ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVII (1966)

Über ein System von Funktionalgleichungen

von O. E. Gheorghiu (Timişoara) und S. Gołąb (Kraków)

In Verallgemeinerung der Gleichung [1]

$$f[x+yf(x)] = f(x)f(y) \tag{1}$$

auf komplexe Zahlen (mit zwei Einheiten) sind wir zu dem folgenden Funktionalgleichungssystem geführt

$$\begin{aligned} &P[x+zP(x,y)+CtQ(x,y),\, y+tP(x,y)+zQ(x,y)] \\ &\qquad\qquad = P(x,y)P(z,t)+CQ(x,y)Q(z,t)\,, \\ &Q[x+zP(x,y)+CtQ(x,y),\, y+tP(x,y)+zQ(x,y)] \\ &\qquad\qquad = P(x,y)Q(z,t)+P(z,t)Q(x,y)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

wo $P(x,y)$, $Q(x,y)$ zwei reelle gesuchte Funktionen von zwei reellen Veränderlichen sind und C eine reelle Konstante ist, die Rolle eines Parameters spielt.

Wir setzen voraus, daß die Funktionen P, Q in der ganzen reellen Ebene (x, y) definiert sind.

Was die Regularität der gesuchten Funktionen P, Q betrifft, so werden wir zweierlei Voraussetzungen machen. Da die Gleichung (1) bisher allgemein (ohne irgendwelche Regularitätsannahmen) noch nicht gelöst wurde [1], so ist es auch vorläufig hoffnungslos mit dem System (2) ohne Regularitätsvoraussetzungen auszukommen. Im ersten Schritt werden wir voraussetzen, daß die Transformation

$$\bar{x} = P(x,y)\,, \quad \bar{y} = Q(x,y) \tag{3}$$

im Großen umkehrbar ist.

Im zweiten Schritt dagegen werden wir über die Funktionen P, Q die Annahme machen, daß sie von der Klasse C^1 sind. Offenbar ist keine von diesen zwei Annahmen stärker als die andere.

Es wird sich herausstellen, daß nur für gewisse Werte der Konstanten C das System (2) sich auf eine Gleichung vom Typus (1) im komplexen Gebiete reduzieren läßt.

§ 1. Zunächst einige Folgerungen aus dem System (2) ohne irgendwelche Annahmen über die Funktionen P, Q.

Wir setzen

$$\lambda \overset{\mathrm{df}}{=} P(0,0), \quad \mu \overset{\mathrm{df}}{=} Q(0,0). \tag{4}$$

Hilfssatz 1. *Es sind nur folgende drei Fälle möglich*

$$\begin{array}{llll} \mathrm{I} & \lambda = 0, & \mu = 0, & \multirow{2}{*}{\Big\} \; C \text{ beliebig},} \\ \mathrm{II} & \lambda = 1, & \mu = 0, & \\ \mathrm{III} & \lambda = \tfrac{1}{2}, & \mu = \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{C}}, & \varepsilon^2 = 1, \quad C > 0. \end{array} \tag{5}$$

Daraus folgt insbesondere, daß der Fall $C \leqslant 0$ für $\mu \neq 0$ überhaupt nicht auftreten kann.

Beweis. Setzt man in (2) $x = y = t = z = 0$ ein, so erhält man folgende Beziehungen zwischen λ und μ

$$\begin{aligned} (\lambda-1)\lambda + C\mu^2 &= 0, \\ \mu\lambda + (\lambda-1)\mu &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Für $\mu = 0$ bekommen wir

$$(\lambda-1)\lambda = 0,$$

so daß die ersten zwei Möglichkeiten im Hilfssatz 1 bewiesen sind. Für $\mu \neq 0$ ergibt die zweite der Gleichungen (6) $\lambda = \frac{1}{2}$, was in die erste eingesetzt

$$C\mu^2 = \tfrac{1}{4}$$

mit sich zieht. Daraus folgt erstens, daß der Fall $C \leqslant 0$ nicht vorkommen kann und zweitens folgt eben die dritte Möglichkeit.

Die Möglichkeit $\lambda = \mu = 0$ führt zu $P \equiv 0$, $Q \equiv 0$ also zu der trivialen Lösung, von welcher wir weiterhin absehen werden.

Der Fall $\lambda = 1$, $\mu = 0$ wird im folgenden in Einzelheiten behandelt (unter zusätzlichen Regularitätsvoraussetzungen).

Das Ergebnis im Falle $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \varepsilon/2\sqrt{C}$ ist im folgenden Hilfssatz enthalten.

Hilfssatz 2. *Für $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \varepsilon/2\sqrt{C}$, $C > 0$ ist die allgemeine Lösung des Systems* (2) *durch folgende Formeln*

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \tfrac{1}{2} f(x + \varepsilon\sqrt{C}y), \\ Q(x,y) &= \frac{\varepsilon}{2\sqrt{C}} f(x + \varepsilon\sqrt{C}y) \end{aligned} \tag{7}$$

gegeben, wo $f(u)$ beliebige Lösung der Funktionalgleichung (1) *bedeutet.*

Beweis. Aus (2) erhält man für $t = z = 0$

$$
\begin{aligned}
P(x, y) &= \lambda P(x, y) + C\mu Q(x, y)\,, \\
Q(x, y) &= \mu P(x, y) + \lambda Q(x, y)\,,
\end{aligned} \tag{8}
$$

woraus für $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \varepsilon/2\sqrt{C}$

$$Q(x, y) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{C}} P(x, y) \tag{9}$$

folgt. Wird diese Beziehung in (2) berücksichtigt, so erhält man für $P(x, y)$ folgende Funktionalgleichung

$$P\left\{x + (z + t\varepsilon\sqrt{C})P(x, y), y + \frac{\varepsilon}{\sqrt{C}}(z + t\varepsilon\sqrt{C})P(x, y)\right\} = 2P(x, y)P(z, t). \tag{10}$$

Wird hier $x = y = t = 0$ bzw. $x = y = 0$ eingesetzt, so erhält man folgende zwei Gleichungen

$$P\left(\frac{z}{2}, \frac{\varepsilon}{2\sqrt{C}} z\right) = P(z, 0) \tag{11}$$

und

$$P\left\{\tfrac{1}{2}(z + \varepsilon t\sqrt{C}), \frac{\varepsilon}{2\sqrt{C}}(z + \varepsilon t\sqrt{C})\right\} = P(z, t)\,, \tag{12}$$

woraus

$$P(z, t) = P(z + t\varepsilon\sqrt{C}, 0) \tag{13}$$

zu schließen ist. Setzen wir kurz

$$f(u) \overset{\mathrm{df}}{=} 2P(u, 0)\,. \tag{14}$$

(13) kann also folgendermaßen

$$P(z, t) = \tfrac{1}{2} f(z + t\varepsilon\sqrt{C}) \tag{15}$$

geschrieben werden. Die Gleichung (10) ergibt für $y = t = 0$

$$P\left\{x + \frac{z}{2} f(x), \frac{\varepsilon z}{2\sqrt{C}} f(x)\right\} = \frac{f(x)f(z)}{2}\,. \tag{16}$$

