\Phi=F,$$

*где $M$ — интегральный оператор с ядром*

$$M(\tau,t)=[A(t)\pm B(t)]^{-1}L(\tau,t).$$

Доказательство. Из условия (11) следует, что $SM=\pm M$ (см. (5)).

Отсюда, $(AI+BS)M=(A\pm B)M$, т.е. $(AI+BS)(I+M)=AI+BS+L$. Лемма доказана.

Пусть система характеристических уравнений

$$A\Psi+B(S\Psi)=0 \tag{12}$$

нормально разрешима, т.е. $\det D_\pm(t)=\det[A(t)\pm B(t)]\neq 0$. Пусть далее, $\chi(z)$ — каноническая матрица системы (12) и $\varkappa_j$ — соответствующий частный индекс системы (12) (для определённости считаем, что $\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\quad\geqslant\varkappa_m\geqslant 0,\quad 0>\varkappa_{m+1}\geqslant\varkappa_{m+2}\geqslant\ldots\geqslant\varkappa_{2n}$; $m^+=\varkappa_1+\quad+\varkappa_m$; $m^-=|\varkappa_{m+1}|+\ldots+|\varkappa_{2n}|$).

Тогда можем сформулировать окончательный результат следующим образом:

Теорема 1. *Система* (1) *разрешима лишь при выполнении $m^-$ условий разрешимости* [2]

$$\int_R F(\tau)\dot{Z}^T(\tau)Q\left(\frac{1}{\tau+i}\right)d\tau=0. \tag{13}$$

*Здесь $Z^T(t)$ —матрица, транспонированная к $Z(t)$, где*

$$Z(t)=[\chi^+(t)]^{-1}D_+^{-1}(t)=[\chi^-(t)]^{-1}D_-^{-1}(t).$$

*а $Q(1/(\tau+i))$ — вектор-функция с координатами*

$$Q_j\left(\frac{1}{\tau+i}\right)=\begin{cases}0; & j=1,2,\ldots,m,\\ \sum\limits_{k=1}^{-\varkappa_j}c_{kj}(\tau+i)^{-k}; & j=m+1,\ldots,2n.\end{cases}$$

*При выполнении* (13), *общее решение системы* (1) *даётся формулой*

$$\varphi=Q_1\varphi_1+Q_2\varphi_2;\qquad \varphi_1=(\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_n);\qquad \varphi_2=(\Phi_{n+1},\Phi_{n+2},\ldots,\Phi_{2n});$$

*где*

$$\Phi=(I-M)(A_0F+B_0SZF+B_0P);$$

$$A_0(t)=\tfrac{1}{2}[D_+^{-1}(t)+D_-^{-1}(t)];\qquad B_0(t)=\tfrac{1}{2}[\chi^+(t)-\chi^-(t)],$$

$P(1/(t+i))$ — *вектор-функции с координатами*

$$P_j\left(\frac{1}{t+i}\right)=\sum_{k=1}^{\varkappa_j} c_{k_j}(t+i)^{-k} \quad \text{при } \varkappa_j>0,$$

$c_{k_j}$ — *произвольные постоянные*; $P_j(1/(t+i))\equiv 0$ *при* $\varkappa_j\leqslant 0$.

Доказательство непосредственно следует из лемм 1–2.

Замечание 1. Аналогично можем доказать, что союзная система однородной системы (1) (при $f(t)\equiv 0$) и соответствующая её неоднородная система при условии

$$L(t,\tau)\,[A^T(\tau)\mp B^T(\tau)]\in H^{\pm\,\pm}_{p,2n\times 2n}$$

(где $A^T$, $B^T$ — матрицы транспонированные к $A$, $B$ соответственно) также допускают решения в замкнутой форме в терминах канонической матрицы краевой задачи Римана.

**2.** В качестве иллюстрации рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Пусть $a_\pm$, $b_\pm$ — постоянные матрицы; $\varphi(t)$, $f(t)\in L^n_p$, $p>1$, и пусть выполнено условие $L(\tau,t)\in H^{+\,+}_{p,2n\times 2n}$; $L_{(\tau,t)}$ определяется по (10′).

Тогда система (1) приводится к виду

$$(AI+BS)(I+M)\Phi=F,$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_++a_- & 0\\ 0 & a_+-a_-\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & b_++b_-\\ b_+-b_- & 0\end{pmatrix},$$

$$\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix};\quad F=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\end{pmatrix};\quad f_{1,2}(t)=\tfrac{1}{2}[f(t)\pm f(-t)].$$

Предполагается, что $\det(A\pm B)\neq 0$. Тогда единственное решение системы (1) вычисляется по формуле $\varphi(t)=(Q_1\Phi_1)(t)+(Q_2\Phi_2)(t)$;

$$\Phi=[(A+B)^{-1}+(A-B)^{-1}](I-M)F+[(A+B)^{-1}-(A-B)^{-1}](I-M)SF.$$

Пример 2. Рассмотрим один частный случай, когда $a_\pm(t)$, $b_\pm(t)$ — матрицы чётных и нечётных функций соответственно и пусть они удовлетворяют условию Гёльдера на $R$. Пусть далее, $\det\,(A(t)\pm B(t))\neq 0$, где

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_+(t)+a_-(t) & 0\\ 0 & a_+(t)-a_-(t)\end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$B(t)=\begin{pmatrix} 0 & b_+(t)+b_-(t)\\ b_+(t)-b_-(t) & 0\end{pmatrix};$$

и

$$l(\tau, t) = [a_+(t)+a_-(t)+b_+(t)-b_-(t)]\, k(\tau, t); \qquad k(\tau, t) = \|k_{ij}(\tau, t)\|_{i,j=1}^{n},$$

$$k_{ij}(\tau, t) = (\tau^2-t^2)^{-2} \sin^2 \alpha_{ij}(\tau^2-t^2); \qquad \alpha_{ij} \in C.$$

Тогда легко проверить, что

$$M(\tau, t) = [A(t)+B(t)]^{-1} L(\tau, t) = \begin{pmatrix} k(\tau, t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H^{++}_{p,2n\times 2n},$$

и система вида

$$a_+(t)\,\varphi(t)+b_+(t)(S\varphi)(t)+a_-(t)\,\varphi(-t)+b_-(t)(S\varphi)(-t)+(l\varphi)(t) = f(t)$$

приводится к виду

$$(15) \qquad (AI+BS)(I+M)\,\Phi = F,$$

где $A$, $B$ имеют вид (14). Отсюда, общее решение системы (15) и следовательно, решение данной системы вычисляется по известной формуле теоремы 1.

**Литература**


[1] И. Л. Васильев, Докл. АН БССР 23 (1984), 488–491.

[2] Н. П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений*, Наука, Москва 1970, 380 с.

[3] С. Г. Самко, Известия Северо-Кавказского научного центра, Естественные науки (1974), (7), 86–94.

[4] –, И. Л. Васильев, Деп. в ВИНИТИ (1981), 3227–81, 22.


UNIWERSYTET ŁÓDZKI

*Reçu par la Rédaction le 15.03.1988*