ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIII (1983)

Approximationen für das Cauchyproblem bei parabolischen Differentialgleichungen durch endlich viele Differenzendifferentialgleichungen

von ALEXANDER VOIGT (Karlsruhe)

Abstract. The Cauchy problem $u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx})$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, is treated with the so-called longitudinal method of lines under the classical growth condition $|\varphi(x)| \leqslant C \exp(Kx^2)$, $x \in \boldsymbol{R}$. Given $h > 0$ and a truncation parameter $X = nh > 0$ under suitable regularity conditions, estimations for the line method approximations $v_i' = f(ih, t, v_i, \delta v_i, \delta^2 v_i)$, $v_i(0) = \varphi(ih)$, $i = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$ are given as $Xh \to 0$ for $h \to 0$. The idea of proof goes back to Krzyżański [3] who proved existence theorems for unbounded domains when a corresponding theorem for bounded domains is available. We get results related to the works of Kamynin [2], Walter [6] and Voigt [4].

1. Einleitung. Wendet man die longitudinale Linienmethode auf das Cauchyproblem

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \qquad &(x, t) \in \boldsymbol{R} \times (0, T], \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \qquad &x \in \boldsymbol{R}, \end{aligned}$$

an, so erhält man mit $h > 0$ das folgende Anfangswertproblem für ein System abzählbar vieler Differentialgleichungen:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} v_i' &= \frac{1}{h^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i+1}), \qquad &t \in (0, T], \\ v_i(0) &= \varphi(ih), \qquad &i \in \boldsymbol{Z}. \end{aligned}$$

Kamynin [2] bewies, dass die Lösungen des Problems (2) für $h \to 0$ gegen die Lösung des Problems (1) konvergieren, wenn nur $\varphi \colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ stetig ist und der Wachstumsbedingung

$$\text{(3)} \qquad |\varphi(x)| \leqslant C \exp(K|x| \log(1+|x|)), \qquad x \in \boldsymbol{R}$$

genügt.

Walter [5] hat die Behandlung der Linienmethode durch Verwenden von Differentialungleichungen methodisch leichter zugänglich gemacht. Auf dieser Grundlage konnte Voigt [4] zeigen, dass die Lösungen des durch die

Anwendung der Linienmethode aus (1) hervorgehenden zu (2) analogen Anfangswertproblems sogar unter der Wachstumsbedingung

$$|\varphi(x)| \leqslant C \exp(Kx^2), \quad x \in \boldsymbol{R} \tag{4}$$

gegen die Lösung des Problems (1) konvergieren, wenn man nur die in (2) auftretenden Stützstellen $x_i := ih$, $i \in \boldsymbol{Z}$, durch geeignete nichtäquidistante Stützstellen ersetzt.

Die vorliegende Arbeit knüpft an die bereits erwähnte Arbeit von Kamynin [2] an. In jener Arbeit wird ein Konvergenzsatz für die abgeschnittenen Anfangswertprobleme

$$v_i' = \frac{1}{h^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}), \qquad t \in (0, T], \ |i| \leqslant n,$$

$$v_i(0) = \varphi(ih), \qquad |i| \leqslant n,$$

für $Xh \leqslant 1$, $X = nh \to \infty$, unter der Wachstumsbedingung

$$|\varphi(x)| \leqslant C \exp(K|x|^{2-\delta}), \quad x \in \boldsymbol{R}, \ \delta > 0 \tag{5}$$

bewiesen. Dabei ist $v_i = 0$ für $|i| = n+1$ und $\varphi\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ stetig.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie ein derartiger Satz für nichtlineare, parabolische Analoga zu (1) unter der Wachstumsbedingung (4) erhalten werden kann. Die für numerische Zwecke einschneidende Forderung $|v_i| = 0$ für $|i| = n+1$ kann dabei fallen gelassen werden. Schliesslich wird speziell für die Wärmeleitungsgleichung Konvergenz unter der Voraussetzung $\varphi'''\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ stetig und $|\varphi'''(x)| \leqslant C \exp(Kx^2)$, $x \in \boldsymbol{R}$, bewiesen. Unser Vorgehen stützt sich auf die Methode der Differentialungleichungen. Eine Verallgemeierung auf höhere Raumdimensionen ist möglich.