(15) und (16) ergeben zusammen die Relation

$$f[x + zf(x)] = f(x)f(z)\,. \tag{17}$$

Aus (15) und (9) erhalten wir endlich

$$
\begin{aligned}
P(z, t) &= \tfrac{1}{2} f(z + t\varepsilon\sqrt{C})\,, \\
Q(z, t) &= \frac{\varepsilon}{2\sqrt{C}} f(z + t\varepsilon\sqrt{C})\,.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Auch umgekehrt bestätigt man leicht, daß System (P, Q), das durch (18) definiert ist, wo f die Gleichung (1) erfüllt, eine Lösung von (2) darstellt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkung. Wird zusätzlich die Derivierbarkeit der Lösung gefordert, so hat die Gleichung (1) [1] die einzige Schar von Lösungen

$$f(x) = 1 + 2mx \quad (m \text{ beliebige Konstante}) \tag{19}$$

so, daß die allgemeine Lösung von (2) folgendermaßen aussieht:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \tfrac{1}{2} + m(x + \varepsilon\sqrt{C}y)\,, \\ Q(x, y) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{C}}[\tfrac{1}{2} + m(x + \varepsilon\sqrt{C}y)]. \end{aligned} \tag{20}$$

§ 2. Kehren wir nun zur Annahme der Umkehrbarkeit der Transformation (3) zurück. Durch Umtausch der Veränderlichen $x \rightleftarrows z$ und $y \rightleftarrows t$ ändern sich die rechten Seiten von (2) nicht und folglich erhalten wir

$$\begin{aligned} &P[x + zP(x, y) + CtQ(x, y), y + tP(x, y) + zQ(x, y)] \\ &\qquad = P[z + xP(z, t) + CyQ(z, t), t + yP(z, t) + xQ(z, t)]\,, \\ &Q[x + zP(x, y) + CtQ(x, y), y + tP(x, y) + zQ(x, y)] \\ &\qquad = Q[z + xP(z, t) + CyQ(z, t), t + yP(z, t) + xQ(z, t)]\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Aus der Voraussetzung der Umkehrbarkeit der Transformation (3) folgt daraus das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + zP(x, y) + CtQ(x, y) &= x + zP(z, t) + CyQ(z, t)\,, \\ y + tP(x, y) + zQ(x, y) &= t + yP(z, t) + xQ(z, t)\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Für $y = t = 0$ erhält man aus (22)

$$\begin{aligned} x + zP(x, 0) &= z + xP(z, 0)\,, \\ zQ(x, 0) &= xQ(x, 0)\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Setzt man weiter

$$\alpha \overset{\text{df}}{=} P(1, 0)\,, \quad \beta \overset{\text{df}}{=} Q(1, 0)\,, \tag{24}$$

so ergibt (23) beim Einsetzen $z = 1$

$$\begin{aligned} P(x, 0) &= 1 + (\alpha - 1)x\,, \\ Q(x, 0) &= \beta x\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Das Einsetzen von $t = 0$ in (22) ergibt weiter

$$\begin{aligned} x + zP(x, y) &= z + xP(z, 0) + CyQ(z, 0)\,, \\ y + zQ(x, y) &= yP(z, 0) + xQ(z, 0) \end{aligned}$$

was unter Berücksichtigung von (25) in

$$x+zP(x,y)=z+x[1+(\alpha-1)z]+Cy\beta z\,,$$
$$y+zQ(x,y)=y[1+(\alpha-1)z]+x\beta z$$

übergeht. Das obige System soll für alle x, y, z erfüllt sein und daraus folgt die endgültige Gestalt für die gesuchten Funktionen

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 1+(\alpha-1)x+C\beta y\,, \\ Q(x,y) &= \beta x+(\alpha-1)y\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Man bestätigt ohne Schwierigkeit, daß für jede Wahl der Koeffizienten α, β, die mit Hilfe von (26) definierten Funktionen P, Q eine Lösung des Systems (2) bilden. Damit aber die Transformation (3) umkehrbar sei, ist es notwendig und hinreichend, daß die Konstanten α, β der Ungleichung

$$(\alpha-1)^2-C\beta^2\neq 0 \tag{27}$$

genügen.

Auf diese Weise haben wir das System (2) unter der Voraussetzung der Umkehrbarkeit der Transformation (3) vollständig gelöst.

§ 3. Jetzt machen wir die Voraussetzung, daß die Funktionen P, Q auf der ganzen Ebene mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung ausgestattet sind und wollen das System (2) unter dieser Voraussetzung lösen.

Wir bezeichnen mit P_1, P_2, Q_1, Q_2 entsprechend die ersten partiellen Ableitungen in bezug auf x bzw. y der Funktionen $P(x,y)$, $Q(x,y)$. Wir führen weiter die folgenden kurzen Bezeichnungen ein

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= P_2(x,0)\,, & \beta(x) &= Q_2(x,0)\,, \\ \gamma(y) &= P_1(0,y)\,, & \delta(y) &= Q_1(0,y)\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Das beideseitige Differenzieren der Gleichungen (2) in bezug auf t bzw. z und nachträgliches Einsetzen des Wertes Null für die Veränderliche in bezug auf welche das Differenzieren ausgeführt wurde, liefert uns das folgende System von Gleichungen

(29)

$$\begin{aligned} &P_1[x+zP(x,y),y+zQ(x,y)]\,CQ(x,y)+P_2[x+zP(x,y),y+zQ(x,y)]\,P(x,y) \\ &\qquad = \alpha(z)P(x,y)+C\beta(z)Q(z,y)\,, \\ &P_1[x+CtQ(x,y),y+tP(x,y)]\,P(x,y)+P_2[x+CtQ(x,y),y+tP(x,y)]\,Q(x,y) \\ &\qquad = \gamma(t)P(x,y)+C\delta(t)Q(x,y)\,, \\ &Q_1[x+zP(x,y),y+zQ(x,y)]\,CQ(x,y)+Q_2[x+zP(x,y),y+zQ(x,y)]\,P(x,y) \\ &\qquad = \beta(z)P(x,y)+\alpha(z)Q(x,y)\,, \\ &Q_1[x+CtQ(x,y),y+tP(x,y)]\,P(x,y)+Q_2[x+CtQ(x,y),y+tP(x,y)]\,Q(x,y) \\ &\qquad = \delta(t)P(x,y)+\gamma(t)Q(x,y)\,. \end{aligned}$$

