ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIX (1974)

Теоремы Лиувилля для систем уравнений с частными производными

О. А. Олейник и Е. В. Радкевич (Москва)

Резюме. Доказаны теоремы о поведении решений в неограниченных областях для некоторых классов систем уравнений с частными производными, используя аналитичность решений некоторых вспомогательных систем.

В настоящей работе мы докажем теоремы о допустимом росте на бесконечности решений некоторых систем уравнений с частными производными. Эти теоремы в некотором смысле аналогичны известной теореме Лиувилля для гармонических функций. Интересно отметить, что определенное поведение решения рассматриваемой системы на бесконечности является следствием аналитичности всех решений по некоторому переменному для системы уравнений, связанной специальным образом с данной системой. Здесь, как и в нашей работе [4] о поведении собственных функций и решений некоторых уравнений с частными производными, коэффициенты которых зависят от параметра, мы используем лемму об аналитическом продолжении, аналогичную доказанной в работе [5]. Пусть Ω — ограниченная область в вещественном пространстве

$$R^{n+1} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, x), \qquad D_{x_j} = -i\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n}, \qquad |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

Лемма. *Пусть банахово пространство $B(\Omega)$ состоит из обобщенных функций $u \in D'(\Omega)$ и из сходимости последовательности в $B(\Omega)$ следует ее сходимость в $D'(\Omega)$. Предположим, что для некоторой области $G \subset \Omega$ и для каждой функции $u \in B(\Omega)$ существует область*

$$Q_\delta(G) = \{x_0, x, y_0;\ (x_0, x) \in G, |y_0| < \delta\}$$

такая, что u может быть продолжена в $Q_\delta(G)$, как аналитическая функция $u(x_0+iy_0, x_1, \ldots, x_n)$ переменной x_0+iy_0 и, кроме того, $D^\alpha u$ при $|\alpha| \leqslant k$ ограничены по модулю в $Q_\delta(G)$, $k \geqslant 1$, $\delta = \mathrm{const} > 0$ и δ, вообще говоря, зависит от u. Тогда существуют такие постоянные $\delta_0 > 0$ и $C_0 > 0$, что для любого $u \in B(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\sup_{Q_{\delta_0}(G)} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D^\alpha u| \leqslant C_0 \|u\|_{B(\Omega)}. \tag{1}$$

Эта лемма справедлива и для соответствующих векторных банаховых пространств $B^N(\Omega)$.

Доказательство этой леммы проводится точно также, как и доказательство леммы I в работе [5] и поэтому мы его опускаем.

В дальнейшем под решением системы уравнений в области Ω мы будем понимать вектор-функцию, имеющую в Ω все непрерывные производные, входящие в систему.

Теорема 1. *Пусть все решения системы уравнений*

$$A(x, D_{x_0}, D_x)u = 0, \qquad u = (u_1, \ldots, u_N), \tag{2}$$

определены в области $\Omega = \{x_0, x; |x_0| < 1, x \in \Omega'\}$, $\Omega' \subset R^n$, являются аналитическими функциями переменной x_0 вместе с производными $D^\alpha u$, $|\alpha| \leqslant k$. Предположим, что замыкание решений по норме $\max\limits_{\Omega} |u|$ является также решением системы (2).

Положим $z_j = \varrho^{\gamma_j} x_j$, $\gamma_j = \mathrm{const} > 0$, $j = 1, \ldots, n$; $\varrho \in R^1$, $\varrho \geqslant 1$, $\varrho^{-\gamma} z \equiv (\varrho^{-\gamma_1} z_1, \ldots, \varrho^{-\gamma_n} z_n)$, $\varrho^\gamma D_z \equiv (\varrho^{\gamma_1} D_{z_1}, \ldots, \varrho^{\gamma_n} D_{z_n})$.