2. Bezeichnungen. Problemstellung. Es seien I das Intervall $0 \leqslant t \leqslant T$, I_0 das Intervall $0 < t \leqslant T$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ und $\boldsymbol{R}$ die Mengen der natürlichen, ganzen und reellen Zahlen. Wir betrachten das nichtlineare Cauchyproblem

$$\text{(P)} \qquad \begin{aligned} u_t &= f(x, t, u, u_x, u_{xx}), \quad && (x, t) \in \boldsymbol{R} \times I_0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), && x \in \boldsymbol{R}, \end{aligned}$$

wobei die Funktion $\varphi\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ der Wachstumsbedingung (4) genüge. Die reellwertige Funktion $f(x, t, z, p, r)$ sei stetig auf $\boldsymbol{R} \times I_0 \times \boldsymbol{R}^3$. Weiter gebe es Konstanten $\eta > 0$, $a_0 \geqslant 0$, $b_0 \geqslant 0$ und $c_0 > 0$ derart, dass

$$f(x, t, z, p, r) - f(x, t, z, p, \bar{r}) \geqslant \eta(r - \bar{r}) \quad \text{für } r \geqslant \bar{r} \tag{6}$$

und

$$\begin{aligned} &f(x, t, z, p, r) - f(x, t, \bar{z}, \bar{p}, \bar{r}) \\ &\qquad \leqslant a_0(1+x^2)(z-\bar{z}) + b_0(1+|x|)|p-\bar{p}| + c_0|r-\bar{r}| \end{aligned} \tag{7}$$

für $z \geqslant \bar{z}$, $p, \bar{p}, r, \bar{r} \in \boldsymbol{R}$ sowie $(x, t) \in \boldsymbol{R} \times I_0$. Schliesslich sei noch

$$|f(x, t, 0, 0, 0)| \leqslant C \exp(Kx^2) \quad \text{für } (x, t) \in \boldsymbol{R} \times I_0. \tag{8}$$

Im folgenden seien $h > 0$, $x_i = ih$ für $i \in \boldsymbol{Z}$, $|i| \leqslant n$ und $X = nh$. Ist $v = v(t) = (v_i(t))_{i \in \boldsymbol{Z}}$, so setzen wir

$$Dv_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}, \quad D^2 v_i = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} \quad \text{für } i \in \boldsymbol{Z}.$$

Ist $v(t) = (v_i(t))_{|i| \leqslant n}$, so seien $\delta v_i = Dv_i$ und $\delta^2 v_i = D^2 v_i$ für $|i| < n$ sowie

$$\delta v_n = \frac{V_{n+1} - v_{n-1}}{2h}, \qquad \delta^2 v_n = \frac{V_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{h^2},$$

$$\delta v_{-n} = \frac{v_{-n+1} - V_{-n-1}}{2h}, \quad \delta^2 v_{-n} = \frac{v_{-n+1} - 2v_{-n} + V_{-n-1}}{h^2}.$$

Dabei genügen die Funktionen V_i für $|i| = n+1$ der Abschätzung (14).

Wir betrachten nun das abgeschnittene Anfangswertproblem

$$(\mathrm{P}_X^h) \qquad \begin{aligned} v_i' &= f(x_i, t, v_i, \delta v_i, \delta^2 v_i), \quad && t \in I_0,\ |i| \leqslant n, \\ v_i(0) &= \varphi(x_i), && |i| \leqslant n. \end{aligned}$$

3. Quasimonotonie. Es seien $v = (v_1, \ldots, v_m)$, $w = (w_1, \ldots, w_m)$ sowie $g(t, v) = (g_1(t, v), \ldots, g_m(t, v))$ für $(t, v) \in I_0 \times \boldsymbol{R}^m$. Die Vektorungleichung $v \leqslant w$ ist durch $v_i \leqslant w_i$ für $i = 1, \ldots, m$ erklärt. Die Funktion $g\colon I \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ heisst quasimonoton wachsend in v, falls für jedes $i = 1, \ldots, m$ aus $v \leqslant w$ mit $v_i = w_i$ stets $g_i(t, v) \leqslant g_i(t, w)$ folgt. In diesem Zusammenhang zitieren wir den folgenden

MONOTONIESATZ. *Ist $g\colon I_0 \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ quasimonoton wachsend in v, sind die Vektorfunktionen $v(t)$, $w(t)$ stetig in I und differenzierbar in I_0, und ist*

$$\text{(a)} \qquad v(0) < w(0)$$

und

$$\text{(b)} \qquad v' - g(t, v) < w' - g(t, w) \quad \text{in } I_0,$$

dann ist

$$v(t) < w(t) \quad \text{in } I.$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man etwa bei Walter [7].