Wir setzen weiter kurz

$$a \overset{\mathrm{df}}{=} a(0)\,,\quad \beta \overset{\mathrm{df}}{=} \beta(0)\,,\quad \gamma \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma(0)\,,\quad \delta \overset{\mathrm{df}}{=} \delta(0) \tag{30}$$

und setzen in (29) $z = t = 0$ ein. So erhalten wir

$$\begin{aligned} CQP_1 + PP_2 &= aP + C\beta Q\,,\\ PP_1 + QP_2 &= \gamma P + C\delta Q\,, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} CQQ_1 + PQ_2 &= \beta P + aQ\,,\\ PQ_1 + QQ_2 &= \delta P + \gamma Q\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Wir bezeichnen weiterhin die gemeinsame Cramersche Determinante der Systeme (31) und (32) mit

$$\Delta \overset{\mathrm{df}}{=} P^2 - CQ^2 \tag{33}$$

und nennen G die Menge der Punkte (x, y) der Ebene in welchen

$$\Delta \neq 0 \tag{34}$$

erfüllt ist. Für die Punkte der Menge G können die Systeme (31) und (32) folgendermaßen umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{\Delta}\,\{\gamma P^2 - (a - C\delta)PQ - C\beta Q^2\}\,,\\ P_2 &= \frac{1}{\Delta}\,\{aP^2 + C(\beta - \gamma)PQ - C^2\delta Q^2\}\,,\\ Q_1 &= \frac{1}{\Delta}\,\{\delta P^2 + (\gamma - \beta)PQ - aQ^2\}\,,\\ Q_2 &= \frac{1}{\Delta}\,\{\beta P^2 + (a - C\delta)PQ - C\gamma Q^2\}\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Es ist $\Delta(0, 0) = 1$ und folglich enthält die Menge G jedenfalls die Umgebung des Punktes $(0, 0)$. Schreiben wir jetzt die Integrabilitätsbedingungen für (35) aus:

$$P_{12} = P_{21} \quad \text{und} \quad Q_{12} = Q_{21}\,.$$

Dazu berechnen wir zuerst die partiellen Ableitungen

$$\Delta_1 = \frac{\partial \Delta}{\partial x} \quad \text{und} \quad \Delta_2 = \frac{\partial \Delta}{\partial y}\,.$$

Es ist

$$\Delta_1 = 2(PP_1 - CQQ_1)\,, \quad \Delta_2 = 2(PP_2 - CQQ_2)\,.$$

Die Ausführung der entsprechenden Rechnungen ergibt nach ziemlich langem Verfahren bei Berücksichtigung der folgenden symmetrischen Bezeichnungen:

$$(35^*)\qquad \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{\Delta}\{\alpha_{11}P^2+2\alpha_{12}PQ+\alpha_{22}Q^2\}\,, \\ P_2 &= \frac{1}{\Delta}\{\beta_{11}P^2+2\beta_{12}PQ+\beta_{22}Q^2\}\,, \\ Q_1 &= \frac{1}{\Delta}\{\gamma_{11}P^2+2\gamma_{12}PQ+\gamma_{22}Q^2\}\,, \\ Q_2 &= \frac{1}{\Delta}\{\delta_{11}P^2+2\delta_{12}PQ+\delta_{22}Q^2\}\,, \end{aligned}$$

$$(36)\qquad \begin{aligned} A_1 &= \gamma_{12}\delta_{11}-\gamma_{11}\delta_{12}\,, & A_2 &= \gamma_{22}\delta_{11}-\delta_{22}\gamma_{11}\,, & A_3 &= \gamma_{22}\delta_{12}-\gamma_{12}\delta_{22}\,, \\ D_1 &= \alpha_{11}\beta_{12}-\alpha_{12}\beta_{11}\,, & D_2 &= \alpha_{11}\beta_{22}-\alpha_{22}\beta_{11}\,, & D_3 &= \alpha_{12}\beta_{22}-\alpha_{22}\beta_{12}\,, \end{aligned}$$

$$(37)\qquad \begin{aligned} B_1 &= \delta_{12}\alpha_{11}-\gamma_{12}\beta_{11}\,, \\ B_2 &= \delta_{12}\alpha_{12}-\gamma_{12}\beta_{12}\,, \\ B_3 &= \delta_{22}\alpha_{11}-\gamma_{22}\beta_{11}\,, \\ B_4 &= \delta_{11}\alpha_{11}-\gamma_{11}\beta_{11}\,, \\ B_5 &= \delta_{11}\alpha_{12}-\gamma_{11}\beta_{12}\,, \\ B_6 &= \delta_{22}\alpha_{12}-\gamma_{22}\beta_{12}\,, \\ B_7 &= \delta_{11}\alpha_{22}-\gamma_{11}\beta_{22}\,, \\ B_8 &= \delta_{22}\alpha_{22}-\gamma_{22}\beta_{22}\,, \\ B_9 &= \delta_{12}\alpha_{22}-\gamma_{12}\beta_{22} \end{aligned}$$

die nachstehenden Relationen als Integrabilitätsbedingungen des Gleichungssystems (35*):

$$(38)\qquad \begin{aligned} P_{12}-P_{21} &= \frac{2}{\Delta^3}\sum_{i=0}^{5} P^iQ^{5-i}W_i = 0\,, \\ Q_{12}-Q_{21} &= \frac{2}{\Delta^3}\sum_{i=0}^{5} P^iQ^{5-i}Z_i = 0\,, \end{aligned}$$

wo W_i, Z_i homogene Polynome zweiten Grades der Variablen α_{jk}, β_{jk}, γ_{jk}, δ_{jk} sind und sich folgendermaßen durch A_l, D_l und B_l ausdrücken:

$$(39)\qquad \begin{aligned} W_0 &= -CD_3\,, & Z_0 &= CB_9\,, \\ W_1 &= C(B_6-D_2)\,, & Z_1 &= B_8+C(B_7+2B_2-A_3)\,, \\ W_2 &= D_3+B_8+C(B_3+2B_2-D_1)\,, & Z_2 &= B_9+2B_6+C(B_1-A_2+2B_5)\,, \\ W_3 &= D_2+B_6+2B_9+C(2B_1+B_4)\,, & Z_3 &= A_3+2B_2+B_3+C(B_4-A_1)\,, \\ W_4 &= D_1+2B_2+B_7+CB_4\,, & Z_4 &= B_1+A_2\,, \\ W_5 &= B_5\,, & Z_5 &= A_1\,. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}, \delta_{ik}$ sehen (als Funktionen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und des Parameters C) folgendermaßen aus:

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_{11} = \gamma\,, & \beta_{11} = \alpha\,, & \gamma_{11} = \delta\,, & \delta_{11} = \beta\,, \\
\alpha_{12} = \tfrac{1}{2}(C\delta - \alpha)\,, & \beta_{12} = \tfrac{1}{2}C(\beta - \gamma)\,, & \gamma_{12} = \tfrac{1}{2}(\gamma - \beta)\,, & \delta_{12} = \tfrac{1}{2}(\alpha - C\delta)\,, \\
\alpha_{22} = -C\beta\,, & \beta_{22} = -C^2\delta\,, & \gamma_{22} = -\alpha\,, & \delta_{22} = -C\gamma\,.
\end{array} \tag{40}
$$