Предположим, что для некоторого решения v_ϱ системы уравнений

$$A(\varrho^{-\gamma} z, \varrho, \varrho^\gamma D_z) v_\varrho = 0, \qquad v_\varrho = (v_{\varrho 1}, \ldots, v_{\varrho N}), \tag{3}$$

в области Ω'_ϱ, которая является образом Ω' при преобразовании $z = \varrho^\gamma x$, выполнена оценка

$$|v_\varrho(z)| \leqslant e^{a(z)}, \qquad z = (z_1, \ldots, z_n), \tag{4}$$

где функция $a(z) \geqslant 0$, $\max\limits_{\Omega'_\varrho} \dfrac{a(z)}{\varrho} \to 0$ при $\varrho \to \infty$ и $a(z)$ монотонно возрастает при $|z_j| \to \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда в точках G'_ϱ при $\varrho \geqslant \varrho_0$

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} |D_z^\alpha v_\varrho(z)| \leqslant e^{-\delta_1 \varrho}, \tag{5}$$

где $\delta_1 = \mathrm{const} > 0$ и не зависит от ϱ, G'_ϱ — образ компакта $G' \subset \Omega'$ при преобразовании $z = \varrho^\gamma x$, постоянная ϱ_0 зависит от G'.

Замечание 1. Если уравнения системы (3), делённые на некоторые степени ϱ, имеют коэффициенты, не зависящие от ϱ и область Ω содержит начало координат, из оценки (5) следует, что $v_\varrho \equiv 0$.

Замечание 2. Условию теоремы 1 удовлетворяет любая эллиптическая по И. Г. Петровскому система (2) с достаточно гладкими коэффициентами, не зависящими от x_0, а также параболическая по И. Г. Петровскому система (2) при $x_n = t$ с достаточно гладкими и не зависящими от x_0 коэффициентами, так как решения таких систем являются аналитическими по x_0 функциями и в силу оценок типа Шаудера замыкание решений по норме $\max\limits_\Omega |u|$ является также решением системы (см. [6], [7]).

Доказательство теоремы 1. Пусть система уравнений (3) в Ω_ϱ имеет решение v_ϱ, удовлетворяющее неравенству (4), но не удовлетворяющее неравенству (5). Это означает, что существуют последовательность $\varrho_j \to \infty$ при $j \to \infty$ и последовательность точек $z_{\varrho_j} \in G_{\varrho_j}$ такие, что

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} |D_z^\alpha v_{\varrho_j}(z_{\varrho_j})| \geqslant e^{-\delta_1\varrho_j}, \tag{6}$$

где δ_1 — некоторое число, которое мы выберем ниже. Положим $u_{\varrho_j} = v_{\varrho_j}(\varrho_j^{\gamma_1} x_1, \ldots, \varrho_j^{\gamma_n} x_n)\exp(i\varrho_j x_0)$. Нетрудно видеть, что $u_\varrho(x_0, x)$ является решением системы (2) в Ω и

$$\max_\Omega |u_{\varrho_j}| \leqslant \max_{\Omega_{\varrho_j}} |v_{\varrho_j}(z)| \leqslant \exp\big(\max_{\Omega_{\varrho_j}} a(z)\big). \tag{7}$$

В то же время из оценки (6) получаем, что при достаточно больших j

$$\max_{Q_{\delta_0}(G)} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D_x^\alpha u_{\varrho_j}| \geqslant e^{\delta_0\varrho_j} \max_{G_{\varrho_j}} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D_z^\alpha v_{\varrho_j}(z)| \geqslant e^{(\delta_0-\delta_1)\varrho_j}. \tag{8}$$

Из неравенств (7), (8) следует, что решения u_{ϱ_j} системы (2) не удовлетворяют оценке (I) при $j \to \infty$, если рассматривать банахово пространство $B^N(\Omega)$ решений системы (2) в области Ω с нормой $\|u\|_{B^N(\Omega)} = \max\limits_\Omega |u|$ и положить $\delta_1 = \delta_0/2$.

Как частный случай из теоремы 1 получаем следующие теоремы 2 и 3.

Через $C^h(\Omega)$ мы обозначаем класс функций, имеющих непрерывные производные в точках Ω до порядка h включительно.

Теорема 2. *Пусть при всех $x \in \Omega' \subset R^n = (x_1, \ldots, x_n)$*

$$\det\Big\| \sum_{|\alpha|=n_j} a_\alpha^{lj}(x)\,\xi^\alpha + a^l(x)\,\delta^{lj}\,\xi_0^{n_j} \Big\| \neq 0 \tag{9}$$

при любых $\xi \in R^n$, $\xi_0 \in R^1$, $|\xi| + |\xi_0| \neq 0$, функции $a^l(x) \in C^{M+k}(\Omega')$ при $l = 1, \ldots, N$, функции $a_\alpha^{lj}(x) \in C^{M+k}(\Omega')$ при $|\alpha| \leqslant n_j$, $l, j = 1, \ldots, N$,