HILFSSATZ. *Ist $b_0(1+X)h \leqslant 2\eta$, so ist die rechte Seite des Systems (P_X^h) bei beliebiger Wahl von V_i für $|i| = n+1$ quasimonoton wachsend in $v = (v_{-n}, \ldots, v_{-1}, v_0, v_1, \ldots, v_n)$.*

Beweis. Es sei $|i| < n$, $v = (v_{-n}, \ldots, v_n) \leqslant (w_{-n}, \ldots, w_n) = w$ sowie $v_i = w_i$. Mit (6) und (7) folgt dann

$$\begin{aligned} &f(x_i, t, w_i, \delta w_i, \delta^2 w_i) - f(x_i, t, v_i, \delta v_i, \delta^2 v_i) \\ &\qquad \geqslant \eta(\delta^2 w_i - \delta^2 v_i) - b_0(1 + |x_i|)\,|\delta w_i - \delta v_i| \\ &\qquad \geqslant \frac{1}{2h^2}\{2\eta - b_0(1+X)h\}\{(w_{i+1} - v_{i+1}) + (w_{i-1} - v_{i-1})\} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Eine ähnliche Abschätzung gilt im Falle $|i| = n$.

4. Eine Oberfunktion für (P). Im folgenden seien $0 < K < L < M < N$, $c_0 < d$, $4NdT < 1$ sowie

$$\sigma = \sigma(t) = \sigma(t; M, L) = M(1-4Ndt)^{-1} - (M-L)$$

und

$$W = W(x, t) = W(x, t; M, L) = C(1-4Ndt)^{-1/2} \exp(\sigma x^2 + t).$$

Wie man leicht nachrechnet, ist

$$W_x = 2\sigma x W, \qquad W_{xx} = 2\sigma(1+2\sigma x^2) W$$

und

$$W_t = [4MNd(1-4Ndt)^{-2} x^2 + 2Nd(1-4Ndt)^{-1} + 1] W.$$

Im folgenden wählen wir $a_0 \geqslant 0$ und $b_0 \geqslant 0$ in (7) hinreichend klein. Es seien

$$\text{(9)} \quad \begin{array}{lll} a_0 \leqslant a, & b_0 \leqslant b, & c_0 \leqslant c, \\ 0 \leqslant a \leqslant \min\{L, 1/L\} (M-L) c_0, & b\sigma \leqslant L(M-L) c_0, & c < d. \end{array}$$

Dann ist

$$\text{(10)} \quad \frac{1}{W} \{W_t - a(1+x^2) W - b(1+|x|) |W_x| - cW_{xx}\}$$

$$= x^2 \{4MNd(1-4Ndt)^{-2} - 4M^2 c(1-4Ndt)^{-2} + 8M(M-L) c(1-4Ndt)^{-1} -$$
$$- 4c(M-L)^2 - a - 2b\sigma\} -$$
$$- 2b\sigma|x| + \{2Nd(1-4Ndt)^{-1} - 2Mc(1-4Ndt)^{-1} + 2(M-L)c + 1 - a\}$$
$$\geqslant x^2 \{4M(Nd-Mc) + 4Mc(M-L) + Lc(M-L)\} - 2L(M-L)c|x| +$$
$$+ \left\{2(Nd-Mc) + 2(M-L)c + 1 - \frac{1}{L}(M-L)c + L(M-L)c - L(M-L)c\right\}$$
$$\geqslant Lc(M-L)(|x|-1)^2 + 4Mx^2\{(Nd-Mc) + c(M-L)\} + \{2(Nd-Mc) + 1\}$$
$$> 1.$$