Folglich nehmen die Polynome A_j, D_j, B_k folgende Gestalt an

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \tfrac{1}{2}(\beta\gamma - \beta^2 - \alpha\delta + C\delta^2)\,, \\
A_2 &= -\alpha\beta + C\gamma\delta\,, \\
A_3 &= \tfrac{1}{2}(C\alpha\delta - \alpha^2 + C\gamma^2 - C\beta\gamma)\,, \\
D_1 &= \tfrac{1}{2}(C\beta\gamma - C\gamma^2 - C\alpha\delta + \alpha^2)\,, \\
D_2 &= -C^2\gamma\delta + C\alpha\beta\,, \\
D_3 &= \tfrac{1}{2}(C^2\alpha\delta - C^3\delta^2 + C^2\beta^2 - C^2\beta\gamma)\,, \\
B_1 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\beta - C\gamma\delta)\,, \\
B_2 &= \tfrac{1}{4}(-\alpha^2 + 2C\alpha\delta - C^2\delta^2 + C\beta^2 - 2C\beta\gamma + C\gamma^2)\,, \\
B_3 &= \alpha^2 - C\gamma^2\,, \\
B_4 &= \beta\gamma - \alpha\delta\,, \\
B_5 &= \tfrac{1}{2}(C\gamma\delta - \alpha\beta)\,, \\
B_6 &= \tfrac{1}{2}(C\alpha\beta - C^2\gamma\delta)\,, \\
B_7 &= -C\beta^2 + C^2\delta^2\,, \\
B_8 &= C^2\beta\gamma - C^2\alpha\delta\,, \\
B_9 &= \tfrac{1}{2}(C^2\gamma\delta - C\alpha\beta)\,.
\end{aligned} \tag{41}
$$

Wir berechnen weiterhin die W_j und Z_j in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, C$

$$
\begin{aligned}
W_0 &= \tfrac{1}{2}C^3(\beta\gamma - \beta^2 + C\delta^2 - \alpha\delta) = C^3 Z_5\,, \\
W_1 &= C^2(C\gamma\delta - \alpha\beta) = C^2 Z_4\,, \\
W_2 &= C^2(\alpha\delta - \beta\gamma + \beta^2 - C\delta^2) = C Z_3\,, \\
W_3 &= C(\alpha\beta - C\gamma\delta) = Z_2\,, \\
C W_4 &= \tfrac{1}{2}C^2(\beta\gamma - \alpha\delta - \beta^2 + C\delta^2) = Z_1\,, \\
C^2 W_5 &= \tfrac{1}{2}C^2(C\gamma\delta - \alpha\beta) = Z_0\,.
\end{aligned} \tag{42}
$$

Daraus ist es zu ersehen, daß sich die Koeffizienten W_j, Z_j einfach durch A_1 und A_2 ausdrücken lassen und zwar folgendermaßen

$$
(43) \qquad
\begin{aligned}
W_0 &= C^3A_1\,, & Z_5 &= A_1\,,\\
W_1 &= C^2A_2\,, & Z_4 &= A_2\,,\\
W_2 &= -2C^2A_1\,, & Z_3 &= -2CA_1\,,\\
W_3 &= -CA_2\,, & Z_2 &= -CA_2\,,\\
W_4 &= CA_1\,, & Z_1 &= C^2A_1\,,\\
W_5 &= \tfrac{1}{2}A_2\,, & Z_0 &= \tfrac{1}{2}C^2A_2\,.
\end{aligned}
$$

Nun werden wir zwei Fälle unterscheiden. Es ist $Q(0,0)=0$.

I Fall. Es gibt eine Umgebung des Punktes $(0,0)$ in welchem $Q(x,y)$ identisch verschwindet.

II Fall. In jeder Umgebung des Punktes $(0,0)$ gibt es Punkte (x,y) in welchen $Q(x,y)\neq 0$.

Wir betrachten zunächst den Fall I. In diesem Fall gilt

$$Q_1 = Q_2 \equiv 0$$

in der Umgebung des Punktes $(0,0)$ und, da in diesem Falle

$$Q_1 = \frac{1}{\Delta}\{\delta P^2\} = \frac{1}{P^2}\delta P^2 = \delta\,, \qquad P_1 = \frac{1}{\Delta}\{\gamma P^2\} = \gamma\,,$$

$$Q_2 = \frac{1}{\Delta}\{\beta P^2\} = \beta\,, \qquad P_2 = \frac{1}{\Delta}\{\alpha P^2\} = \alpha$$

ist, so haben wir

$$
\begin{aligned}
P &= 1+\gamma x+\alpha y\,,\\
Q &= \delta x+\beta y
\end{aligned}
$$

in der Umgebung des Punktes $(0,0)$. Folglich müssen wir haben

$$\delta = \beta = 0\,,$$

woraus

$$
(44) \qquad
\begin{aligned}
P &= 1+\gamma x+\alpha y\,,\\
Q &= 0
\end{aligned}
$$

in der Umgebung des Punktes $(0,0)$ folgt.

Wir behaupten, daß die (44) auf der ganzen Ebene (x,y) bestehen müssen. Tatsächlich, es gilt auf Grund der Relationen (35)

$$
(45) \qquad
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{\Delta}(\gamma P^2 - \alpha PQ)\,,\\
P_2 &= \frac{1}{\Delta}(\alpha P^2 - C\gamma PQ)\,,\\
Q_1 &= \frac{1}{\Delta}(\gamma PQ - \alpha Q^2)\,,\\
Q_2 &= \frac{1}{\Delta}(\alpha PQ - C\gamma Q^2)\,.
\end{aligned}
$$

Man bestätigt ohne Schwierigkeit, daß in diesem Falle folgende Relationen gelten

$$P_{12} = P_{21} = 0\,, \qquad Q_{12} = Q_{21} = 0$$

und daraus folgt unmittelbar die Linearität der Funktionen P, Q und folglich auch das Bestehen der Formeln (44) auf der ganzen Ebene (x, y). Genauer gesagt, bestehen die Formeln (44) im Gebiete, das den Nullpunkt enthält und in welchem Δ von Null verschieden ist. Da sich aber Δ zu P^2 reduziert, so ist $\Delta = 0$ auf der Geraden $1 + \gamma x + \alpha y = 0$ (im Falle $\alpha^2 + \gamma^2 > 0$, anderenfalls ist $\Delta \equiv 1$) und folglich könnte P auf der zweiten Hälfte der Ebene eine andere lineare Funktion sein; da aber die Differenzierbarkeit vorausgesetzt wurde, so muß die einheitliche Formel (44) auf der ganzen Ebene gelten.