$M = 2n+2\left[\frac{n+1}{2}\right]+7+m$, $m = \max\limits_j n_j$, $\delta^{lj} = 0$ *при* $j \neq l$ *и* $\delta^{jj} = 1$.
Тогда если решение $v_\varrho(z)$ *эллиптической системы*

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant n_j} a_\alpha^{lj}(\varrho^{-\gamma}z)\,\varrho^{(\alpha,\gamma)}D_z^\alpha v_{\varrho j}+a^l(\varrho^{-\gamma}z)\,\varrho^{n_l}v_{\varrho l} = 0, \tag{10}$$

$l = 1,\ldots,N$, *в области* Ω_ϱ' *удовлетворяет условию*

$$|v_\varrho(z)| \leqslant e^{a(z)}, \tag{11}$$

то в G_ϱ' *при* $\varrho \geqslant \varrho_0$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k}|D_z^\alpha v_\varrho(z)| \leqslant e^{-\delta_1\varrho},$$

где $\delta_1 = \mathrm{const} > 0$ *и* δ_1 *— не зависит от* ϱ, $\varrho_0 = \mathrm{const} > 0$, G_ϱ' *— образ* $G' \subset \Omega'$ *при отображении* $z = \varrho^\gamma x$.

Теорема 2 непосредственно вытекает из теоремы I, так как система (10) является системой вида (3) для эллиптической системы (2) вида

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant n_j} a_\alpha^{lj}(x)D_x^\alpha u_j+a^l(x)D_{x_0}^{n_l}u_l = 0, \qquad l = 1,\ldots,N,$$

все решения которой аналитичны в $\Omega = \{x_0, x;\, |x_0| < 1, x \in \Omega'\}$ по переменному x_0 согласно теореме И. Г. Петровского [6] и теоремам о гладкости решений из работы [3].

Замечание 3. Если a_α^{lj}, a^l — постоянны, $n_j = m$, $j = 1,\ldots,N$, то эллиптическая система

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha^{lj}D_z^\alpha v_j+a^l v_l = 0, \qquad l = 1,\ldots,N, \tag{12}$$

не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих в R^n условию

$$|v(z)| \leqslant e^{a(z)},$$

где функция $a(z)$ монотонно возрастает при $|z_j|\to\infty$, $j = 1,\ldots,n$,

$$\frac{a(z)}{1+|z|}\to 0 \quad \text{при } |z|\to\infty.$$

Это утверждение вытекает из теоремы 2 при $\gamma_j = 1$, $j = 1,\ldots,n$, если Ω' — любая область, содержащая начало координат в R^n.

Уравнение $u_{z_1z_1}-u = 0$ имеет решение e^{z_1} в R^1. Этот пример показывает, что теорема I может быть неверна, если $\max\limits_{\Omega_\varrho}\frac{a(z)}{\varrho}$ не стремится к нулю при $\varrho\to\infty$.

В этом смысле условие (4) теоремы I является точным. Оно определяет допустимый рост решений системы (3) в R^n при $|z|\to\infty$.

Теорема, аналогичная теореме 2, и утверждение, аналогичное замечанию 3, справедливы также и для параболических по Петровскому систем.

Для формулировки следующей теоремы нам удобно разбить пространство $R^{n+1} = (x_0, x) = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ на сумму подпространств:

$$(x_0, x) = (t, s) = (t_0, t_1, \ldots, t_p, s_1, \ldots, s_q) = (t_0, t', s), \qquad \text{где } p+q = n.$$

Теорема 3. *Пусть уравнение*

$$(13)\quad P(s, D_{t_0}, D_{t'}, D_s)u = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant m} \; \sum_{|\gamma|=|\alpha|+(1+\delta)|\beta|-m} q_{\alpha\beta\gamma} s^\gamma D_t^\beta D_s^\alpha u = 0,$$

где $q_{\alpha\beta\gamma} = \text{const}$, $\delta = \text{const} > 0$, α, β, γ — *мультииндексы*, $q_{\alpha\beta\gamma} = 0$, *если* $|\alpha| + (1+\delta)|\beta| - m < 0$, *является эллиптическим при* $|s| \neq 0$. *Предположим, что уравнение* $P(s, \xi_0, \xi', D_s)W = 0$ *не имеет в* R_s^q *нетривиальных решений из класса* $S(R_s^q)$ *при любом* $\xi = (\xi_0, \xi') \in R^{p+1} u |\xi| \neq 0$. *Тогда не существует в* $R^n = (t', s)$ *нетривиального решения уравнения*

$$(14)\qquad P(s, 1, D_{t'}, D_s)v = 0$$

такого, что

$$|v(t', s)| \leqslant \exp[(|s| + |t'|^{1/1+\delta})^{1-\varepsilon}]$$

при некотором $\varepsilon > 0$.