Ist $u(x, t)$ eine Lösung des Problems (P) auf $R \times I$, so gilt die Abschätzung

$$\text{(11)} \quad |u(x, t)| \leqslant W(x, t; L, K).$$

Zum Beweis verwenden wir das Lemma von Nagumo–Westphal (vgl. Walter [7]). Wegen (5) gilt nämlich

$$|u(x, 0)| = |\varphi(x)| \leqslant C \exp(Kx^2) \leqslant C \exp(Lx^2) = W(x, 0; M, L).$$

Für den Nachweis der Defektungleichungen

$$W_t > f(x, t, W, W_x, W_{xx}) \quad \text{und} \quad W_t > -f(x, t, -W, -W_x, -W_{xx})$$

genügt wegen (7) und (8) der Nachweis der Beziehung

$$\text{(12)} \quad W_t > a_0(1+x^2) W + b_0(1+|x|) |W_x| + c_0 W_{xx} + W.$$

Dies ist nach (10) möglich. Demnach gilt $|u(x, t)| < W(x, t; M, L)$, woraus (11) durch Grenzübergang folgt.

5. Eine Oberfunktion für (P_X^h). Es sei $W_i = W_i(t) = W_i(t; M, L) = W(x_i, t; M, L)$ für $|i| \leqslant n$. Gilt nun $Xh \to 0$ für $h \to 0$, so ist nach Nr. 3 die rechte Seite des Systems (P_X^h) quasimonoton wachsend für kleine $h > 0$. Wir wollen zeigen, dass für jede Lösung $(v_{-n}, \ldots, v_0, \ldots, v_n)$ des Anfangswertproblems (P_X^h) stets

$$(13) \qquad |v_i(t)| \leqslant W_i(t) \quad \text{für } |i| \leqslant n$$

gilt, wenn nur die Funktionen $V_i(t)$ für $|i| = n+1$ der Abschätzung

$$(14) \qquad |V_i(t)| \leqslant W(x_{n+1}, t; L, K) \quad \text{für } |i| = n+1$$

genügen. Zum Nachweis von (13) verwenden wir den Monotoniesatz aus Nr. 3. Zunächst weisen wir die zu (12) analoge Ungleichung

$$(15) \qquad W_i' > a_0(1+x_i^2)\, W_i + b_0(1+|x_i|)\,|DW_i| + c_0 D^2 W_i + W_i \quad \text{für } |i| \leqslant n$$

nach.

Wegen der Abschätzungen

$$\left|\frac{DW_i}{W_x(x_i, t)}\right| = \frac{\sinh 2\sigma x_i h}{2\sigma x_i h}\, e^{\sigma h^2} \leqslant \frac{\sinh 2\sigma X h}{2\sigma X h}\, e^{\sigma h^2} \qquad (0 < |i| \leqslant n)$$

und

$$\frac{D^2 W_i}{W_{xx}(x_i, t)} = \frac{W_{xx}(\xi_i, t)}{W_{xx}(x_i, t)} \leqslant e^{\sigma(2Xh+h^2)}[1+2\sigma(2Xh+h^2)] \qquad (|i| \leqslant n)$$

gibt es zu $b > b_0$ und $c > c_0$ (vgl. (9)) ein $h_0 > 0$, so dass für $h < h_0$, $|i| \leqslant n$ und $t \in I_0$ gilt

$$(16) \qquad b_0 |DW_i| \leqslant b\,|W_x(x_i, t)| \quad \text{und} \quad c_0 D^2 W_i < c W_{xx}(x_i, t).$$

Wegen (10) gilt also die Ungleichung

$$(17) \qquad \begin{aligned} &W_i' - a_0(1+x_i^2)\, W_i - b_0(1+|x_i|)\,|DW_i| - c_0 D^2 W_i - W_i \\ &\qquad > W_i' - a(1+x_i^2)\, W_i - b(1+|x_i|)\,|W_x| - c W_{xx} - W_i > 0. \end{aligned}$$

Nach (7) und (8) folgen daraus die für die Anwendung des Monotoniesatzes erforderlichen Defektungleichungen

$$W_i' > f(x_i, t, W_i, DW_i, D^2 W_i) \quad \text{und} \quad W_i' > -f(x_i, t, -W_i, -DW_i, -D^2 W_i)$$

für $|i| < n$.