Jetzt gehen wir zu dem zweiten Fall über, wo Q in jeder Umgebung des Punktes $(0, 0)$ die von Null verschiedenen Werte annimmt. Kehren wir zu der Integrabilitätsbedingung (38) zurück

$$\sum_{i=0}^{5} P^i Q^{5-i} Z_i = 0\,. \tag{46}$$

Für $x = y = 0$ bekommen wir wegen $P(0, 0) = 1$, $Q(0, 0) = 0$

$$Z_5 = 0\,. \tag{47}$$

Die Bedingung (46) reduziert sich folglich zur Gleichung

$$\sum_{i=0}^{4} P^i Q^{5-i} Z_i = 0$$

oder

$$Q \sum_{i=0}^{4} P^i Q^{4-i} Z_i = 0\,.$$

Da es Punkte gibt, für welche $Q \neq 0$, so können wir schreiben

$$\sum_{i=0}^{4} P^i Q^{4-i} Z_i = 0$$

und beim Grenzübergang $(x, y) \to (0, 0)$ erhalten wir daraus

$$Z_4 = 0\,. \tag{48}$$

Die Bedingungen (47) und (48) sind gleichwärtig mit den Bedingungen

$$A_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 = 0 \tag{49}$$

und aus den Formeln (43) folgt, daß dann alle W_j und Z_j verschwinden müssen. Die beiden Gleichungen (47) und (48) sind unabhängig und lauten

$$\begin{aligned} \beta\gamma - \beta^2 - a\delta + C\delta^2 &= 0\,, \\ C\gamma\delta - a\beta &= 0\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Den Fall $\beta = \delta = 0$ haben wir schon behandelt. Setzen wir nun weiter voraus, daß

$$\delta \neq 0\,. \tag{51}$$

Ist $\beta = 0$, so ergibt die erste Gleichung

$$\delta(C\delta - a) = 0$$

oder wegen (51)

$$a = C\delta\,. \tag{52}$$

Dies eingesetzt in die zweite Gleichung

$$C\delta(\beta - \gamma) = 0$$

ergibt. Dies ist gleichwertig mit

$$C(\beta - \gamma) = 0\,. \tag{53}$$

Jetzt müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Konstante C verschwindet, oder ist sie von Null verschieden.

Für

$$C = 0 \tag{54}$$

haben wir $a = 0$ und folglich die Relationen (45) die folgende Form annehmen

$$\begin{aligned} P_1 &= \gamma\,, \\ P_2 &= a = 0\,, \\ Q_1 &= \delta + \gamma\frac{Q}{P}\,, \\ Q_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{55}$$

Die Integration des Gleichungssystems (55) ist einfach. Die ersten zwei Gleichungen (zusammen mit der Anfangsbedingung $P(0,0) = 1$) ergeben

$$P = 1 + \gamma x + ay = 1 + \gamma x\,. \tag{56}$$

Die vierte gibt

$$Q = \omega(x)\,, \tag{57}$$

was, in die dritte eingesetzt, die folgende Differentialgleichung liefert

$$\frac{d\omega}{dx} = \delta + \gamma\frac{\omega}{1+\gamma x}\,. \tag{58}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung, die sich effektiv integrieren läßt. Wir bekommen

$$\omega(x) = \frac{\delta}{\gamma}(1+\gamma x)\ln(1+\gamma x) \qquad \text{für} \qquad \gamma \neq 0\,.$$

Man bestätigt leicht, daß das Paar der Funktionen

$$\begin{aligned} P &= 1+\gamma x\,, \\ Q &= \frac{\delta}{\gamma}(1+\gamma x)\ln(1+\gamma x) \end{aligned} \tag{59}$$

tatsächlich eine Lösung des Gleichungssystems (2) darstellt. Für $\gamma = 0$ erhalten wir

$$\begin{gathered} P \equiv 1\,, \\ \frac{d\omega}{dx} = \delta \end{gathered}$$

also

$$\omega(x) = \delta(x) \qquad (\omega(0) = Q(0,0) = 0)$$

und das Paar

$$P(x,y) \equiv 1\,, \qquad Q(x,y) = \delta x \tag{60}$$

stellt wiederum eine Lösung des Systems (2) dar.

Für

$$C \neq 0 \tag{61}$$

ergibt die Gleichung (53) die Relation

$$\gamma = \beta\,,$$

was zusammen mit $\beta = 0$

$$\gamma = 0$$

ergibt. Die Gleichungen (45) nehmen jetzt die folgende Form an

$$\begin{aligned} P_1 &= 0\,, \\ P_2 &= \frac{1}{\Delta} C\delta(P^2 - CQ^2) = C\delta\,, \\ Q_1 &= \frac{1}{\Delta}\delta(P^2 - CQ^2) = \delta\,, \\ Q_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Integration dieses Gleichungssystems führt zu

$$\begin{aligned} P &= 1 + C\delta y\,, \\ Q &= \delta x\,. \end{aligned} \tag{62}$$

Ist endlich

(63) $$\beta \neq 0 \quad \text{und} \quad \delta \neq 0 \,,$$

so erhalten wir durch Eliminieren von a aus den Gleichungen (50)

(64) $$a = C\gamma\delta/\beta \,, \qquad a = \frac{\beta\gamma - \beta^2 + C\delta^2}{\delta}$$

die folgende Relation

$$C\gamma\delta^2 - \beta^2\gamma + \beta^3 - C\beta\delta^2 = 0$$

oder

$$\gamma(C\delta^2 - \beta^2) - \beta(C\delta^2 - \beta^2) = 0 \,,$$

oder endlich

(65) $$(\gamma - \beta)(C\delta^2 - \beta^2) = 0 \,.$$

Dies führt zur folgenden Alternative

(66) $$\gamma = \beta$$

oder

(67) $$\beta^2 = C\delta^2 \,.$$

Die Relation (66) ergibt

$$a = C\delta$$

und die Gleichungen (45) erhalten die Form

$$P_1 = \frac{1}{\Delta}(\beta P^2 - C\beta Q^2) = \beta \,,$$

$$P_2 = \frac{1}{\Delta}(C\delta P^2 - C^2\delta Q^2) = C\delta \,,$$

$$Q_1 = \frac{1}{\Delta}(\delta P^2 - C\delta Q^2) = \delta \,,$$

$$Q_2 = \frac{1}{\Delta}(\beta P^2 - C\beta Q^2) = \beta \,,$$

was zu

(68) $$P = 1 + \beta x + C\delta y \,, \qquad Q = \delta x + \beta y$$

führt. Es bleibt uns also nur den Fall (67)

$$\beta^2 = C\delta^2$$

zu erledigen, was nur im Falle $C > 0$ eintreffen kann. Es ist dann

$$\beta = \varepsilon\delta\sqrt{C} \qquad (\varepsilon^2 = 1)$$

und folglich wegen der zweiten Gleichung (50):

$$a = \varepsilon\gamma\sqrt{C} \,.$$

Die Gleichungen (45) nehmen jetzt die folgende Form an

$$(69)\quad \begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{\Delta}\{\gamma P^2-[\varepsilon\gamma\sqrt{C}-C\delta]PQ-C\sqrt{C}\varepsilon\delta Q^2\}\,, \\ P_2 &= \frac{1}{\Delta}\{\varepsilon\gamma\sqrt{C}P^2+C[\varepsilon\delta\sqrt{C}-\gamma]PQ-C^2\delta Q^2\}\,, \\ Q_1 &= \frac{1}{\Delta}\{\delta P^2+[\gamma-\varepsilon\delta\sqrt{C}]PQ-\varepsilon\gamma\sqrt{C}Q^2\}\,, \\ Q_2 &= \frac{1}{\Delta}\{\varepsilon\delta\sqrt{C}P^2+[\varepsilon\gamma\sqrt{C}-C\delta]PQ-C\gamma Q^2\}\,. \end{aligned}$$