Доказательство. В работе [2] доказано, что любое решение $u(t, s) \in D'(R^{n+1})$ уравнения (13) является аналитической функцией переменных t, s. Уравнение (14), умноженное на ϱ^m, является уравнением вида (3) для уравнения (13), если положить $\gamma_0 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_p = 1+\delta$, $\gamma_{p+1} = \ldots = \gamma_n = 1$ и сохранить старые обозначения для независимых переменных. Поэтому теорема 3 следует из теоремы 2, если положить в неравенстве (11) $a \equiv (|s| + |t'|^{1/1+\delta})^{1-\varepsilon}$ и взять Ω', содержащую начало координат.

Замечание 4. Легко видеть, что уравнение

$$P_1(D_s)u + |s|^{2l} P_2(D_{t'})u + |s|^{2l} D_{t_0}^m u = 0,$$

где P_1 и $P_2 + D_{t_0}^m$ — эллиптические, однородные операторы с постоянными коэффициентами порядка m по переменным s и t соответственно, удовлетворяет всем условиям теоремы 3 при $\delta = 2l/m$, l — целое неотрицательное число. Следовательно, уравнение

$$P_1(D_s)v + |s|^{2l} P_2(D_{t'})v + |s|^{2l} v = 0$$

не имеет нетривиальных решений в R^n, удовлетворяющих оценке

$$|v(t', s)| \leqslant \exp[(|s| + |t'|^{\frac{m}{m+2l}})^{1-\varepsilon}]$$

при некотором $\varepsilon > 0$.

Замечание 5. Если уравнения системы (3), деленные на некоторые степени ϱ, имеют коэффициенты, не зависящие от ϱ и область Ω' не содержит начала координат в R^n, то для любого решения $v(z)$ системы (3) в области $K_{\Omega'}$, где $K_{\Omega'} = \{\tau x; x \in \Omega', \tau \geqslant 1\} \subset R^n$, такого, что в $K_{\Omega'}$ справедлива оценка (4), для любого компакта $G' \subset \Omega'$ в $K_{G'}$ имеем

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} |D_z^\alpha v(z)| \leqslant e^{-\delta_1 |z|}, \qquad |z| \geqslant R_0, \tag{15}$$

при некоторых постоянных $\delta_1 > 0$ и достаточно большой R_0, причем δ_1, R_0 — зависят от G'.

Для решений системы (12) и уравнения (14), определенных вне некоторой конечной области, содержащей начало координат в R^n, отсюда вытекает, что если в окрестности бесконечности для решения удовлетворяется условие (4), то такое решение стремится к нулю при $|z| \to \infty$ согласно оценке (15).

Теорема 4. *Пусть*

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha_0 + |\alpha| \leqslant n_j} a_{\alpha_0 \alpha}^{lj}(x) D_{x_0}^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j = 0, \qquad l = 1, \ldots, N, \tag{16}$$

равномерно эллиптическая по И. Г. Петровскому система в области $K = \{x_0, x; |x_0| < 1, x \in K_{\Omega'}\}$, *где* $K_\omega = \{\tau x; x \in \omega, \tau \geqslant 1\}$ *и* Ω' — *ограниченная область в* R^n, *не содержащая начала координат. Пусть коэффициенты системы принадлежат классу* $C^{M+k}(K_{\Omega'})$, *где* $M = 2n + 2\left[\frac{n+1}{2}\right] + 7 + m$, k — *целое число*, $k \geqslant 0$ *и* $m = \max_j n_j$. *Пусть для любого мультииндекса* β, $|\beta| \leqslant M + k$, *справедливо неравенство*

$$|D_x^\beta a_{\alpha_0 \alpha}^{lj}(x)| \leqslant C(1 + |x|)^{-|\beta| - m + |\alpha| + \alpha_0}, \qquad C = \mathrm{const} > 0. \tag{17}$$