Der Fall $|i| = n$ erfordert eine gesonderte Behandlung. Zunächst bemerken wir, dass $h_0 > 0$ von Anfang so klein gewählt werden kann, dass folgende Beziehungen für $0 < h < h_0$ gelten:

$$(18) \qquad \delta^2 W_n < 0 \quad \text{und} \quad \delta^2 W_{-n} < 0,$$

$$\tfrac{1}{2}(W_{n+1}-V_{n+1})-h^2(D^2 W_n - W_{xx}) > 0, \tag{19}$$

$$b_0 h(1+X) < \eta. \tag{20}$$

Dabei folgt (18) aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{h^2\delta^2 W_n}{W_n} &\leqslant \frac{W_{n+1}(t;L,K)}{W_n(t;M,L)}-2+\frac{W_{n-1}(t)}{W_n(t)}\\ &\leqslant \exp\left[\sigma(t;L,K)(2Xh+h^2)-(L-K)X^2\right]-2+\\ &\qquad +\exp[\sigma(t;M,L)(-2Xh+h^2)],\end{aligned}$$

und der Tatsache, dass die rechte Seite für $h \to 0$ wegen $Xh \to 0$ und $X \to \infty$ gegen -1 strebt. Die Formel (19) folgt aus

$$h^2\frac{D^2 W_n - W_{xx}}{W_n} = 2(e^{\sigma h^2}-1-\sigma h^2)+2\left(\cosh 2\sigma Xh - 1 - \tfrac{1}{2}(2\sigma Xh)^2\right) \to 0$$

sowie

$$\frac{W_{n+1}(t;M,L)-W_{n+1}(t;L,K)}{W_n(t;M,L)} \to 1$$

für $h \to 0$.

Mit (6), (7), (8), (10), (15), (16), (18), (19) und (20) folgt dann

$$\begin{aligned}&W_n'-f(X,t,W_n,\delta W_n,\delta^2 W_n)\\ &\quad = W_n'+[f(X,t,W_n,\delta W_n,W_{xx})-f(X,t,W_n,\delta W_n,\delta^2 W_n)]-\\ &\qquad -[f(X,t,W_n,\delta W_n,W_{xx})-f(X,t,0,0,0)]-f(X,t,0,0,0)\\ &\quad \geqslant W_n'+\eta(W_{xx}-\delta^2 W_n)-a_0(1+X^2)W_n-b_0(1+X)|\delta W_n|-cW_{xx}-W_n\\ &\quad \geqslant \{W_n'-a_0(1+X^2)W_n-b(1+X)|W_x|-cW_{xx}-W_n\}+\eta(W_{xx}-D^2 W_n)+\\ &\qquad +\frac{1}{2h^2}(W_{n+1}-V_{n+1})\,[2\eta-b_0 h(1+X)]\\ &\quad \geqslant \frac{\eta}{h^2}\left\{\tfrac{1}{2}(W_{n+1}-V_{n+1})-h^2(D^2 W_n - W_{xx})\right\} > 0.\end{aligned} \tag{21}$$

Ebenso erhält man $W_n' > -f(X,t,-W_n,-\delta W_n,-\delta^2 W_n)$. Der Fall $i=-n$ wird analog behandelt. Damit ist (13) bewiesen.

6. Ein Abschätzungssatz. Es sei $u = u(x,t)$ die Lösung des Cauchyproblems (P) auf $\boldsymbol{R}\times I$. Weiter seien $\beta(X,h) \geqslant 0$, $\gamma(X,h) \geqslant 0$ sowie

$$\alpha(X,h) = b_0(1+X)\,\beta(X,h)+c_0\gamma(X,h), \tag{22}$$

und es gelte $Xh \to 0$ und $\alpha(X,h)h^2\exp\left((L-K)X^2\right) \to \infty$ für $h \to 0$. Gelten dann für $0 < h < h_0$ die Abschätzungen

$$|u_x(x_i,t)-Du_i(t)| \leqslant \beta(X,h)\,W_i(t;L,K) \quad \text{für } |i| \leqslant n \tag{23}$$

und

$$|u_{xx}(x_i, t) - D^2 u_i(t)| \leqslant \gamma(X, h)\, W_i(t; L, K) \quad \text{für } |i| \leqslant n, \tag{24}$$

dann ist für $0 < h < h_0$

$$|u(x_i, t) - v_i(t)| \leqslant \alpha(X, h)\, W_i(t; M, L) \quad \text{für } |i| \leqslant n. \tag{25}$$