Dieser Spezialfall bietet die größten Schwierigkeiten dar. Zunächst bemerken wir, daß die folgenden Relationen bestehen

$$(70)\quad P_2 = \varepsilon\sqrt{C}P_1\,,\qquad Q_2 = \varepsilon\sqrt{C}Q_1\,.$$

Daraus ist es zu ersehen, daß es zwei (differenzierbare) Funktionen einer Veränderlichen existieren φ und ψ, so daß

$$(71)\quad P(x,y) = \varphi[x+\varepsilon\sqrt{C}y]\,,\qquad Q(x,y) = \psi[x+\varepsilon\sqrt{C}y]\,.$$

Wenn weiter die folgenden kurzen Bezeichnungen eingeführt werden

$$(72)\quad \begin{aligned} \mu &= \gamma-\varepsilon\sqrt{C}\delta\,, \\ \nu &= \gamma+\varepsilon\sqrt{C}\delta\,, \\ \lambda &= C\delta-\varepsilon\sqrt{C}\gamma = -\varepsilon\sqrt{C}\mu\,, \end{aligned}$$

so bekommt man nach leichten Umformungen der rechten Seiten von (69)

$$(73)\quad \begin{aligned} P_1 &= \gamma+\frac{\lambda Q}{P+\varepsilon\sqrt{C}Q}\,, \\ P_2 &= \varepsilon\sqrt{C}\left[\gamma+\frac{\lambda Q}{P+\varepsilon\sqrt{C}Q}\right], \\ Q_1 &= \delta+\frac{\mu Q}{P+\varepsilon\sqrt{C}Q}\,, \\ Q_2 &= \varepsilon\sqrt{C}\left[\delta+\frac{\mu Q}{P+\varepsilon\sqrt{C}Q}\right]. \end{aligned}$$

Wenn wir nun (71) in Betracht ziehen, so können wir folgern $[u = x+\varepsilon\sqrt{C}y]$

$$(74)\quad \begin{aligned} \varphi'(u) &= \gamma+\frac{\lambda\psi(u)}{\varphi(u)+\varepsilon\sqrt{C}\psi(u)}\,, \\ \psi'(u) &= \delta+\frac{\mu\psi(u)}{\varphi(u)+\varepsilon\sqrt{C}\psi(u)}\,. \end{aligned}$$

Aus (74) erhalten wir:

$$\mu\varphi' - \lambda\psi' = \gamma\mu - \delta\lambda$$

oder

(75) $$\mu\varphi(u) - \lambda\psi(u) = \varrho u + \sigma$$

wo

(76) $$\varrho \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma\mu - \delta\lambda = \gamma^2 - C\delta^2 .$$

Den Wert der Konstanten σ ermitteln wir einfach aus den Relationen

$$\varphi(0) = P(0,0) = 1 , \qquad \psi(0) = Q(0,0) = 0$$

und wir bekommen so

$$\mu\varphi(u) - \lambda\psi(u) = \varrho\mu + \mu .$$

Der obigen Relation kann auch die Form

(77) $$\mu[\varphi(u) + \varepsilon\sqrt{C}\psi(u)] = \varrho u + \mu$$

angegeben werden.

Das Einsetzen der Formeln (71) in das System (2) ergibt:

$$\begin{aligned}\varphi\{x + z\varphi(x+\varepsilon\sqrt{C}y) + Ct\psi(x+\varepsilon\sqrt{C}y) +\\ + \varepsilon\sqrt{C}[y + t\varphi(x+\varepsilon\sqrt{C}y) + z\psi(x+\varepsilon\sqrt{C}y)]\}\\ = \varphi(x+\varepsilon\sqrt{C}y)\varphi(z+\varepsilon\sqrt{C}t) + C\psi(x+\varepsilon\sqrt{C}y)\psi(z+\varepsilon\sqrt{C}t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi\{x + z\varphi(x+\varepsilon\sqrt{C}y) + Ct\psi(x+\varepsilon\sqrt{C}y) +\\ + \varepsilon\sqrt{C}[y + t\varphi(x+\varepsilon\sqrt{C}y) + z\psi(x+\varepsilon\sqrt{C}y)]\}\\ = \varphi(x+\varepsilon\sqrt{C}y)\psi(z+\varepsilon\sqrt{C}t) + \varphi(z+\varepsilon\sqrt{C}t)\psi(x+\varepsilon\sqrt{C}y) .\end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen ergibt für $y = t = 0$

(78) $$\varphi\{x + z\varphi(x) + \varepsilon\sqrt{C}z\psi(x)\} = \varphi(x)\varphi(z) + C\psi(x)\psi(z) .$$

Zunächst betrachten wir den Spezialfall

$$\mu = 0 .$$

Dann ist auch $\lambda = 0$ und aus den Gleichungen (74) erhalten wir

$$\varphi'(u) = \gamma , \qquad \psi'(u) = \delta$$

woraus

$$\varphi(u) = 1 + \gamma u , \qquad \psi(u) = \delta u$$

folgt. Aus (71) bekommen wir

$$P(x,y) = 1 + \gamma(x+\varepsilon\sqrt{C}y) ,$$
$$Q(x,y) = \delta(x+\varepsilon\sqrt{C}y) .$$

Aus $\mu = 0$ folgt weiter

$$\gamma = \varepsilon\sqrt{C}\delta$$

was zu

$$(79) \qquad \begin{aligned} P(x, y) &= 1 + \varepsilon\sqrt{C}\delta x + C\delta y\,, \\ Q(x, y) &= \delta x + \varepsilon\sqrt{C}\delta y\,. \end{aligned}$$

führt.

Man bestätigt ohne Schwierigkeit, daß das Paar von Funktionen (79) tatsächlich eine Lösung des Systems (2) darstellt.

Wir gehen zum Fall

$$\mu \neq 0$$

über. Differentiation der Gleichung (78) in bezug auf x ergibt

$$\varphi'\{x + z[\varphi(x) + \varepsilon\sqrt{C}\psi(x)]\}\{1 + z\varphi'(x) + \varepsilon\sqrt{C}z\psi'(x)\} \\ = \varphi'(x)\varphi(z) + C\psi'(x)\psi(z)\,.$$

Setzt man hier $x = 0$ und berücksichtigt die Relationen

$$\varphi'(0) = \gamma\,, \qquad \psi'(0) = \delta$$

so bekommt man

$$\varphi'(z)[1 + (\gamma + \varepsilon\sqrt{C}\delta)z] = \gamma\varphi(z) + C\delta\psi(z)\,.$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (77) und der Bezeichnung (72) kann die letzte Gleichung folgendermaßen umgeschrieben werden (man beachte daß $\varrho = \mu\nu$ ist)

$$\varphi'(z)(1 + \nu z) = \varphi(z)(\gamma - \varepsilon\sqrt{C}\delta) + \varepsilon\sqrt{C}\delta(1 + \nu z)$$

oder

$$(80) \qquad \varphi'(z) = \frac{\mu\varphi(z)}{1 + \nu z} + \varepsilon\sqrt{C}\delta\,.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung, die leicht integrierbar ist.