Тогда для любого решения $v(x)$ *системы*

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha_0 + |\alpha| \leqslant n_j} a_{\alpha_0 \alpha}^{lj}(x) D_x^\alpha v_j = 0, \qquad l = 1, \ldots, N, \tag{18}$$

удовлетворяющего в $K_{\Omega'}$ *неравенству*

$$|v(x)| \leqslant \exp[|x| b(|x|)], \tag{19}$$

где функция $b(|x|) \to 0$ *монотонно при* $|x| \to \infty$, *для любого компакта* $G' \subset \Omega'$ *справедлива в* $K_{G'}$ *оценка*

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k} |D_x^\alpha v(x)| \leqslant e^{-\delta_1 |x|} \quad \text{для } |x| \geqslant R_0 \tag{20}$$

при некоторой постоянной $\delta_1 > 0$ *и достаточно большом* R_0, *причем* δ_1, R_0 *зависит от* G'.

Доказательство. Рассмотрим систему, зависящую от параметра ϱ, вида

$$(21)\qquad \sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|+\alpha_0\leqslant n_j} a^{lj}_{\alpha_0\alpha}(\varrho x)\,\varrho^{m-|\alpha|-\alpha_0}D^{\alpha_0}_{x_0}D^{\alpha}_{x}u_{\varrho j}=0,\qquad l=1,\ldots,N,$$

в области $\Omega=\{x_0,x;\ |x_0|<1,\ x\in\Omega'\}$.

Согласно теореме И. Г. Петровского [6], если коэффициенты эллиптической в области $Q_\delta(\Omega)\subset R^{n+2}=(x_0,y_0,x)$ непрерывно дифференцируемы до порядка M и аналитичны по x_0+iy_0, то решения $u(x_0,x)$ этой системы из класса $C^{M+m-1}(\Omega)$ аналитичны по x_0. Из этой же теоремы следует аналитичность по x_0 производных $D^\alpha u$, $|\alpha|\leqslant k$, если коэффициенты системы аналитичны по x_0 и непрерывно дифференцируемы до порядка $M+k$, а функции $u\in C^{M+k+m-1}(\Omega)$. Кроме того, если коэффициенты не зависят от x_0, то для любого компакта $G\subset\Omega_1$, где $\overline{\Omega}_1\subset\Omega$, существуют постоянные $\delta_0>0$ и $C_0>0$ такие, что для любого решения $u\in C^{M+k+m-1}(\Omega)$ эллиптической системы (16) справедлива оценка

$$(22)\qquad \max_{Q\delta_0(G)}\sum_{|\alpha|\leqslant k}|D^\alpha_x u|\leqslant C_0\max_{\Omega_1}\sum_{|\alpha|+\alpha_0\leqslant M+k+m-1}|D^{\alpha_0}_{x_0}D^\alpha_x u|,$$

где C_0 и δ_0 зависят только от максимумов модулей производных от коэффициентов системы до порядка $M+k$ в Ω_1 (см. [6], стр. 23). Из условий (17) следует, что модули призводных от коэффициентов $a^{ej}_{\alpha_0\alpha}(\varrho x)\varrho^{m-|\alpha|-\alpha_0}$ системы (21) до порядка $M+k$ в области Ω' ограничены равномерно. Поэтому существуют постоянные δ_0, C_0 — не зависящие от ϱ и такие, что любое решение u_ϱ системы (21) из класса $C^{M+k+m-1}(\Omega)$ удовлетворяет оценке (22).

Согласно теоремам, доказанным в работах [3], [1], любое решение системы (21) дифференцируемо до порядка $M+k+m-1$, притом справедлива оценка

$$(23)\qquad \max_{\Omega_1}\sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant M+k+m-1}|D^{\alpha_0}_{x_0}D^\alpha_x u|\leqslant C_1\max_{\Omega}|u|,$$

где постоянная C_1 не зависит от ϱ, так как модули производных от коэффициентов системы (21) до порядка $M+k$ включительно в области Ω ограничены равномерно по ϱ. Из оценок (22), (23) получаем, что

$$(24)\qquad \max_{Q\delta_0(G)}\sum_{|\alpha|\leqslant k}|D^\alpha_x u|\leqslant C_2\max_{\Omega}|u|$$

для любого решения u_ϱ системы (21) из класса $C^{M+k+m-1}(\Omega)$, где постоянная C_2 — не зависит от ϱ.