Beweis. Wir verwenden wieder den Monotoniesatz aus Nr. 3. Wir setzen $\varrho_i(t) = \alpha(X, h)\, W_i(t; M, L)$ für $|i| \leqslant n$. Wegen $\varrho_i(0) \geqslant 0$ für $|i| \leqslant n$ genügt also zum Beweis von

$$v_i \leqslant u_i + \varrho_i \tag{26}$$

der Nachweis von

$$\varrho_i' \geqslant f\big(x_i, t, u_i + \varrho_i, \delta(u_i + \varrho_i), \delta^2(u_i + \varrho_i)\big) - f(x_i, t, u, u_x, u_{xx}) \tag{27}$$

und zum Beweis von

$$u_i - \varrho_i \leqslant v_i \tag{28}$$

der Nachweis von

$$\varrho_i' \geqslant f(x_i, t, u, u_x, u_{xx}) - f\big(x_i, t, u_i - \varrho_i, \delta(u_i - \varrho_i), \delta^2(u_i - \varrho_i)\big). \tag{29}$$

Im Fall $|i| < n$ ist

$$\varrho_i' \geqslant a_0(1 + x_i^2)\varrho_i + b_0(1 + |x_i|)\,(|D\varrho_i| + |u_x - Du_i|) + c_0(D^2 \varrho_i + |u_{xx} - D^2 u_i|) \tag{30}$$

hinreichend für (27) und (29). Berücksichtigt man (17), (23) und (24), so genügt es, α wie in (22) zu wählen.

Nun zum Fall $i = n$. Berücksichtigt man (18), (21) und (22), dann erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\varrho_n' - f\big(X, t, u_n + \varrho_n, \delta(u_n + \varrho_n), \delta^2(u_n + \varrho_n)\big) + f(X, t, u, u_x, u_{xx}) \\
&= \alpha W_n' + f(X, t, u, u_x, u_{xx}) - f(X, t, u + \alpha W_n, u_x + \alpha\delta W_n, u_{xx} + \alpha\delta^2 W_n) + \\
&\quad + f(X, t, u + \alpha W_n, u_x + \alpha\delta W_n, u_{xx} + \alpha\delta^2 W_n) - \\
&\quad - f\Big(X, t, u + \alpha W_n, Du_n + \alpha\delta W_n + \frac{1}{2h}\,[(1-\alpha)V_{n+1} - u_{n+1}], D^2 u_n + \alpha\delta^2 W_n + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{h^2}\,[(1-\alpha)V_{n+1} - u_{n+1}]\Big) \\
&\geqslant \alpha W_n' - a_0(1 + X^2)\alpha W_n - b_0(1 + X)\alpha\,|\delta W_n| - \eta\alpha\delta^2 W_n - \\
&\quad - b_0(1 + X)\left\{|u_x - Du_n| + \frac{1}{2h}\,|(1-\alpha)V_{n+1} - u_{n+1}|\right\} - \\
&\quad - c_0\left\{|u_{xx} - D^2 u_n| + \frac{1}{h^2}\,|(1-\alpha)V_{n+1} - u_{n+1})|\right\} \\
&\geqslant \alpha\,\{W_n' + \eta(W_{xx} - \delta^2 W_n) - a_0(1 + X^2)\,W_n -
\end{aligned}$$

$$-b_0(1+X)|\delta W_n| - cW_{xx}\} + \alpha(c-\eta)W_{xx} -$$

$$-\alpha W_n(t; L, K) - \frac{1}{2h^2}[b_0(1+X)h + 2c_0](\alpha+2)W_{n+1}(t; L, K)$$

$$\geqslant \alpha(W_n(t; M, L) - W_n(t; L, K)) +$$

$$+\frac{1}{2h^2}\{4L(c-\eta)\alpha h^2 \exp((L-K)X^2) -$$

$$-[b_0(1+X)h + 2c_0](\alpha+2)\exp(\sigma(2Xh+h^2))\}W_n(t; L, K)$$

$$\geqslant 0.$$

Dabei lässt sich die letzte Ungleichung wegen $W_n(t; M, L) \geqslant W_n(t; L, K)$ und $Xh \to 0$ sowie $\alpha h^2 \exp((L-K)X^2) \to \infty$ für kleine $h > 0$ erreichen.