Zunächst behandeln wir den Spezialfall

$$(81) \qquad \nu = 0\,.$$

In diesem Fall haben wir

$$\varphi'(z) = \mu\varphi(z) + \varepsilon\sqrt{C}\delta\,.$$

Da aber $\nu = 0$ zu

$$\gamma = -\varepsilon\sqrt{C}\delta$$

führt, so haben wir

$$\mu = -2\varepsilon\sqrt{C}\delta$$

und folglich

$$\varphi'(z) = -2\varepsilon\sqrt{C}\delta\varphi(z) + \varepsilon\sqrt{C}\delta\,.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(1+e^{-2\varepsilon\sqrt{C}\delta x}) \tag{82}$$

was

$$\psi = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{C}}(1-e^{-2\varepsilon\sqrt{C}\delta x}) \tag{83}$$

mit sich bringt.

Man bestätigt ohne größere Schwierigkeit, daß das Paar der Funktionen (82), (83) zusammen mit (71) wirklich eine Lösung des Systems (2) darstellt und zwar für jeden Wert der Konstanten δ.

Nun setzen wir

$$\nu \neq 0 \tag{84}$$

voraus. In diesem Fall ergibt die Integration der Differentialgleichung (80) und die Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 1$ die folgende Formel für φ

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}[1+\nu x+\operatorname{sgn}(1+\nu x)|1+\nu x|^{\mu/\nu}] \quad \text{falls} \quad \mu \neq \nu \tag{85a}$$

und

$$\varphi(x) = 1+\nu x+\varepsilon\sqrt{C}\delta(1+\nu x)\ln|1+\nu x| \quad \text{falls} \quad \mu = \nu\,. \tag{85b}$$

Betrachten wir zunächst den zweiten Fall.

Die Bedingung $\mu = \nu$

$$\delta = 0$$

ergibt was die Gestalt der Funktion φ zu

$$\varphi(x) = 1+\nu x = 1+\gamma x$$

reduziert. Die Relation (77) ergibt dann für ψ die Formel

$$\psi(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{C}}[1+\mu x-\varphi(x)] = \frac{\varepsilon}{\sqrt{C}}[\mu x-\nu x] = 0\,.$$

Die Berücksichtigung dieser Formeln in den Relationen (71) ergibt

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 1+\gamma(x+\varepsilon\sqrt{C}y)\,, \\ Q(x,y) &= 0\,. \end{aligned} \tag{86}$$

Man stellt fest, daß das obige Paar der Funktionen (86) für jedes γ eine Lösung des Systems (2) darstellt.

Jetzt setzen wir

$$\nu \neq 0\,, \quad \mu \neq 0\,, \quad \nu \neq \mu \tag{87}$$

voraus und untersuchen wir wann die Funktion (85a) zusammen mit der Funktion

$$\psi(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{C}}\big(1+\nu x-\varphi(x)\big) \tag{88}$$

eine Lösung des Systems (2) darstellt.

Es stellt sich heraus, daß tatsächlich immer (für jede μ, ν) die Funktion (85a) zusammen mit (88) eine Lösung des Gleichungssystems (2) darstellt. Es zeigt sich auch *a posteriori*, daß für $\mu = \nu$ die Funktion (85a) sich zur

$$\varphi(x) = 1 + \nu x$$

reduziert, was mit (68) [für $\delta = 0$] zusammenfällt.

Somit haben wir das System vollständig gelöst. Einfachheitshalber stellen wir die Resultate zusammen.

Die Gesamtheit der differenzierbaren Lösungen (P, Q) *des Systems* (2) *ist in den nachstehenden Formeln enthalten.*

Für $C = 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} P &= 1 + \gamma x + a y \,, \\ Q &= 0 \end{aligned} \tag{89}$$

oder

$$\begin{aligned} P &= 1 + \gamma x \,, \qquad \gamma \neq 0 \,, \\ Q &= \frac{\delta}{\gamma}(1 + \gamma x)\ln|1 + \gamma x| \end{aligned} \tag{90}$$

oder

$$\begin{aligned} P &= 1 + \beta x \,, \\ Q &= \delta x + \beta y \,. \end{aligned} \tag{91}$$

Die erste zwei Scharen von Lösungen, sowie die dritte Unterschar (für $\beta = 0$) bilden singuläre Lösungen in dem Sinne, daß die Transformation (3) nicht umkehrbar ist (die Jacobische Determinante identisch verschwindet).

Für $C < 0$ lautet die allgemeine Lösung folgendermaßen

$$\begin{aligned} P &= 1 + \gamma x + a y \,, \\ Q &= 0 \end{aligned} \tag{92}$$

oder

$$\begin{aligned} P &= 1 + \beta x + C\delta y \,, \\ Q &= \delta x + \beta y \,. \end{aligned} \tag{93}$$

Dagegen für $C > 0$ haben wir die folgenden Scharen von Lösungen

$$\begin{cases} P = 1 + \gamma x + a y \,, \\ Q = 0 \,, \end{cases} \tag{94}$$

$$\begin{cases} P = 1 + \beta x + C\delta y \,, \\ Q = \delta x + \beta y \end{cases} \tag{95}$$

(darunter auch für $\beta = \varepsilon\sqrt{C}$ die Lösung (79)),

$$(96)\qquad \begin{cases} P = \frac{1}{2}[1 + e^{-2\varepsilon\sqrt{C}\delta(x+\varepsilon\sqrt{C}y)}]\,, \\ Q = \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{C}}[1 - e^{-2\varepsilon\sqrt{C}\delta(x+\varepsilon\sqrt{C}y)}]\,, \end{cases}$$

$$(97)\qquad \begin{cases} P = 1 + \gamma x + \varepsilon\sqrt{C}\gamma y\,, \\ Q = 0\,, \end{cases}$$

$$(98)\qquad \begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\left\{\omega + \operatorname{sgn}\omega|\omega|^{\frac{\gamma+\varepsilon\sqrt{C}\delta}{\gamma-\varepsilon\sqrt{C}\delta}}\right\}, \\ Q &= \frac{\varepsilon}{2\sqrt{C}}\left\{\omega - \operatorname{sgn}(\omega)|\omega|^{\frac{\gamma+\varepsilon\sqrt{C}\delta}{\gamma-\varepsilon\sqrt{C}\delta}}\right\} \end{aligned}$$

für $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$, $\gamma \neq \varepsilon\sqrt{C}\delta$, $\gamma \neq -\varepsilon\sqrt{C}\delta$, wo

$$\omega = \omega(x, y) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 1 + (\gamma + \varepsilon\sqrt{C}\delta)(x + \varepsilon\sqrt{C}y)\,.$$

$$(99)\qquad \begin{aligned} P &= \tfrac{1}{2} + \gamma(x + \varepsilon\sqrt{C}y)\,, \\ Q &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{C}}\{\tfrac{1}{2} + \gamma(x + \varepsilon\sqrt{C}y)\}\,. \end{aligned}$$

Unter diesen Lösungen sind die (94), (96), (97), (98), (99) singulär und für $\beta = \varepsilon\sqrt{C}\delta$ auch (95) singulär.