Пусть $v(x)$ — решение системы

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{a_0+|\alpha|\leqslant n_j} a^{lj}_{a_0\alpha}(x)D^\alpha_x v_j = 0, \qquad l = 1,\ldots, N,$$

удовлетворяющее неравенству (19), и пусть существует последовательность $x^j \in K_{G'}$, $|x^j|\to\infty$ при $j\to\infty$ такая, что

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha_x v(x^j)| \geqslant e^{-\delta_1|x^j|}, \tag{25}$$

где $\delta_1 > 0$ — постоянная, которую мы выберем ниже. Пусть $x^j = \tau_j y^j$, где $y^j \in G'$ и $\tau_j\to\infty$ при $j\to\infty$.

Положим $\varrho_j = \tau_j$ и рассмотрим в Ω решение системы (21) вида $u_{\varrho_j}(x_0, x) = v(\varrho_j x)\exp(i\varrho_j x_0)$.

Из неравенства (19) следует, что

$$\max_{\Omega} |u_{\varrho_j}(x_0, x)| \leqslant \exp\{\varrho_j \max_{\Omega}(|x|\, b(\varrho_j |x|))\}. \tag{26}$$

Положим $G = \{x_0, x;\ |x_0| < \frac{1}{2}, x\in G'\}$. Тогда из оценки (25) вытекает, что

$$\max_{Q_\delta(G)} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha_x u_{\varrho_j}| \geqslant e^{\delta\varrho_j} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha_x v(x^j)| \geqslant e^{(\delta-\delta_1|y^j|)\varrho_j}. \tag{27}$$

Выберем δ_1 так, чтобы $\delta_1 \max_j |y^j| < \delta/2$.

Из оценок (26), (27) следует, что решения u_{ϱ_j} не удовлетворяют оценке (24) при $j\to\infty$. Это противоречие доказывает требуемый результат.

Следствие 1. *Пусть система*

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|\alpha|\leqslant n_j} a^{lj}_{\alpha}(x)D^\alpha_x v_j + a^l(x)v_l = 0, \qquad l = 1,\ldots, N, \tag{28}$$

такова, что

$$\det\left\| \sum_{|\alpha|=n_j} a^{ej}_\alpha(x)\,\xi^\alpha + \delta^{ej} a^l(x)\,\xi_0^{n_j}\right\| \geqslant C_0 = \mathrm{const} > 0$$

при любых $x\in \dot K_{\Omega'}$, Ω' — ограниченная область, не содержащая начала координат, $\xi\in R^n$, $\xi_0\in R^1, |\xi|+|\xi_0| \neq 0$; коэффициенты $a^{ej}_\alpha, a^l \in C^{M+k}(\Omega')$ и для любого мультииндекса $\beta, |\beta|\leqslant M+k$, в $K_{\Omega'}$ справедливы оценки

$$|D^\beta_x a^{ej}_\alpha(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-|\beta|-m-|\alpha|}$$

и

$$|D^\beta_x a^l(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-|\beta|-m+n_l}.$$

Тогда для любого решения $v(x)$ системы (28) такого, что в $K_{\Omega'}$

$$|v(x)| \leqslant e^{|x|b(|x|)},$$

в $K_{G'}$ справедлива оценка

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} |D_x^\alpha v(x)| \leqslant e^{-\delta_1|x|}, \qquad |x| \geqslant R_0,$$

при некоторых постоянных $\delta_1 > 0$ и достаточно большой R_0, G' — компакт и $\bar{G}' \subset \Omega'$.

Теорема, аналогичная теореме 4, справедлива также для систем, эллиптических по Дуглису - Ниренбергу.

Теорема 5. *Пусть система*

$$(29) \qquad D_{x_n} u_e = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant m} a_{\alpha_0\alpha}^{ej}(x) D_{x_0}^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j, \qquad l = 1, \ldots, N,$$

равномерно параболическая по И Г. Петровскому в области

$$K = \{x_0, x; |x_0| < 1, x \in K_{\Omega'}\},$$

где Ω' — ограниченная область в R^n, не содержащая начала координат, $a_n = 0$. Пусть коэффициенты системы (29) принадлежат классу $C^{m+k}(K_{\Omega'})$ и удовлетворяют условиям

$$(30) \qquad |D_x^\beta a_{\alpha_0\alpha}^{ej}(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-|\beta|-m+|\alpha|+\alpha_0}$$