7. Ein Konvergenzsatz im Falle der Wärmeleitungsgleichung. Es sei $\varphi \in C^3(R)$ mit $|\varphi'''(x)| \leqslant C\exp(Kx^2)$, $x_0 \neq 0$, $2 < r < 4$, $h_k = |x_0|2^{-k}$, $n_k = [r^k]$ und $X_k = n_k h_k$. Ist $u = u(x, t)$ die Lösung des Cauchyproblems (1) mit $T < 1/4K$ und ist $v^{(k)}(t) = (v^{(k)}_{-n_k}(t), \ldots, v^{(k)}_{-1}(t), v^{(k)}_0(t), v^{(k)}_1(t), \ldots, v^{(k)}_{n_k}(t))$ die Lösung des Systems

$$v_i' = \delta^2 v_i, \qquad t \in (0, T],$$
$$v_i(0) = \varphi(ih_k), \qquad |i| \leqslant n_k,$$

dann gibt es ein $k_0 \in N$, so dass für alle $k \geqslant k_0$ und alle $t \in [0, T]$ gilt

$$|u(\pm x_0, t) - v^{(k)}_{\pm 2^k}(t)| \leqslant |x_0| 2^{1-k} W(x_0, t; M, L).$$

Beweis. Mit der Fourier–Poisson-Formel für die Lösung des Problems (1) ergibt sich für $t \in (0, T]$ die Abschätzung

$$|u_{xxx}(\xi, t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)\varphi'''(y+\xi)\,dy\right|$$

$$\leqslant \frac{C}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{4t} + K(y+\xi)^2\right)dy = C\,\frac{\exp\left(\frac{K\xi^2}{1-4Kt}\right)}{\sqrt{1-4Kt}}$$

$$\leqslant W(\xi, t; L, K).$$

Daraus ergibt sich also mit $x_i^{(k)} = in_k$, $|i| \leqslant n_k$, die Abschätzung

$$|u_{xx}(x_i^{(k)}, t) - D^2 u_i(t)| \leqslant h_k|u_{xxx}(\xi_i^{(k)}, t)| \leqslant hW(\xi_i^{(k)}, t; L, K)$$
$$\leqslant h_k \exp(\sigma(2X_k h_k + h_k^2))\,W(x_i^{(k)}, t; L, K)$$
$$\leqslant 2h_k W(x_i^{(k)}, t; L, K)$$

für alle $k \geqslant k_0$. Setzt man im obigen Abschätzungssatz $b_0 = 0$, $c_0 = 1$, $\alpha(X, h) = 2h$, dann gilt

$$\alpha(X, h) h^2 \exp\left((L-K) X^2\right) = 2h^3 \exp\left((L-K) X^2\right) \to \infty,$$

so dass die Behauptung mit $i = \pm 2^k$ unmittelbar folgt.

Literatur

[1] L. I. Kamynin, *On the convergence of a finite-difference process for the heat equation* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 85 (1952), S. 701–703.

[2] —, *On the applicability of a finite-difference method to the solution of the heat equation, II* (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 17 (1953), S. 249–268.

[3] M. Krzyżański, *Sur les solutions des équations du type parabolique déterminées dans une région illimitée*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), S. 911–915.

[4] A. Voigt, *Line method approximations to the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations*, Numer. Math. 23 (1974), S. 23–36.

[5] W. Walter, *Die Linienmethode bei nichtlinearen parabolischen Differentialgleichungen*, Numer. Math. 12 (1968), S. 307–321.

[6] —, *Approximation für das Cauchyproblem bei parabolischen Differentialgleichungen mit der Linienmethode*, ISNM vol. 10, *Abstract spaces and approximation*, S. 139–145, Birkhäuser, Basel, 1969.

[7] —, *Differential and integral inequalities*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1970.

MATHEMATISCHES INSTITUT I
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH), KARLSRUHE

Reçu par la Rédaction le 15.12.1976