§ 4. Nehmen wir jetzt in Betracht den Körper $\mathfrak{K}$ der reellen Zahlen und über ihn die Algebra der komplexen Zahlen mit zwei Einheiten e_0, e_1:

$$xe_0 + ye_1 \qquad (x, y \in \mathfrak{K})\,.$$

Bekanntlich kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Multiplikationstabelle der Einheiten e_0, e_1 folgendermaßen aussieht

	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	Ce_0

, $C \in \mathfrak{K}$

und die drei *wesentlich* verschiedenen und untereinander nicht isomorphen Algebren den folgenden drei Werten der reellen Konstanten C entsprechen

$$(100)\qquad \begin{array}{lll} \mathrm{I} & C = -1 & \text{(gewöhnliche komplexe Zahlen)}\,, \\ \mathrm{II} & C = 0 & \text{(duale Zahlen von E. Study)}\,, \\ \mathrm{III} & C = 1\,. & \end{array}$$

Es sei ferner

$$F(xe_0 + ye_1)$$

eine eindeutige Funktion, deren Wertbereich eben in dem komplexen Zahlenbereich liegt. Wir können also schreiben

$$F(xe_0 + ye_1) = P(x, y)e_0 + Q(x, y)e_1 , \tag{101}$$

wo P und Q zwei Funktionen von zwei reellen Veränderlichen sind. Setzen wir nun voraus, daß die Funktion F die Gleichung von Gołąb-Schinzel erfüllt, d.h. (ween mit ω, τ die komplexen Zahlen bezeichnet werden) die Gleichung:

$$F[\omega + \tau F(\omega)] = F(\omega)F(\tau) . \tag{102}$$

Wird diese Gleichung auf die reellen Komponenten der gesuchten Funktion F ausgeschrieben, so bekommen wir eben das unsere Gleichungssystem (2).

Es interessieren uns weiterhin nur diejenigen Lösungen, die den drei Werten (100) der Konstanten C entsprechen. Nach der allgemeinen Tabelle der Lösungen, die am Ende des vorigen Paragraphen angegeben ist lauten die Lösungen folgendermaßen

I Fall. $C = -1$.

$$\begin{cases} P = 1 + \gamma x + a y , \\ Q = 0 , \end{cases} \tag{103}$$

$$\begin{cases} P = 1 + \beta x - \delta y , \\ Q = \delta x + \beta y . \end{cases} \tag{104}$$

Beide Scharen sind zweiparametrige Scharen. Die erste liefert lauter singuläre Transformationen, die zweite liefert (für $\beta^2 + \gamma^2 > 0$) nichtsinguläre Transformationen. Diese Scharen bilden keineswegs Gruppen.

II Fall. $C = 0$.

$$\begin{cases} P = 1 + \gamma x + a y , \\ Q = 0 , \end{cases} \tag{105}$$

$$\begin{cases} P = 1 + \beta x , \\ Q = \delta x + \beta y , \end{cases} \tag{106}$$

$$\begin{cases} P = 1 + \gamma x , \\ Q = \dfrac{\delta}{\gamma}(1 + \gamma x)\ln|1 + \gamma x| , \end{cases} \qquad (\gamma \neq 0) . \tag{107}$$

Alle drei Scharen sind zweiparametrig und nur die zweite enthält (für $\beta \neq 0$) nichtsinguläre Transformationen.

Es zeigt sich, daß die Lösung (die der allgemeinen differenzierbaren Lösung der Gleichung, von Gołąb-Schinzel $1+ax$, a beliebig, entspricht)

$$e_0+(\beta e_0+\delta e_1)(xe_0+ye_1) \tag{108}$$

erhalten wir nur als *Teillösung.* Die Lösungen, die aber gleichzeitig eine eineindeutige Abbildung der xe_0+ye_1 Ebene bilden, müssen von der Form (106) sein.

III Fall. $C=1$.

$$\begin{cases} P = 1+\gamma x+ay\,, \\ Q = 0\,, \end{cases} \tag{109}$$

$$\begin{cases} P = 1+\beta x+\delta y\,, \\ Q = \delta x+\beta y\,, \end{cases} \tag{110}$$

$$\begin{cases} P = \frac{1}{2}(1+e^{-2\varepsilon\delta(x+\varepsilon y)})\,, \\ Q = \frac{1}{2}\varepsilon(1-e^{-2\varepsilon\delta(x+\varepsilon y)})\,, \end{cases} \quad (\varepsilon^2=1)\,, \tag{111}$$

$$\begin{cases} P = 1+\gamma(x+\varepsilon y)\,, \\ Q = -\varepsilon\gamma(x+\varepsilon y)\,, \end{cases} \quad (\varepsilon^2=1)\,, \tag{112}$$

$$\begin{cases} P = \dfrac{1}{2}\Big\{1+(\gamma+\varepsilon\delta)(x+\varepsilon y)+ \\ \qquad +\operatorname{sgn}[1+(\gamma+\varepsilon\delta)(x+\varepsilon y)]\,|1+(\gamma+\varepsilon\delta)(x+\varepsilon y)|^{\frac{\gamma+\varepsilon\delta}{\gamma-\varepsilon\delta}}\Big\}, \\ Q = \dfrac{\varepsilon}{2}\Big\{1+(\gamma+\varepsilon\delta)(x+\varepsilon y)- \\ \qquad -\operatorname{sgn}[1+(\gamma+\varepsilon\delta)(x+\varepsilon y)]\,|1+(\gamma+\varepsilon\delta)(x+\varepsilon y)|^{\frac{\gamma+\varepsilon\delta}{\gamma-\varepsilon\delta}}\Big\} \quad (\varepsilon^2=1)\,. \end{cases} \tag{113}$$

Darunter stellt nur die zweite Schar (für $|\beta|\neq|\delta|$) nichtsinguläre Lösungen dar.

Literaturverzeichnis

[1] S. Gołąb et A. Schinzel, *Sur l'équation fonctionnelle* $f[x+yf(x)]=f(x)f(y)$. Publ. Math. Debrecen 6 (1959), S. 113-125.

[2] S. Gołąb, *Über ein Funktionalgleichungssystem von O. E. Gheorghiu,* Tagungsbericht "Funktionalgleichungen", 7-11 Okt. 1963, Mathem. Forschungsinstitut Oberwolfach, S. 9-10.

Reçu par la Rédaction le 6. 4. 1964