для любого мультииндекса β, $|\beta| \leqslant m+k+1$. Тогда для любого решения $v(x)$ системы

$$(31) \qquad D_{x_n} v_l = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant m} a_{\alpha_0\alpha}^{lj}(x) D_x^\alpha v_j, \qquad l = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяющего в $K_{\Omega'}$ неравенству

$$(32) \qquad |v(x)| \leqslant \exp\left[a(|x|)\left(\sum_{j=1}^{n-1} |x_j| + |x_n|^{1/m}\right)\right],$$

где $a(|x|) \to 0$ монотонно при $|x| \to \infty$, справедлива оценка

$$(33) \qquad \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D_x^\alpha v(x)| \leqslant \exp\left[-\delta_1\left(\sum_{j=1}^{n-1} |x_j| + |x_n|^{1/m}\right)\right], \quad x \in K_{G'}, |x| \geqslant R_0,$$

для любого компакта $G' \subset \Omega'$ при некоторых постоянных $\delta_1 > 0$ и достаточно большой R_0, причем δ_1, R_0 — зависят от G'.

Доказательство. Рассмотрим в области $\Omega = \{x_0, x; |x_0| < 1, x \in \Omega'\} \subset R^{n+1}$ систему, зависящую от параметра ϱ, вида

$$(34) \quad D_{x_n} u_l = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant m} a_{\alpha_0\alpha}^{lj}(\varrho x_1, \ldots, \varrho x_{n-1}, \varrho^m x_n) \varrho^{m-|\alpha|-\alpha_0} D_{x_0}^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j,$$
$$l = 1, \ldots, N.$$

Как известно (см. [2]), если коэффициенты параболической по И. Г. Петровскому системы в области $Q_\delta(\Omega)$ аналитичны по x_0 и непрерывно дифференцируемы до порядка $m+k+1$, то решения $u(x_0, x)$ из класса $C^{m+k}(\Omega)$ аналитичны по x_0. Доказано (см. гл. II. § 2 [7]), что если коэффициенты системы не зависят от x_0, то для любого компакта $G \subset \Omega$ существуют постоянные $\delta_0 > 0$ и $C_0 > 0$ такие, что для любого решения $u \in C^{m+k}(\Omega)$ справедлива оценка

$$\max_{Q_{\delta_0}(G)} \sum_{|\alpha| \leqslant k} |D_x^\alpha u| \leqslant C_0 \max_{\Omega} |u|, \tag{35}$$

где δ_0, C_0 — зависят от G и от максимумов модулей производных коэффициентов системы до порядка $m+k+1$ включительно по области Ω.

В силу условий (30) модули производных от коэффициентов

$$a^{lj}_{\alpha_0\alpha}(\varrho x_1, \ldots, \varrho x_{n-1}, \varrho^m x_n)\, \varrho^{m-|\alpha|-\alpha_0}$$

системы (34) равномерно ограничены по ϱ в области Ω. Поэтому для любого решения $u \in C^{m+k}(\Omega)$ системы (34) справедлива оценка (35) с постоянными δ_0, C_0 — не зависящими от ϱ.

Если существует решение системы (31), удовлетворяющее оценке (32), но не удовлетворяющее неравенству (33), то, также как и при доказательстве теоремы 4, построим решения u_{ϱ_j} системы (34), не удовлетворяющие оценки (35) при $j \to \infty$.

Литература

[1] Л. Р. Волевич, *Локальные свойства решений квазиэллиптических систем* Матем. сб. 59 (доп.) (1962), стр. 3–52.

[2] В. В. Грушин, *Об одном классе гипоэллиптических операторов*, Матем. сб. 83 (125) (1970), стр. 456–473.

[3] A. Douglis, and L. Nirenberg, *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 8 (1955), стр. 503–538.

[4] О. А. Олейник и Е. В. Радкевич, *Оценки для собственных функций и решений некоторых систем уравнений с частными производными, зависящих от параметра*, У. М. Н. т. XXVIII, вып. 4 (1973), стр. 225–226.

[5] — *Об аналитичности решений линейных уравнений с частными производными*, Матем. сб. 90 (132), вып. 4 (1973), стр. 592–607.

[6] И. Г. Петровский, *Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles*, Матем. сб. 5 (47), вып. 1 (1939), стр. 3–70

[7] С. Д. Эйдельман, *Параболические системы*, изд. „Наука", Москва 1964.

Reçu par la Rédaction le 24. 7. 1973